

文章编号: 1000-8152(2000)01-0014-05

14-18

# 模糊滑动模态控制系统的性质分析\*

李少远 席裕庚 TP13

(上海交通大学自动化研究所·上海, 200030)

**摘要:** 根据滑动模态原理, 将模糊控制系统的输入量简化为广义跟踪误差的一个超平面, 并基于三角形的非线性划分语言变量的隶属度, 分析了模糊控制系统的某些性质, 表明在系统稳定性、稳态误差等指标方面, 模糊控制器优于一般的 PID 控制器。

**关键词:** 模糊控制; 系统分析; 稳定性; 滑动模态控制

文献标识码: A

## Analysis of Fuzzy Sliding Mode Control Systems

LI Shaoyuan and XI Yugeng

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030, P. R. China)

**Abstract:** A methodology to reduce the input fuzzy sets with the hyperplane of generalized state error is discussed in this paper based on sliding mode control (SMC) theory, a method of varying nonlinear fuzzy sets range using some parameter is proposed, and some internal properties of fuzzy controller is analyzed to show that the fuzzy controller outperform the PID controller, such as the stability and steady-state error.

**Key words:** fuzzy control; system analysis; stability; sliding mode control

### 1 引言 (Introduction)

近年来, 模糊控制引起控制科学工作者的极大兴趣, 并成为智能控制的一个重要分支。模糊控制的优势在于它对于那些难以建立数学模型或根本不可能用解析模型描述的复杂工业过程具有很好的适应性和鲁棒性。许多应用结果表明了这一点<sup>[1]</sup>。在工业过程控制领域, 有 90% 左右的回路仍在应用 PID 控制策略, 近几年这一数字开始下降, 而模糊控制器在实际控制系统中的应用正在不断增加, 表明模糊控制这一领域具有良好的应用前景。传统控制器(经典的、现代的等)的设计均是依赖于被控对象数学模型的, 因而建模问题成为控制系统设计的“瓶颈”问题, 但是一旦有了被控对象的模型, 则控制器的设计、系统稳定性的分析、控制系统性能分析等均可根据这一模型得到。相反地, 模糊控制是基于人们控制规则的控制, 缺乏象控制理论那样一整套的有效的设计方法, 也不象基于模型的控制那样可以对系统的稳定性及控制系统的指标进行定量分析, 因而传统意义上的控制器(如 PID 控制)和模糊控制器的性质难以进行比较。模糊控制器设计的另外一个重要问题是, 随着控制规则的增加, 控制器的设计变得很复杂, 而建立系统的控制规则同建立系统的解析模型

同样是困难的。随着系统复杂性的增加, 控制规则的数目随输入变量呈指数函数增加, 成为困扰模糊控制器实现的一个难题。

根据滑动模态控制原理<sup>[2]</sup>, 本文将模糊控制器的输入量简化为一个广义跟踪误差的超平面, 使得模糊控制器的设计变得简单有效。在划分模糊语言变量时, 工程上为了在接近稳态时加入更“谨慎”的控制量, 往往在“零”误差附近取更多的语言变量, 越远离“零”状态, 语言变量的分布越宽, 称为非线性划分语言变量, 本文提出一种可参数化的划分方法, 并基于这种划分得到模糊控制器, 针对二阶振荡系统的被控对象, 分析了模糊控制器的稳定性、上升时间及稳态误差等方面的性质, 结果表明优于一般 PID 控制器。

### 2 模糊控制器的设计 (The design of fuzzy controller)

#### 2.1 问题描述 (Problem description)

考虑动态非线性系统具有如下的描述:

$$\dot{x}^{(n)}(t) = f(X, t) + u(t). \quad (2.1)$$

其中,  $u(t)$  是控制量,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  是状态向量,  $f(X, t)$  是有界的未知

