非完整控制系统的迭代指数镇定设计 *

霍 伟

(北京航空航天大学第七研究室 · 北京，100083)

摘要：本文提出了利用新的标准型迭代设计非完整幂式和链式系统指数镇定律的新方法，与已有的基于不变流型理论迭代设计幂式系统指数镇定律的方法相比，本文提出的方法无论在稳定性证明和控制器参数选择方面都更加简单.

关键词：非完整控制系统；镇定；迭代算法

Recursive Design of Exponential Stabilization Laws for Nonholonomic Systems

Huo Wei

(The Seventh Research Division, Beijing Univ. of Aero. and Astro. · Beijing, 100083, P. R. China)

Abstract: In this paper a recursive design method for exponential stabilizing nonholonomic systems in power form and chained form is presented based on a new canonical form. Comparing with existing recursive design method by the invariant manifold approach, the proposed method considerably simplifies the stability proof of closed-loop systems and the choose of controller parameters.

Key words: nonholonomic control systems; stabilization; recursive algorithm

1 引言

由于许多机械系统 (如车辆，轮式移动机器人，自由飘浮空间机器人等) 都受到非完整的 (不可积的) 速度约束，近年来受非完整约束控制系统 (简称非完整控制) 的研究受到广泛重视. 但因非完整控制系统不满足 Brockett 关于光滑镇定的必要条件，故不存在连续的状态反馈将其镇定到平衡点 [1]. 这使得非完整控制系统的反馈镇定问题成为控制理论及应用领域具有挑战性的研究课题之一.

设计非完整控制系统镇定律的有效方法之一是利用状态和输入变换将其化为两种等价的标准型—幂式系统或链式系统 [2,3], 利用这两种标准型的特殊结构形式，已设计出不少有效的反馈镇定控制律 (详见 [4] 及其参考文献).

最近， [5] 中提出了一种利用不变流形理论迭代设计幂式系统指数镇定律的方法，本文的目的是引入新的标准型进一步改进这种方法，使其完全不涉及不变流形理论，从而使闭环系统稳定性证明和控制器形式及其参数选择都更加简单.

2 广义非完整积分器

为用统一的方法设计幂式系统和链式系统的镇定律，先将它们化为同一标准型.

命题 1 幂式系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ \dot{x}_i = \dfrac{1}{(i-2)!} x_1^{i-2} u_2, \quad i = 3, \cdots, n. \end{cases} \tag{1}$$

可用状态变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_i = -(i-2)!(\dfrac{k_2}{i-2} + k_1)x_i + \dfrac{k_2}{i-2} x_1^{i-2} x_2, \\ \qquad k_1 > 0, \ k_2 > 0; \quad i = 3, \cdots, n. \end{cases} \tag{2}$$

化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u_1, \\ \dot{y}_2 = u_2, \\ \dot{y}_i = y_1^{i-3}(k_2 y_2 u_1 - k_1 y_1 u_2), \quad i = 3, \cdots, n. \end{cases} \tag{3}$$

* 国家自然科学基金 (69774009) 资助项目.

证 将变换 (3) 沿系统 (1) 求导得

$$
\begin{aligned}
\dot y_1 &= \dot x_1 = u_1,\\
\dot y_2 &= \dot x_2 = u_2,\\
\dot y_3 &= -(\frac{k_2}{i-2}+k_1)x_1^{i-2}u_2\\
&\quad+\frac{k_2}{i-2}x_1^{i-2}u_2+k_2x_1^{i-3}x_2u_1\\
&= y_1^{i-3}(k_2y_2u_1-k_1y_1u_2),\quad i=3,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

命题 2 链式系统

$$
\begin{cases}
\dot x_1 = u_1,\\
\dot x_2 = u_2,\\
\dot x_i = x_{i-1}u_1,\quad i=3,\cdots,n,
\end{cases}\tag{4}
$$

可用状态变换

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1,\\
y_2 = x_2,\\
y_i = [(i-3)!k_2+(i-2)!k_1]\sum\limits_{j=3}^{i}\dfrac{(-1)^{j-1}}{(i-j)!}x_1^{i-j}x_j\\
\qquad -k_1x_1^{i-2}x_2,\ k_1>0,k_2>0;\ i=3,\cdots,n
\end{cases}\tag{5}
$$

化为系统 (3).

