

从守恒到开放 —— 广义哈密顿控制系统的理论和应用 *

程代展 秦化淑 洪奕光 席在荣

(中国科学院系统科学研究所·北京, 100080)

摘要: 本文力图从能量的观点处理经典哈密顿系统、Poisson 括号和辛几何. 将其推广到具有能量耗散以及与环境有能量交换的广义哈密顿控制系统. 提出伪 Poisson 流形与广义辛流形作为一般哈密顿控制系统状态空间的几何框架. 讨论了它们的相互关系及一些基本性质. 提出广义辛群、辛代数的概念作为广义哈密顿系统的代数结构. 基于此研究了广义哈密顿系统的保结构性. 然后讨论哈密顿系统的 Casimir 流形方法及反馈镇定等问题. 得到的结果为进一步研究提供了基础. 作为例子, 将一些结果应用于电力系统的励磁控制.

关键词: 广义哈密顿受控系统; Poisson 流形; 辛几何; Casimir 函数; 励磁控制

From Conservation to Openness —— Theory and Applications of Generalized Controlled Hamiltonian Systems

Cheng Daizhan Qin Huashu Hong Yiguang Xi Zairong

(Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences · Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: The paper intends to treat the classical Hamiltonian systems, Poisson bracket and symplectic geometry from the energy point of view. They are extended to generalized Hamiltonian systems, which have internal dissipation and energy exchange with environment. The pseudo-Poisson manifold and the generalized symplectic manifold are proposed as the geometric frame of the generalized Hamiltonian control systems. The relationship between the pseudo-Poisson manifold and the generalized symplectic manifold and their certain properties are investigated. Then the generalized symplectic group and symplectic algebra are proposed as the algebraic structure of the generalized Hamiltonian systems. The structure-preserving properties of the generalized Hamiltonian systems are investigated. Then the Casimir manifold approach and the feedback stabilization of generalized Hamiltonian systems are discussed. The results obtained provide a foundation for further investigation. As an example, they are applied to the excitation control of power systems.

Key words: generalized Hamiltonian control systems; Poisson manifold; symplectic geometry; Casimir functions; excitation control

1 经典哈密顿系统与受控哈密顿系统

从牛顿力学出发, 经典哈密顿方程对孤立的力学系统给出完美的描述^[1,2], 对这样一个系统, 记 q 为广义坐标, p 为广义动量, $M(q)$ 为广义质量, K 为动能, P 为势能. 那么, 系统的总能量为

$$H = K + P = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + P(q). \quad (1)$$

它称为系统的哈密顿函数, 由牛顿第二定律与变分原理^[3], 经典的哈密顿运动方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases} \quad (2)$$

显见 $\frac{dH}{dt} = 0.$ (3)

* 国家自然科学基金与攀登项目 (970211017) 资助项目.

(3) 表示: 对一个无耗散的孤立力学系统, 系统的能量是守恒的.

当有外力作用于系统时, (2) 变为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + u, \\ y = \dot{q}. \end{cases} \quad (4)$$

这里, u 是广义力. 从控制论的观点, 我们将其视为控制. $y = \dot{q}$ 是广义速度, 它被当作系统的输出. 实际上, 在基于无源性的机器人控制设计中就是采用的这种形式^[18].

由 (4) 可得

$$\frac{dH}{dt} = u^T y. \quad (5)$$

因此有

$$H(t) - H(0) = \int_0^t u^T y dt.$$

它表明系统能量的变化等于外力作的功.

记 M 为 n 维流形 (n 为偶数), 它是系统的状态空间, N 为 m 维流形, 是系统的输出空间, (4) 可改写成控制系统的标准形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \nabla H + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} u, \\ y = dH \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad x \in M, \quad y \in N. \end{cases} \quad (6)$$

将 $q(x) = H(x)$ 作为存储函数, $s(u, y) = u^T y$ 作为供给率, 那么 (5) 变为

$$q_x(f + gu) = s(x, y). \quad (7)$$

(7) 表明受控哈密顿系统是一个以哈密顿函数作存储函数的耗散系统^[4].