函数, 一般来说是状态和时间的非线性函数, 设  $f(X, t)$  有一定的参考轨迹, 其不确定性为  $\Delta f(X, t)$ , 则:

$$f(X, t) = \hat{f}(X, t) + \Delta f(X, t). \quad (2.2)$$

并且不确定性有一确定的界:

$$|\Delta f(X, t)| \leq F(X, t). \quad (2.3)$$

控制的目标是设计控制信号  $u(t)$ , 使系统状态跟踪设定的向量  $X_d(t) = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$ , 在系统存在不确定性  $\Delta f(X, t)$  的条件下, 保持系统稳定并具有很好的跟踪性能. Slotine J. 在文献[5]中指出, 一大类非线性系统可以归纳为这种形式, 并定义广义误差向量:

$$e = X - X_d. \quad (2.4)$$

跟踪误差的滑动模态定义为:

$$s(X, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e = e^{(n-1)} + \lambda_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \lambda_1 e, \quad (2.5)$$

其中的系数是 Hurwitz 多项式的系数.  $s(X, t) = 0$  定义了跟踪误差为零的一个超平面, 称为零状态

引理 1<sup>[6]</sup> 对于 2 阶的非线性系统:

$$\ddot{x}(X, t) = f(X, t) + u(t). \quad (2.6)$$

如果控制信号取为:

$$u = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - K(X, t) \operatorname{sgn}(s), \quad (2.7)$$

则满足滑模稳定性条件  $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$ .

注 1 (2.7) 式可写成  $u = u_c + u_s$ , 其中  $u_c = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e}$ ,  $u_s = -K(X, t) \operatorname{sgn}(s)$ .  $u_c$  是控制信号的基本部分,  $\hat{f}$  是被控对象动态的一个平均估计, 其物理意义可理解是工业过程所处的工况.  $-\lambda \dot{e}$  这一项反映了系统误差的变化, 即系统动态的变化. 另外, 由于模型失配和未建模动态的存在, 加入了  $u_s = -K(X, t) \operatorname{sgn}(s)$ , 称为监督控制. 而  $K(X, t) \geq F(X, t)$ , 其最大值记为  $K_m(X, t)$ .

注 2 注意到  $u_s$  这一项是不连续的, 相当于一个开关信号, 虽然  $u_s$  代表了系统由于未建模动态对系统误差造成的影响, 当系统偏离  $s = 0$  时, 加入  $u_s$  可以使系统趋向于  $s = 0$ , 但由于  $K(X, t)$  的大小没有直接反映误差的大小, 在控制信号中相当于加入了“Bang-Bang”控制, 因而常常造成系统“颤动(chattering)”.

## 2.2 模糊控制器的设计 (The design of fuzzy controller)

首先给出一种非线性划分模糊语言变量区间的参数化方法.

设有一模糊变量  $A$ , 首先将其论域通过比例因

子变换到  $[-1, 1]$  区间上, 在该论域上分成  $N = 2n + 1$  个语言变量  $A_i (i = [-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n])$ , 取三角形隶属度函数, 则第  $i$  个语言变量的中心点为:

$$a_i = \frac{i}{n} r^{n-|i|}. \quad (2.8)$$

其中,  $r \in [0, 1]$ , 当  $r = 1$  时, 即为线性划分, 其隶属度函数的形状如图 1 所示.

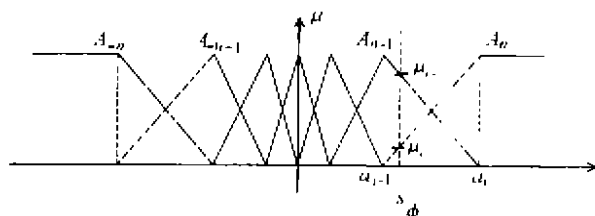
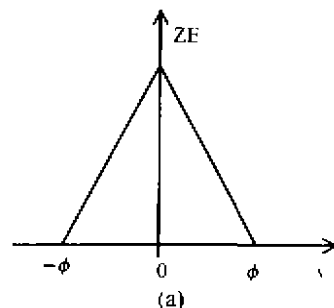
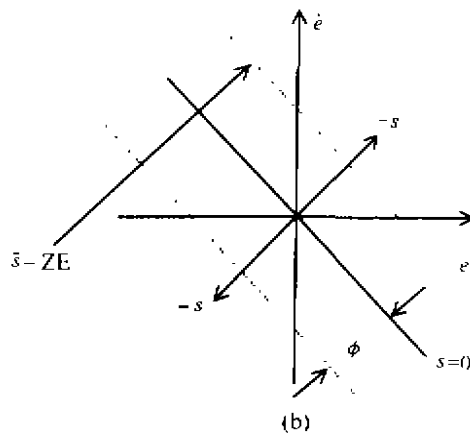