证 将变换 (5) 沿系统 (4) 求导得

$$
\begin{aligned}
\dot y_1 &= \dot x_1 = u_1,\\
\dot y_2 &= \dot x_2 = u_2,\\
\dot y_3 &= [(i-3)!k_2+(i-2)!k_1]\{(-1)^{i-1}x_{i-1}u_1\\
&\quad+\sum_{j=3}^{i-1}[\frac{(-1)^{j-1}}{(i-j-1)!}x_1^{i-j-1}x_ju_1\\
&\quad+\frac{(-1)^{j-1}}{(i-j)!}x_1^{i-j}x_{j-1}u_1]\}\\
&\quad-(i-2)k_1x^{i-3}x_2u_1-k_1x_1^{i-2}u_2\\
&= [(i-3)!k_2+(i-2)!k_1]\{\frac{1}{(i-3)!}x_1^{i-3}x_2u_1\}\\
&\quad-(i-2)k_1x^{i-3}x_2u_1-k_1x_1^{i-2}u_2\\
&= y_1^{i-3}(k_2y_2u_1-k_1y_1u_2),\quad i=3,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

本文称标准型 (3) 为广义非完整积分器，因为当系统阶数 $n=3$ 且取 $k_1=k_2=1$ 时，系统 (3) 化为熟知的 Brockett 非完整积分器 [1].

3 广义非完整积分器的迭代降阶

若记 $y_j=y_{1,j},(j=1,\cdots,n)$, $u_1=u_{1,1},u_2=u_{1,2}$, 则系统 (3) 可表为

$$
\begin{cases}
\dot y_{1,1} = u_{1,1},\\
\dot y_{1,2} = u_{1,2},\\
\dot y_{1,j} = y_{1,1}^{j-3}(k_2y_{1,2}u_{1,1}-k_1y_{1,1}u_{1,2}),\ j=3,\cdots,n.
\end{cases}\tag{6}
$$

我们称其为第 1 代广义非完整积分器.

对第 1 代广义非完整积分器 (6) 中除第 2 个方程外的 $n-1$ 阶子系统

$$
\begin{cases}
\dot y_{1,1} = u_{1,1},\\
\dot y_{1,3} = k_2y_{1,2}u_{1,1}-k_1y_{1,1}u_{1,2},\\
\dot y_{1,j} = y_{1,1}^{j-3}(k_2y_{1,2}u_{1,1}-k_1y_{1,1}u_{1,2}),\ j=4,\cdots,n.
\end{cases}\tag{7}
$$

做状态和输入变换

$$
\begin{cases}
y_{2,1} = y_{1,1},\\
y_{2,2} = y_{1,3},\\
y_{2,j} = -(k_1+\dfrac{k_3}{j-2})y_{1,j+1}+\dfrac{k_3}{j-2}y_{1,1}^{j-2}y_{1,3},\\
\qquad\qquad j=3,\cdots,n-1,
\end{cases}\tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
u_{2,1} = u_{1,1},\\
u_{2,2} = k_2y_{1,2}u_{1,1}-k_1y_{1,1}u_{1,2}.
\end{cases}\tag{9}
$$

则此子系统化为

$$
\begin{cases}
\dot y_{2,1} = \dot y_{1,1} = u_{1,1} = u_{2,1},\\
\dot y_{2,2} = \dot y_{1,3} = k_2y_{1,2}u_{1,1}-k_1y_{1,1}u_{1,2} = u_{2,2},\\
\dot y_{2,j} = -(k_1+\dfrac{k_3}{j-2})y_{1,1}^{j-2}u_{2,2}+k_3y_{1,1}^{j-3}y_{1,3}u_{1,1}\\
\qquad +\dfrac{k_3}{j-2}y_{1,1}^{j-2}u_{2,2}\\
\qquad = y_{2,1}^{j-3}(k_3y_{2,2}u_{2,1}-k_1y_{2,1}u_{2,2}),j=3,\cdots,n-1.
\end{cases}\tag{10}
$$