记

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

给定一个哈密顿函数 $H(x) \in C^\infty(M)$, 一个向量场 $f(x)$ 称为由哈密顿函数 $H(x)$ 生成的哈密顿向量场. 如果它能局部地 (在局部坐标下) 表示为

$$f(x) = J \nabla H(x) := X_H. \quad (9)$$

设 $G(x) \in C^\infty(M)$, G 沿向量场 X_H 方向的变

化率为

$$\frac{dG}{dt} = L_f G = dGJ \nabla H. \quad (10)$$

如果它恒等于 0, 则 $G(x)$ 称为哈密顿系统

$$\dot{x} = X_H \quad (11)$$

的一个守恒律 (或首积分).

从另一个角度看 (10) 式: 对给定的两个函数 $G(x), H(x) \in C^\infty(M)$, 存在一个双线性映射: $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, 记作 $\{\cdot, \cdot\}$, 如,

$$\{G, H\} = dGJ \nabla H, \quad \forall G, H \in C^\infty(M). \quad (12)$$

这个映射称为 Poisson 括号. 它在 $C^\infty(M)$ 上定义了一个李代数, 称为 Poisson 代数.

回到控制系统 (6), 利用哈密顿向量场与 Poisson 括号的概念, 它可以改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = X_H - \sum_{i=1}^m X_{G_i} u_i := X_H - X_G u, \\ y = \{H, G\}. \end{cases} \quad (13)$$

2 伪 Poisson 流形

在流形 M 上, 如果存在一个双线性映射: $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, 对每一点 $x \in M$, 存在一个坐标邻域, 使得该映射 (括号) 能表示为 (12) 式, 则 M 称为一个 Poisson 流形, J 为其结构矩阵. (这是一个方便的等价定义, 严格定义可见 [5]).

定义 2.1 一个双线性映射 $\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, 称为一个伪 Poisson 流形如果它满足 Leibriz 等式

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G. \quad (14)$$

命题 2.2^[6] 1) 伪 Poisson 流形由它的结构矩阵 $T(x)$ 唯一确定. 在局部坐标下它的元素为

$$T_{ij} = \{x_i, x_j\}.$$

2) 设 $y = \phi(x)$ 为一坐标变换, 其 Jacobian 矩阵为 J_y . 那么

$$T(y) = J_y T(x) J_y^T |_{x=\phi^{-1}(y)}. \quad (15)$$

设 M 为一个伪 Poisson 流形, $H \in C^\infty(M)$. 一个广义哈密顿向量场 X_H , 定义为

$$L_{X_H}(G) = \{G, H\}, \quad \forall G \in C^\infty(M). \quad (16)$$

命题 2.3 由 (16) 式定义的向量场 X_H 是唯一定义好的.

证 由于伪 Poisson 括号仍满足 Leibriz 等式, 容易证明 L_{X_H} 是一个导数. 即

$$L_{X_H}(FG) = GL_{X_H}(F) + FL_{X_H}(G).$$

要证明 (16) 唯一地决定了 X_H . 令 $G = x_i$, 则可得

$$X_H = \sum_{i=1}^n \{x_i, H\} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (17)$$

证毕.

3 广义受控哈密顿系统

给定一个伪 Poisson 流形 M , 一个系统哈密顿函数 H 及 m 个输入哈密顿函数 G_1, \dots, G_m . 利用广义哈密顿向量场及伪 Poisson 括号可定义一个广义哈密顿受控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = X_H - \sum_{i=1}^m X_{G_i} u_i := X_H - X_{G_u} u, \\ y_j = \{H, G_j\}, \quad j = 1, \dots, m; \quad (\text{或 } y = \{H, G\}). \end{cases} \quad (18)$$

在一个给定的局部坐标下, 设伪 Poisson 括号的结构矩阵为 $T(x)$, 则 (18) 在此坐标下可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = T(x) \nabla H - \sum_{i=1}^m T(x) \nabla G_i u_i, \\ y_j = \{H, G_j\}, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (19)$$

将结构矩阵 $T(x)$ 分解为

$$T(x) = J(x) + P(x) = J(x) - R(x) + S(x). \quad (20)$$

这里 $J(x)$ 为反对称. $P(x)$ 为对称, $R(x)$ 及 $S(x)$ 为对称半正定. 第一步分解是唯一的; 第二步分解 $P(x) = -R(x) + S(x)$ 也是唯一的, 如果我们要求 $R(x)$ 与 $S(x)$ 具有最小秩, 即它们分别为 $P(x)$ 的负特征值个数与正特征值个数.