图 1 非线性划分模糊区间

Fig. 1 Varying nonlinear fuzzy sets range



(a)



(b)

图 2 模糊滑动模态

Fig. 2 Fuzzy sliding mode

式(2.5)定义的滑动模态  $s(X, t) = 0$  是一个非模糊化的超平面, 我们可以将它扩展到模糊超平面, 即:  $\tilde{s} = \text{ZERO}$ , 是在  $s = 0$  附近的一个模糊带, 如图 2 所示, 对应的模糊集合为“ZERO”, 其中  $\phi$  为“ZE”模糊集合的半宽度. 根据模糊滑动模态的定义(图 1), 定义  $\phi$  为滑动模态的厚度,  $s(X, t) \neq 0$  表示系统动态脱离稳定模态的程度, 我们定义  $\frac{s}{\phi}$  为一模糊集合, 则  $u_s$  可写成:

$$u_s = -K_m(X, t) \operatorname{sgn}\left(\frac{s}{\phi}\right). \quad (2.9)$$

当  $\left|\frac{s}{\phi}\right| \geq 1$  时,表示系统超过滑模的厚度,相应地加大控制信号,使系统尽快达到  $\dot{s} = ZE$ ; 当  $\left|\frac{s}{\phi}\right| < 1$  时,系统的运动轨迹没有超过滑模的厚度,这时为了使系统达到  $s = 0$ , 仍需加入  $u_s$ , 但这时的控制信号不应太强,以防止系统出现超调. 为此,在  $\left|\frac{s}{\phi}\right| < 1$  范围内,用模糊逻辑推理得到相应的控制量. 不失一般性,为叙述问题方便,取有限的具体语言变量.

$\frac{s}{\phi}$  的论域为  $[-1, 1]$ ,  $u_s$  的论域为  $[-K_m, K_m]$ . 则在各自的论域上按上述提出的非线性划分语言变量的方法分为不同的语言变量, 设:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{s}{\phi}\right) &= \{NB, NM, ZE, PM, PB\} = \\ & \quad \{\bar{F}_s^1, \bar{F}_s^2, \dots, \bar{F}_s^5\}, \\ L(\hat{u}) &= \{NB, NM, ZE, PM, PB\} = \\ & \quad \{\bar{F}_u^1, \bar{F}_u^2, \dots, \bar{F}_u^5\}. \end{aligned}$$

控制规则为:

- $R^1$ : if  $s$  is NB then  $u_s$  is PB,
- $R^2$ : if  $s$  is NM then  $u_s$  is PM,
- $R^3$ : if  $s$  is ZE then  $u_s$  is ZE,
- $R^4$ : if  $s$  is PM then  $u_s$  is NM,
- $R^5$ : if  $s$  is PB then  $u_s$  is NB.

对上述关系按 Mamdani 推理方法进行推理即可得到相应的控制信号.

第  $i$  条规则得到的模糊关系为:

$$\bar{R}_i = \bar{F}_s^i \times \bar{F}_u^{i-1}, \text{ 即: } \bar{R}_i(s, u_s) = \bar{F}_s^i \wedge \bar{F}_u^{i-1}. \quad (2.10)$$

其中,  $\times$  表示笛卡尔积,  $\wedge$  表示  $\min$  运算, 则总的模糊规则所对应的模糊关系为:

$$\bar{R} = \bigcup_{i=1}^5 \bar{R}_i, \text{ 即: } \bar{R}(s, u_s) = \bigvee_{i=1}^5 [\bar{F}_s^i(s) \wedge \bar{F}_u^{i-1}(u_s)] \quad (2.11)$$