系统 (10) 也具有广义非完整积分器 (6) 的形式，只是阶数降为 $n-1$, 我们称其为第 2 代广义非完整积分器. 显然，可用同样方法继续降阶. 一般地，设第 $i(1\le i\le n-3)$ 代广义非完整积分器为

$$
\begin{cases}
\dot y_{i,1} = u_{i,1},\\
\dot y_{i,2} = u_{i,2},\\
\dot y_{i,j} = y_{i,1}^{j-3}(k_{i+1}y_{i,2}u_{i,1}-k_1y_{i,1}u_{i,2}),\\
\qquad\qquad j=3,\cdots,n-i+1.
\end{cases}\tag{11}
$$

对其除第 2 个方程外的子系统做变换

$$
\begin{cases}
y_{i+1,1} = y_{i,1},\\
y_{i+1,2} = y_{i,3},\\
y_{i+1,j} = -(k_1+\dfrac{k_{i+2}}{j-2})y_{i,j+1}+\dfrac{k_{i+2}}{j-2}y_{i,1}^{j-2}y_{i,3},\\
\qquad\qquad j=3,\cdots,n-i,
\end{cases}\tag{12}
$$

$$
\begin{cases}
u_{i+1,1} = u_{i,1},\\
u_{i+1,2} = k_{i+1}y_{i,2}u_{i,1}-k_1y_{i,1}u_{i,2},
\end{cases}\tag{13}
$$

则可将它化为 $n-i$ 阶的第 $i+1$ 代广义非完整积分

器：

$$\begin{cases}\dot{y}_{i+1,1}=\dot{y}_{i,1}=u_{i,1}=u_{i+1,1},\\ \dot{y}_{i+1,2}=\dot{y}_{i,3}=k_{i+1}y_{i,2}u_{i,1}-k_1y_{i,1}u_{i,2}=u_{i+1,2},\\ \dot{y}_{i+1,j}=-(k_1+\dfrac{k_{i+2}}{j-2})y_{i+1,1}^{j-2}u_{i+1,2}\\ \qquad +k_{i+2}y_{i+1,1}^{j-3}y_{i+1,2}u_{i+1,1}+\dfrac{k_{i+2}}{j-2}y_{i+1,1}^{j-2}u_{i+1,2}\\ \qquad =y_{i+1,1}^{j-3}(k_{i+2}y_{i+1,2}u_{i+1,1}-k_1y_{i+1,1}u_{i+1,2}),\\ \qquad\qquad j=3,\cdots,n-i,\end{cases}\tag{14}$$

采用上述方法不断降阶，直至求出 3 阶的第 $n-2$ 代广义非完整积分器

$$\begin{cases}\dot{y}_{n-2,1}=u_{n-2,1},\\ \dot{y}_{n-2,2}=u_{n-2,2},\\ \dot{y}_{n-3,3}=k_{n-1}y_{n-2,2}u_{n-2,1}-k_1y_{n-2,1}u_{n-2,2}.\end{cases}\tag{15}$$

4 广义非完整积分器的迭代指数镇定设计

为证明本文结果，需要以下引理.

引理 1 研究一阶系统

$$\dot{x}=-\beta x+g(t),\quad \beta>0.$$

若 $g(t)$ 是以速率 α 指数收敛的 (即存在常数 g_0 使得 $|g(t)|\le g_0\mathrm{e}^{-\alpha t}(\forall t\in[0,\infty))$), 则当 $\alpha>\beta$ 时，$x(t)$ 是以速率 β 指数收敛的.