现在考虑 (19) 的能量流, 它是

$$\frac{dH}{dt} = -dHR \nabla H + dHS \nabla H + y^T u. \quad (21)$$

(21) 式的第一项为系统的耗散, 第二项可解释为系统自身产生的能量, 而第三项如前, 表示外界提供的能量.

可以说, 一个广义哈密顿受控系统是一个开放系统, 它既有与环境的能量交换又有耗散还有能量的生成. 这是“开放复杂巨系统”的一个特征 [7].

下面的例子 [8] 是一个广义哈密顿系统的实际物理描述.

例 3.1 考虑下述系统, 它是一个带内电源的增压器

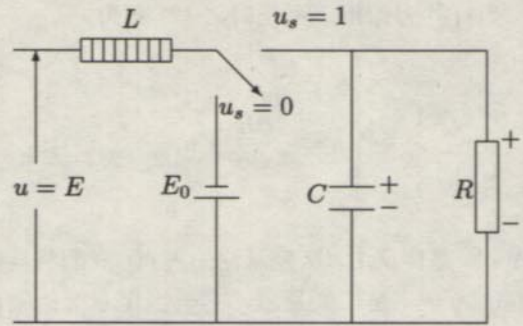


图 1 带内电源的增压器

记 ϕ 为电感的全磁流, q 为储存于电容器的电能, $H_m(\phi)$ 为储存于电感的磁能, $H_e(q)$ 为储存于电容的电能. 则系统的哈密顿函数为

$$H = H_e + H_m = \frac{q^2}{2C} + \frac{\phi^2}{2L}.$$

系统的动力学方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_s + \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_s - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \nabla H + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (22)$$

证毕.

当 $S(x) = 0$ 时系统称为带耗散的广义哈密顿系统, 它在镇定问题中特别重要 [9~11].

4 伪辛几何

熟知 [1,12], 当 Poisson 流形 M 的结构矩阵 $T(x)$ 非奇异时, $J(x) = T^{-1}(x)$ 定义了流形 M 上的一个辛结构, 一个辛结构是一个闭的、非奇异、反对称二形式. 因为辛几何是研究受控哈密顿系统的一个非常有用的工具, 我们希望将它推广到伪 Poisson 流形中去.

定义 4.1

1) 一个带有 2 阶非奇异协变张量场 ω 的流形称为 ω 流形.

2) 给定一个 ω 流形 (M, ω) , 设向量场 $X \in V(M)$ 和余向量场 $\mu \in V^*(M)$ 由下式相关

$$i_X(\omega) = \omega(X, \cdot) = \mu.$$

定义 V 与 V^* 间的两个同构 $\sharp: V^*(M) \rightarrow V(M)$ 及 $\flat: V(M) \rightarrow V^*(M)$

$$X = \mu^\sharp, \quad \text{and} \quad \mu = X^\flat. \quad (23)$$

并且, 如果 $X = (dH)^\sharp$, 则记 $X = X_H$.

3) 称 ω 可积, 如果对每一点 $x \in M$, 存在一个局部坐标卡, 使得 ω 的矩阵表现, 记作 W_ω , 是定常阵, 换言之

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} dx_i \otimes dx_j, \quad w_{ij} \in \mathbb{R}.$$

现在可以用 ω 流形定义一个广义哈密顿系统.

定义 4.2 一个广义哈密顿系统是一个三元组 (M, ω, H) , 这里 (M, ω) 是一个 ω 流形, H 是一个光滑函数, 称为系统的哈密顿函数, 它的动态形式为

$$\dot{x} = X_H. \quad (24)$$

给定一个 ω 流形, 在每个坐标卡下可定义一个结构矩阵 $M(x)$ 如下:

$$M(x) = W^{-T}(x). \quad (25)$$

这里 $W(x)$ 是 ω 的矩阵表现, $-T$ 为转置逆. 这样, 就可以由一个伪辛流形定义一个伪 Poisson 流形.