证　当 $\alpha>\beta$ 时

$$\begin{aligned}|x(t)|&\le[|x(0)|+g_0\textstyle\int_0^t\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)\tau}\mathrm{d}\tau]\mathrm{e}^{-\beta t}\\ &=[|x(0)|+\dfrac{g_0}{\alpha-\beta}(1-\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)t})]\mathrm{e}^{-\beta t}\\ &\le[|x(0)|+\dfrac{g_0}{\alpha-\beta}]\mathrm{e}^{-\beta t}.\end{aligned}$$

这表明 $x(t)$ 是以速率 β 指数收敛的.

引理 2 若在变换 (12) 和 (13) 中选取

$$k_1>0;\ k_2>0;\ k_i>k_{i-1}+k_1, i=3,\cdots,n,\tag{16}$$

且选取第 $n-2$ 代广义非完整积分器控制为

$$\begin{cases}u_{n-2,1}=-k_1y_{n-2,1},\\ u_{n-2,2}=-k_{n-1}y_{n-2,2}+\dfrac{k_ny_{n-1,2}}{k_1y_{n-2,1}},\end{cases}\tag{17}$$

式中 $y_{n-1,2}\triangleq y_{n-2,3}$; 则当 $y_{1,1}(0)\neq0$ 时，第 $i(1\le i\le n-2)$ 代广义非完整积分器的状态和输出满足：

1) 存在正数 $a_1,a_{i,j}(j=2,\cdots,n-i+1)$, 使得

$$\begin{cases}|y_{i,1}(t)|=a_1\mathrm{e}^{-k_1t},\\ |y_{i,2}(t)|\le a_{i,2}\mathrm{e}^{-k_{i+1}t},\\ |y_{i,j}(t)|\le a_{i,j}\mathrm{e}^{-[k_{i+2}+(j-3)k_1]t},\\ \qquad j=3,\cdots,n-i+1.\end{cases}\tag{18}$$

2) 控制

$$u_{i,2}=-\sum_{j=i}^{n-1}\frac{k_{j+1}y_{j,2}}{(-k_1y_{j,1})^{j-i}}\tag{19}$$

是有界的.

证　首先，很容易验证当 $k_i(i=1,\cdots,n)$ 满足 (16) 式时，求取各代广义非完整积分器的状态变换 (12) 均为同胚变换. 将控制 (17) 代入第 $n-2$ 代广义非完整积分器 (15) 得

$$\dot{y}_{n-2,1}=-k_1y_{n-2,1},\tag{20}$$

$$\dot{y}_{n-2,2}=-k_{n-1}y_{n-2,2}+\frac{k_ny_{n-1,2}}{k_1y_{n-2,1}},\tag{21}$$

$$\dot{y}_{n-2,3}=-k_ny_{n-2,3}.\tag{22}$$

由 (20) 式及 $y_{i,1}(i=n-2,\cdots,1)$ 的定义知：当 $y_{1,1}(0)\neq0$ 时，

$$\begin{aligned}&y_{n-2,1}(t)=y_{n-3,1}(t)=\cdots\\ &=y_{1,1}(t)=y_{1,1}(0)\mathrm{e}^{-k_1t}\neq0,\ \forall t\in[0,\infty).\end{aligned}\tag{23}$$

故可知求取各代非完整积分器的输入变换 (13) 也均为同胚变换，且只要令 $a_1=|y_{1,1}(0)|$ 即可证明 (18) 式中第一式对所有 $i\in\{1,\cdots,n-2\}$ 均成立. 以下用归纳法证明引理 2 中其余结论成立.

由 (22) 式知

$$y_{n-2,3}(t)=y_{n-2,3}(0)\mathrm{e}^{-k_nt},\tag{24}$$

$$|y_{n-2,3}(t)|\le|y_{n-2,3}(0)|\mathrm{e}^{-k_1t}\triangleq a_{n-2,3}\mathrm{e}^{-k_nt}.\tag{25}$$

将 (23) 及 (24) 代入 (21) 式得

$$\dot{y}_{n-2,2}=-k_{n-1}y_{n-2,2}+\frac{k_ny_{n-1,2}(0)}{k_1y_{n-2,1}(0)}\mathrm{e}^{-(k_n-k_1)t}.$$