下面是伪 Poisson 流形与伪辛流形的一些关系:

命题 4.3 [8]

1) 由 (25) 所定义的伪 Poisson 流形是唯一定义好的. 而且, 利用 (25) 所确定的 Poisson 括号, (16) 所定义的 H 的向量场 X_H 与 (23) 所定义的 X_H 吻合.

2) 设一个伪 Poisson 括号定义如前, 则

$$\omega(X_H, X_G) = \{H, G\}. \quad (26)$$

3) X 是一个局部广义哈密顿向量场当且仅当 $i_X(\omega)$ 是闭的, 设 M 为简单流形, 则结论全局成立.

本节只介绍非奇异的情况, 对奇异情况的讨论见 [8].

5 结构群与结构不变性

辛群及其辛代数在哈密顿系统理论中起着重要作用. 这一节, 我们引入一个广义结构群, 它对广义哈密顿系统起着类似的作用.

定义 5.1 设 N 为一个 $n \times n$ 矩阵.

1) 定义一个 N -群, G_N 为

$$G_N = \{E \in GL(n, \mathbb{R}) \mid E^T N E = N\}; \quad (27)$$

2) 一个 N -代数, g_N 定义为

$$g_N := \{X \in gl(n, \mathbb{R}) \mid NX + X^T N = 0\}. \quad (28)$$

对结构群及其代数, 我们将得到的主要结果列于以下定理.

定理 5.2 [6]

1) G_N 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的李子群;

2) G_N 的李代数是 g_N ;

3) 设 N 非奇异. 若 N 为对称阵, 则 $\dim(G_N) = n(n-1)/2$; 若 N 为反对称阵. 则 $\dim(G_N) = n(n+1)/2$;

4) 对任意 $n \times n$ 阵 N ($n > 1$), G_N 不是离散群, 换言之, $\dim(G_N) \geq 1$;

5) 设 $t \in g_N$, $\lambda \in \sigma(t)$ 为 t 的 k 重特征值, 则 $-\lambda \in \sigma(t)$, $\lambda^* \in \sigma(t)$, $-\lambda^* \in \sigma(t)$ 重数均为 k . 如果 n 为偶数, $0 \in \sigma(t)$, 则其重数为偶数;

6) 设 $T \in G_N$. 则 $\det(T) = 1$.

7) 设 $t \in g_N$, 则 $\text{tr}(t) = 0$.

标准哈密顿系统的一个突出的特性是它的保结构性: 设 (M, ω) 为 $-$ 辛流形, 且 $X_H(x)$ 为一哈密顿向量场, 其积分曲线为 $e_{X_H}^t(x)$, 那么 [1]

$$(e_{X_H}^t(x))^* \omega = \omega. \quad (29)$$

如, 记 $X_H(x)$ 及 $e_{X_H}^t(x)$ 的 Jacobian 矩阵分别为 J_X 及 J_e , 那么, 在标准坐标下, 即

$$W_\omega = J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

时有 $J_X \in sp(2n, \mathbb{R})$, 即

$$J_X J + J J_X = 0. \quad (30)$$

则 $J_e \in sp(2n, \mathbb{R})$, 即

$$J_e^T J J_e = J. \quad (31)$$

它有许多应用, 特别是用于辛算法 [13]~[15]. 本节的余下部分讨论将其推广到广义哈密顿系统. 首先我们有以下公式.

命题 5.3 [8] 1) 设 $X \in V(M)$ 及 $\xi \in T^2(M)$, $W(x) = W_\xi(x)$ 为 ξ 在局部坐标下的矩阵表现, 那么成立

$$L_X(\xi) = (L_X(W_{ij}(x))) + W(x) \frac{\partial X}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^T W(x). \quad (32)$$

这里的第一项是以 $L_X(W_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, n$ 为元素的矩阵.