考虑到 $k_n-k_1>k_{n-1}$, 故由引理 1 知存在常数 $a_{n-2,2}$ 使得

$$|y_{n-2,2}|\le a_{n-2,2}\mathrm{e}^{-k_{n-1}t}.\tag{26}$$

由 (23)~(25) 式及 $u_{n-2,2}$ 的表达式知

$$\begin{aligned}|u_{n-2,2}|&\le k_{n-1}a_{n-2,2}\mathrm{e}^{-k_{n-1}t}+\frac{k_na_{n-2,3}}{k_1a_1}\mathrm{e}^{-(k_n-k_1)t}\\ &\le k_{n-1}a_{n-2,2}+\frac{k_na_{n-2,3}}{k_1a_1}<\infty.\end{aligned}$$

(25) 、(26) 式及 (17) 式中 $u_{n-2,2}$ 的表达式和上式表明：当 $i=n-2$ 时，引理 2 的结论成立.

设 $i \ge m(1 < m \le n-2)$ 时结论成立，则当 $i = m-1$ 时由状态和输出变换的定义 (12) 和 (13) 知

$$\begin{aligned}|y_{m-1,j}| =& |\frac{k_{m+1}}{k_{m+1}+(j-3)k_1}y_{m-1,1}^{j-3}y_{m,2} \\ &-\frac{j-3}{k_{m+1}+(j-3)k_1}y_{m,j-1}| \\ \le& \frac{k_{m+1}a_1^{j-3}a_{m,2}}{k_{m+1}+(j-3)k_1}\mathrm{e}^{-[k_{m+1}+(j-3)k_1]t} \\ &+\frac{(j-3)a_{m,j-1}}{k_{m+1}+(j-3)k_1}\mathrm{e}^{-[k_{m+2}+(j-4)k_1]t} \\ \le& (\frac{k_{m+1}a_1^{j-3}a_{m,2}}{k_{m+1}+(j-3)k_1} \\ &+\frac{(j-3)a_{m,j-1}}{k_{m+1}+(j-3)k_1})\mathrm{e}^{-[k_{m+2}+(j-3)k_1]t} \\ \triangleq& a_{m-1,j}\mathrm{e}^{-[k_{m+2}+(j-3)k_1]t}, \\ & j=3,\cdots,n-m+2,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&u_{m-1,2} \\ =&\frac{1}{k_1y_{m-1,1}}[k_my_{m-1,2}u_{m-1,1}-u_{m,2}] \\ =&-k_my_{m-1,2}-\frac{1}{k_1y_{m,1}}\sum_{j=m}^{n-1}\frac{k_{j+1}y_{j,2}}{(-k_1y_{j,1})^{j-m}} \\ =&\sum_{j=m-1}^{n-1}\frac{k_{j+1}y_{j,2}}{(-k_1y_{j,1})^{j-(m-1)}}.\end{aligned} \tag{28}$$

将其代入第 $m-1$ 代广义非完整积分器第二式得

$$\dot y_{m-1,2} = u_{m-1,2} = -k_my_{m-1,2} + g_{m-1}(t).$$

式中

$$\begin{aligned}|g_{m-1}(t)| =& |\sum_{j=m}^{n-1}\frac{k_{j+1}y_{j,2}}{(-k_1y_{j,1})^{j-m+1}}| \\ \le& \sum_{j=m-1}^{n-2}\frac{k_{j+1}a_{j,2}}{(k_1a_1)^{j-m+1}}\mathrm{e}^{-[k_{j+1}-(j-m+1)k_1]t} \\ &+\frac{k_na_{n-2,3}}{(k_1a_1)^{n-m}}\mathrm{e}^{-[k_n-(n-m)k_1]t}.\end{aligned}$$

由 $k_i(i=3,\cdots,n)$ 的选取方法容易证明：

$$k_{j+1}-(j-m+1)k_1 > k_{m+1}-k_1,$$
$$k_n-(n-m)k_1 > k_{m+1}-k_1.$$

故

$$\begin{aligned}&|g_{m-1}(t)| \\ \le& [\sum_{j=m-1}^{n-2}\frac{k_{j+1}a_{j,2}}{(k_1a_1)^{j-m+1}}+\frac{k_na_{n-2,3}}{(k_1a_1)^{n-m}}]\mathrm{e}^{-(k_{m+1}-k_1)t} \\ \triangleq& b_{m-1}\mathrm{e}^{-(k_{m+1}-k_1)t}.\end{aligned}$$

因 $k_{m+1}-k_1 > k_m$, 故由引理 1 知存在 $a_{m-1,2}$ 使得

$$|y_{m-1,2}| \le a_{m-1,2}\mathrm{e}^{-k_mt}. \tag{29}$$

又将 (27) 和 (29) 式代入 (28) 式知：

$$\begin{aligned}|u_{m-1,2}| \le& \sum_{j=m-1}^{n-2}\frac{k_{j+1}a_{j,2}}{(k_1a_1)^{j-m+1}}\mathrm{e}^{-[k_{j+1}-(j-m+1)k_1]t} \\ &+\frac{k_na_{n-2,3}}{(k_1a_1)^{n-m}}\mathrm{e}^{-[k_n-(n-m)k_1]t} \\ \le& \sum_{j=m-1}^{n-2}\frac{k_{j+1}a_{j,2}}{(k_1a_1)^{j-m+1}}+\frac{k_na_{n-2,3}}{(k_1a_1)^{n-m}} < \infty.\end{aligned}$$

(27)~(29) 式和上式表明当 $i=m-1$ 时结论成立，故由归纳法知引理 2 成立.

在引理 2 中取 $i=1$, 立即可得以下命题：

命题 3 若第 1 代广义非完整系统 (6) 满足 $k_1>0, k_2>0, y_{1,1}(0)\ne 0$, 选取控制

$$\begin{cases}u_{1,1} = -k_1y_{1,1}, \\ u_{1,2} = -\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{k_{j+1}y_{j,2}}{(-k_1y_{j,1})^{j-1}}.\end{cases} \tag{30}$$

式中 $k_i > k_{i-1}+k_1(i=3,\cdots,n)$, $y_{j,2}(j=1,\cdots,n-2)$ 和 $y_{n-1,2}\triangleq y_{n-2,3}$ 由 (12) 式递推确定；则可使系统 (6) 的状态 $y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,i}(i=3,\cdots,n)$ 分别以速率 $k_1, k_2, k_3+(i-3)k_1$ 指数趋于零，且控制是有界的.

5 非完整幂式和链式系统的迭代指数镇定设计

利用幂式和链式系统与第 1 代广义非完整积分器的状态变换关系 (2) 和 (5), 很容易证明以下定理.

定理 1 若幂式系统 (1) 满足 $x_1(0)\ne 0$, 取控制

$$\begin{cases}u_{1,1} = -k_1x_1, \\ u_{1,2} = -\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{k_{j+1}y_{j,2}}{(-k_1x_1)^{j-1}}.\end{cases} \tag{31}$$

式中 $k_1>0, k_2>0, k_i>k_{i-1}+k_1$ $(i=3,\cdots,n)$, $y_{j,2}$ $(j=1,\cdots,n-2)$ 和 $y_{n-1,2}\triangleq y_{n-2,3}$ 由 (12) 和 (2) 式递推确定；则可使幂式系统 (1) 的状态 x_1, x_i $(i=2,\cdots,n)$ 分别以速率 k_1, $k_2+(i-2)k_1$ 指数镇定到零，且控制是有界的.