2) 设 $X_H(x)$ 为一哈密顿向量场, 其积分曲线为 $e_{X_H}^t(x)$, 且记 $X_H(x)$ 和 $e_{X_H}^t(x)$ 的 Jacobian 矩阵

分别为 J_X 和 J_e . 设 ω 可积且 W 为其定常矩阵表示, 那么 ω 对 X_H 的轨线保持结构不变当且仅当, 以下三个等价条件之一成立.

$$C1 \quad J_X \in g_W, \quad (33)$$

$$C2 \quad J_e \in G_W, \quad (34)$$

$$C3 \quad (WW^{-T} + I)\text{Hess}(H) = 0. \quad (35)$$

注 1 由 (35) 可知, ω 对所有的 $X_H, H \in C^\infty(M)$ 均不变的充要条件为 $W = -W^T$. 这样, 除标准括号外, 不会有别的张量场, 它也对一切广义哈密顿向量场不变.

注 2 记广义哈密顿向量场 X_H 的 Jacobian 矩阵为 J_H , 那么 $J_X = M\text{Hess}(H)$, 如果将 W 分为 $W = W_J + W_S$, 这里 W_J 为反对称 W_S 为对称, 那么, 容易证明: (35) 等价于

$$W_S J_X = 0. \quad (36)$$

(36) 的几何意义是很清楚的: X_H 是结构不变的当且仅当 $J_X \in \ker(W_S)$. 因此, 如果 W 是反对称的. 则任何 X_H 均保结构, 如果 W_S 非奇异, 则只有定常向量场保结构.

我们可以将保结构性质或者用张量场形式或者用伪 Poisson 括号形式表示, 下面的结论表明这两种形式是等价的.

命题 5.4^[8] 设 ω 为一非奇异二次张量场, 且 $\{\cdot, \cdot\}$ 为由 ω 导出的伪 Poisson 括号. 那么

$$(e_{X_H}^t)^* \omega = \omega, \quad (37)$$

当且仅当

$$(e_{X_H}^t)^* \{F, G\} = \{F, G\}, \quad \forall F, G \in C^\infty(M). \quad (38)$$

6 Casimir 不变子流形

定义 6.1 一个函数 $\phi(x)$ 称为 Casimir 函数如果

$$\{\phi(x), C(x)\} = 0, \quad \forall C(x) \in C^\infty(M). \quad (39)$$

回忆带有形式为 (20) 的结构矩阵 $T(x)$ 的广义受控哈密顿系统 (19), 设 $S(x) = 0$, 则系统变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J - R)(\nabla H + \sum_{i=1}^m \nabla G_i u_i) \\ &:= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i. \end{aligned} \quad (40)$$

借助辅助源系统, [9~11] 考察了常值控制下系统的镇定问题. 本节将这些方法扩展到一般形式.

该形式允许控制是一般的状态反馈.

设广义 Hamilton 函数为

$$H_e = H + \eta^T V, \quad (41)$$

此处 η 是辅助变量, $V \in \mathbb{R}^m$ 是常向量, 满足条件

$$f(x_0) + \sum_{i=1}^m g_i(x_0) V_i = 0,$$

工作点 x_0 是当 $u_i(x_0) = V_i$ 时闭环系统的平衡点.

如 [16] 所示, 为使闭环系统仍为广义 Hamilton 系统. 控制只能选为如下形式

$$u = V + \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial G_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial G_m} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

其中 $\Phi = \phi(G) = 0(\|G\|^2)$ 可以根据控制目标选取.

因此, 构造 (40) 的扩张系统如下

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} J & JK \\ K^T J & K^T JK \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & RK \\ K^T R & K^T RK \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla H_e. \quad (43)$$

其中 $K = (\nabla G_1 \dots \nabla G_m)(I + \frac{1}{\|V\|^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial G_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial G_m} \end{pmatrix} V^T)$.

这样, 可以证明如下命题:

命题 6.2 1) $\eta - (G_1 \dots G_m)V - \Phi(G)$ 是系统 (43) 的 Casimir 函数, 也就是说, 它是由系统 (43) 导出的结构矩阵的 Casimir 函数;

2) 对任意常数 c , Camisir 流形

$$S_c = \{(x, \eta) \mid \eta - (G_1 \dots G_m)V - \Phi(G) = c\}$$

是 (43) 的不变子流形;

3) (43) 在 S_c 上的限制是原系统 (40) 的一个微分同胚的系统. 记 H_e^c 为 H_e 在 S_c 上的限制, 即

$$H_e^c = H + (G_1 \dots G_m)V + \Phi(G)(x). \quad (44)$$

利用上述命题, 可以证明如下定理.

定理 6.3 如果 x_0 是 (44) 的局部严格极小点, 则它是 (40) 的局部平衡点.

将定理 6.3 与 [9~11] 中所用方法相比较, 易知, 新结果为选取 Lyapunov 函数提供了更多的自由度, 并且, 镇定系统 (40) 的控制可以是相当任意的状态反馈, 只要该反馈能保持闭环系统为广义

Hamilton 系统.

7 应用

考虑电力系统的励磁控制^[16]

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega - \omega_0, \\ \dot{\omega} = \frac{\omega_0}{M} P_m - \frac{D}{M} (\omega - \omega_0) - \frac{\omega_0 E'_q V_s}{M x'_{d\Sigma}} \sin \delta, \\ \dot{E}'_q = -\frac{1}{T'_d} E'_q + \frac{1}{T_{d0}} \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta + \frac{1}{T_{d0}} V_f. \end{cases} \quad (45)$$

其中 δ : 转子角, ω : 转子速度, E'_q : 内部暂态电压, P_m : 机械功率, M : 发电机惯性系数, D : 阻尼系数, $P_e = \frac{E'_q V_s}{x'_{d\Sigma}} \sin \delta$: 有功功率, T'_d : 定子闭环时间常数, T_{d0} : 励磁电路时间常数, x_d : 定子电路自感抗, x'_d : 定子电路暂态电阻, V_f : 发电机电路电压.

考虑 $u = V_f$ 为控制. 令

$$x_1 = \delta, \quad x_2 = \omega - \omega_0, \quad x_3 = E'_q.$$

且记 $a = \frac{\omega_0}{M} P_m$, $b = \frac{D}{M}$, $c = \frac{\omega_0 V_s}{M x'_{d\Sigma}}$, $d = \frac{1}{T'_d}$ 和 $e = \frac{1}{T_{d0}} \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s$, 则选取适当输出后系统 (45) 可以写为标准形式

$$\begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u, \\ y = g^T \frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases} \quad (46)$$

其中

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{e} \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/T_{d0} \end{pmatrix},$$

$$y = -\frac{c}{T_{d0}} \cos x_1 + \frac{cd}{T_{d0}e} x_3$$

以及

$$H(x) = -cx_3 \cos x_1 - ax_1 + \frac{cd}{2e} x_3^2 + \frac{1}{2} x_2^2.$$

令扩张 Hamilton 函数为 $H_e = H(x) + H_s(\eta) = H(x) - \bar{u}\eta$.

则可构造扩张哈密顿系统如下:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/T_{d0} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{e} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial H_e}{\partial x}. \quad (47)$$

$$\text{令 } K(x) = \frac{\partial C(x)}{\partial x} \text{ 则 } C(x) = \frac{c}{eT_{d0}} x_3.$$

下面将修正原系统, 使得 $C(x)$ 是 Casimir 函数. 仿照 [9]

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} J & JK \\ K^T J & K^T JK \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & RK \\ K^T R & K^T RK \end{pmatrix} \\ \frac{\partial H_e}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

易验证 $\eta - C(x) = \eta - \frac{c}{eT_{d0}} x_3$ 是一个 Casimir 函数. 则在子流形 $\eta - C(x) = c_0 = \text{const}$ 上, 受限 Hamilton 函数 H_r 为

$$\begin{aligned} H_r &= H(x) - \bar{u} \left(\frac{c}{eT_{d0}} x_3 + c_0 \right) \\ &= -cx_3 \cos x_1 - ax_1 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{cd}{2e} x_3^2 \\ &\quad - \frac{\bar{u}c}{eT_{d0}} x_3 - \bar{u}c_0. \end{aligned} \quad (49)$$

记 \bar{x} 为其临界点. 因为 \bar{x} 既是 Hamilton 函数 H_r 的临界点, 又是系统 (46) 的平衡点, 它满足如下方程.