证　由命题 3 中控制的表达式 (30) 及 $y_{1,1}$ 的定义即可得控制 (31), 且可知它是有界的. 又由 $y_{1,i}$ $(i=1,\cdots,n)$ 与幂式系统的变换关系 (2) 及命题 3 的结果知 $x_1=y_{1,1}$ 和 $x_2=y_{1,2}$ 分别以速率 k_1 和 k_2 指数趋于零，且

$$\begin{aligned}&|x_i| \\ \le& \frac{1}{(i-3)![k_2+(i-2)k_1]}|\frac{k_2}{i-2}x_1^{i-2}x_2-y_{1,i}|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{(i-3)![k_2+(i-2)k_1]}\Big(\frac{k_2 a_1^{i-2}a_{1,2}}{i-2}\mathrm{e}^{-[k_2+(i-2)k_1]t}$$
$$+a_{1,i}\mathrm{e}^{-[k_3+(i-3)k_1]t}\Big)$$
$$\leq \frac{1}{(i-3)![k_2+(i-2)k_1]}\Big(\frac{k_2 a_1^{i-2}a_{1,2}}{i-2}$$
$$+a_{1,i})\mathrm{e}^{-[k_2+(i-2)k_1]t}, \quad i=3,\cdots,n,$$

故定理结论得证.

用类似方法还可证明以下结果.

定理 2 若链式系统 (4) 满足 $x_1(0)\neq 0$, 则用控制 (29)(其中 $k_1>0, k_2>0, k_i>k_{i-1}+k_1(i=3,\cdots,n)$, $y_{j,2}(j=1,\cdots,n-2)$ 和 $y_{n-1,2}\overset{\triangle}{=}y_{n-2,3}$ 由 (12) 和 (5) 式递推确定) 可使链式系统 (4) 的状态 $x_1, x_i\ (i=2,\cdots,n)$ 分别以速率 k_1, $k_2+(i-2)k_1$ 指数镇定到零, 且控制是有界的.

需要说明的是: 条件 $x_1(0)\neq 0$ 并非是一个苛刻的条件, 因为若 $x_1(0)=0$ 时, 总可用一常值控制 u_1 使系统在任意短时间内离开 $x_1(0)=0$[6].

6 仿真算例

一种三轮移动机器人的运动学模型可表为 [7]

$$\begin{cases}\dot{x}=v\cos\theta,\\ \dot{y}=v\sin\theta,\\ \dot{\theta}=\dfrac{v}{d}\tan\phi,\\ \dot{\phi}=\omega.\end{cases} \tag{32}$$

式中 (x,y) 为两后轮轴中点 M 的在 X-Y 平面上坐标, θ 为前轮相对 x 轴的方向角, ϕ 为前轮转向角, v 为 M 点线速度, ω 前轮转向角速度; d 为 M 点距前轮中心的距离. 文献 [7] 中已证明, 利用以下定义在 R^4 中子集

$$\varGamma=\{(x,y,\theta,\phi)|\theta\neq\pi/2(\mathrm{mod}\ \pi),\ \phi\neq\pi/2(\mathrm{mod}\ \pi)\}$$

上的状态和输入变换

$$\begin{cases}x_1=x,\\ x_2=\dfrac{\tan\phi}{d\cos^3\theta},\\ x_3=\tan\theta,\\ x_4=y,\end{cases} \tag{33a}$$

$$\begin{cases}v=\dfrac{u_1}{\cos\theta},\\ \omega=-\dfrac{3\sin^2\phi\tan\theta}{d\cos\theta}u_1+(d\cos^2\phi\cos^3\theta)u_2.\end{cases} \tag{33b}$$

可将系统 (32) 化为 4 阶链式系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u_1,\\ \dot{x}_2=u_2,\\ \dot{x}_3=x_2u_1,\\ \dot{x}_4=x_3u_1.\end{cases} \tag{34}$$

故可用定理 2 来设计其镇定律. 选取

$$k_1=1.8,\ k_2=2,\ k_3=4,\ k_4=6,$$

可满足定理要求, 再用 (12) 式递推地算出

$$y_{1,2}=x_2,\quad y_{2,2}=y_{1,3}=3x_3-x_1x_2,$$
$$y_{3,2}\overset{\triangle}{=}y_{2,3}=20x_4-8x_1x_3+x_1^2x_2.$$

从而按 (29) 式得出指数镇定律

$$\begin{cases}u_1=-1.8x_1,\\ u_2=-12x_2+40.4\dfrac{x_3}{x_1}-60.1\dfrac{x_4}{x_1^2}.\end{cases}$$