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0, \\ a - c\bar{x}_3 \sin \bar{x}_1 = 0, \\ -d\bar{x}_3 + e \cos \bar{x}_1 + \frac{1}{T_{d0}} \bar{u} = 0. \end{cases} \quad (50)$$

可以证明, \bar{x} 满足适当条件时, \bar{x} 是 H_r 的一个极小点, 考虑 H_r 的 Hessian 矩阵, 直接计算表明:

$$\text{Hess}(H_r) = \begin{pmatrix} cx_3 \cos x_1 & 0 & c \sin x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c \sin x_1 & 0 & \frac{cd}{e} \end{pmatrix}.$$

$\text{Hess}(H_r)$ 正定, 当且仅当

$$d\bar{x}_3 \cos \bar{x}_1 > e \sin^2 \bar{x}_1. \quad (51)$$

因此, 如果 (51) 式满足, \bar{x} 就是极小点, 进一步的研究表明平衡点 \bar{x} 是渐近稳定的. 仿真结果是令人鼓舞的.

8 结论

本文为最一般的 Hamilton 系统提供了一个模型, 引入具有一个二次协变张量场的伪辛流形以及 Poisson 流形, 作为广义系统的状态空间描述, 这些新概念分别是辛流形和 Poisson 流形的推广. 我们研究了它们某些性质. 作为辛群和辛代数的推广. 我们分别提出了 N -群及 N -代数作为广义哈密顿系统的结构群及其代数. 它们能用于广义系统的结构分析.

作为应用, 我们讨论了励磁控制系统的镇定, 励磁控制系统被表示为广义哈密顿系统的形式. 基于能量的 Lyapunov 函数方法被用于系统在工作点的镇定控制.

参考文献

- 1 Abraham R A, Marsden J E. Foundations of Mechanics. 2nd ed., Benjamin / Cummings Pub. Com. Inc., 1978
- 2 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978
- 3 Kompaneec A C. Theoretical Physics. 2nd ed., Goctexuzdat, 1957, Ge G., Chinese Translation, Beijing: People's Education Pub., 1979
- 4 van der Schaft A. L_2 Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. New York: Springer-Verlag, 1996
- 5 Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer-Verlag, Inc., 1986
- 6 Cheng D, et al. On generalized Hamiltonian systems. Proc. of ICARCV'98, Singapore, 1998, 185-189
- 7 Qing X. On Open Complex Giant Systems Again. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1993, 4(1): 1-4
- 8 Cheng D. Hamiltonian control systems on poisson manifold. Proc. IEEE Hong Kong Symposium on Robotics and Control, Honh Kong, 1999, 279-284
- 9 Maschke B M J, Ortega R and van der Schaft A J. Energy-based Lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation. Proc. of CDC98, 1998, 3599-3604
- 10 Ortega R, Stanković A, Stefanov P. A passivation approach to power systems stabilization. IFAC Symp. Nonlinear Control Systems Design, Enschede, NL, July, 1998, 1-3
- 11 Escobar G, van der Schaft A J and Ortega R. A Hamiltonian viewpoint in the modeling of switching power converters. Automatica, 1999, (35): 445-452
- 12 Arnold V I, Givental A B. Symplectic geometry. Dynamical Systems IV., Encyclopedia in Mathematical Sciences, Arnold, V I, Novikov S P eds, New York: Springer-Verlag, 1990
- 13 Feng K, Wang D. Dynamical systems and geometric construction of algorithms. Computational Mathematics in China, Contemporary Mathematics, 163, Zhong-Ci Shi, Chung-Chun Yang, eds. 1994, 1-31
- 14 Sanz-Serna J M, Calvo M P. Numerical Hamiltonian Problems. Chapman & Hall, 1994
- 15 Wang D. Some aspects of Hamiltonian systems and symplectic algorithms. Physica D, 1994, (73): 1-16
- 16 Cheng D, Xi Z Y, Hong H and Qin H. Energy-Based Stabilization of Forced Hamiltonian Systems with Its Application to Power Systems. Proc. IFAC'99, Beijing, 1999, O: 297-302
- 17 Crouch P E, van der Schaft A J. Variational and Hamiltonian Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Science 101, Springer-Verlag, 1987
- 18 Slotine J E. Putting physics in control—the example of robotics. IEEE Control Systems Magazine, 1988, 8(6): 12-18