利用变换 (33), 可求出用原系统变量表达的控制律

$$\begin{cases}v=-\dfrac{1.8x}{\cos\theta},\\ \omega=\dfrac{5.4x\sin^2\phi\tan\theta}{d\cos\theta}-\cos^2\phi[12\tan\phi\\ \quad -\dfrac{d\cos^3\theta}{x}(40.4\tan\theta-\dfrac{60.1y}{x})].\end{cases}$$

设系统参数 d=1m, 初始条件 $[x(0),y(0),\theta(0),\phi(0)]^{\mathrm{T}}=[-2\mathrm{m},\ -2\mathrm{m},\ \pi/4\mathrm{rad},\ \pi/4\mathrm{rad}\ ]^{\mathrm{T}}$, 闭环系统响应和控制量仿真结果如图 1 和图 2 所示.

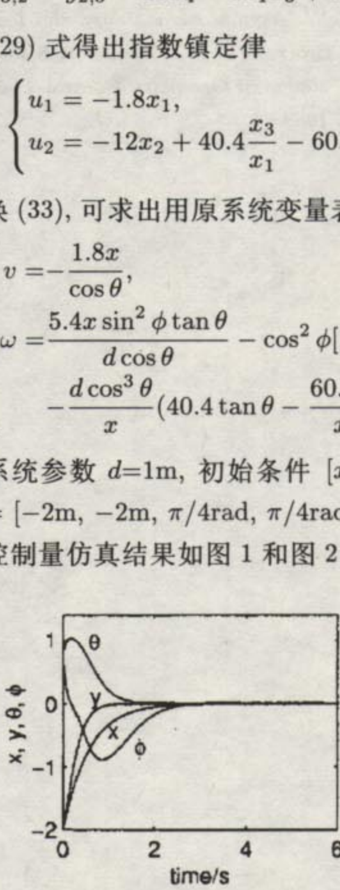

图 1 闭环系统响应

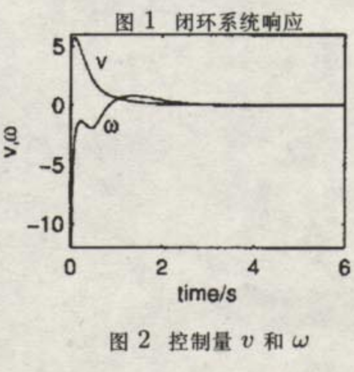

图 2 控制量 v 和 ω

7 结论

本文利用新的标准型 — 广义非完整积分器导

出了非完整幂式系统和链式系统指数镇定律的迭代设计方法，与最近文 [5] 中提出的基于不变流形理论迭代构造幂式系统指数镇定律的方法相比，本文方法不需构造不变流形，故稳定性证明大大简化，且所导出的控制器形式及其参数选取都更加简单．值得指出的是：本文只研究了 2 输入系统，但所得结果很容易推广到多输入的单生成元多链系统及与其等价的幂式系统．

参考文献

1 Brockett R W. Asymptotic stability and feedback stabilization. Brockett R W, Millman R S and Sussman H J eds. Differential Geometry Control Theory, Basel: Birkhauser, 1983

2 M'Closkey R T and Murray R M. Convergence rate for nonholonomic systems in power form. Proc. American Control Conf., Chicago, USA, 1992, 2489–2493

3 Murray R M and Sastry S S. Steering nonholonomic systems in chained forms. Proc. 30th Conf. on Decision and Control, Brighton, UK, 1991, 1121–1120

4 Kolmanovsky I and McClamroch N H. Development in nonholonomic control problems. IEEE Control System Magazine, 1995,15(6): 20–36

5 Luo J and Tsiotras P. Exponentally convergent control laws for nonholonomic systems in power form. Systems and Control Letters, 1998, 35(1): 87–95

6 Astolfi A. Exponential stabilization of a car-like vehicle. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Nagoya, Japan, 1995, 1391–1396

7 Murray R M and Sastry S S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38(5): 700–716