其中,  $\bigvee$  表示  $\max$  运算, 采用  $\max$ - $\min$  推理合成规则,  $u_s$  的隶属度函数为:

$$\mu(\hat{u}_s) = \bigvee_{i=1}^5 [\bar{F}_s^i(s) \wedge \bar{F}_u^{i-1}(u_s)]. \quad (2.12)$$

采用重心法进行模糊判决, 有:

$$u_s = \left( \int_{-K_m}^{K_m} u_s \cdot \mu(\hat{u}_s) du_s \right) / \left( \int_{-K_m}^{K_m} \mu(\hat{u}_s) du_s \right). \quad (2.13)$$

这样,按(2.13)模糊推理得到的  $u_s$ , 当  $\left|\frac{s}{\phi}\right| < 1$  时,得到的控制信号是连续的,且其大小和  $\frac{s}{\phi}$  的大小通过模糊推理得到,避免了以往非线性滑模控制中控制信号的不连续造成系统“颤动”问题,并将模糊控制器的输入由系统的广义误差组合成一个超平面,减少了输入模糊变量的个数,简化了控制器的设计. 模糊控制系统的结构图如图 3 所示.

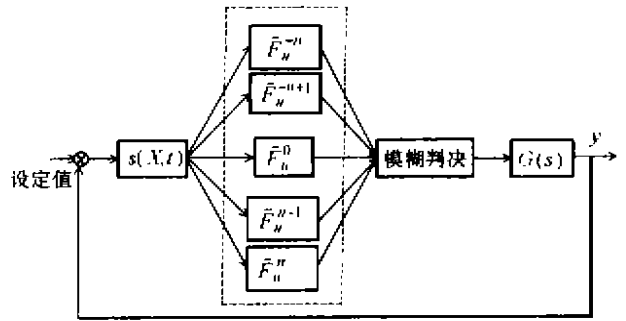


图 3 模糊控制系统结构图

Fig 3 Fuzzy control system structure

### 3 模糊控制器的性质分析 (Analysis of fuzzy controller)

#### 3.1 控制器的形式表达 (The form of controller)

在上述划分模糊集合的条件下,隶属度函数的计算如下(如图 1 所示):

$$\mu_{i-1} = \frac{\alpha_i - s}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}, \mu_i = \frac{s - \alpha_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}, \quad (3.1)$$

且有  $\mu_{i-1} + \mu_i = 1$ , 控制规则形式为:

$$\text{if } s(X, t) \text{ is } A_i \text{ then } u = P_i, s \in [-1, 1].$$

根据以上讨论,在某一时刻,只有两条规则(与  $A_{i-1}$  和  $A_i$  有关)被激活,因而,(2.13)式变为:

$$\begin{aligned} u &= P_{i-1}\mu_{i-1} + P_i\mu_i = \\ & [P_{i-1} + \alpha_{i-1}(P_{i-1} - P_i)/\Delta_i] + (P_i - P_{i-1})s/\Delta_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中,  $\Delta_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ , 表示两相邻模糊集合中心值的距离.

进一步地将(3.2)式写成:

$$\begin{cases} u = \alpha_i + \beta_i s, \\ \alpha_i = P_{i-1} + \alpha_{i-1}(P_{i-1} - P_i)/\Delta_i, \\ \beta_i = (P_i - P_{i-1})/\Delta_i. \end{cases} \quad (3.3)$$

而对于 2 阶系统  $s = e + \lambda \Delta e$ , 则

$$u = \alpha_i + \beta_i(e + \lambda \Delta e). \quad (3.4)$$

则由图 3, 可写出系统的传递函数关系为:

$$Y_i(s) = \frac{\alpha_i(s)G(s) + \beta_i(s)G(s)R(s)}{1 + \beta_i(s)G(s) + \lambda s\beta_i(s)G(s)} \quad (3.5)$$

### 3.2 系统分析(System analysis)

设被控对象为二阶振荡环节, 即:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (3.6)$$

衰减率为  $\zeta$ , 自然振荡频率为  $\omega_n$ .

则在模糊控制器(3.4)作用下, 系统的输入输出关系为:

$$Y_i(s) = \frac{\omega_n^2\alpha_i(s) + \beta_i(s)\omega_n^2R(s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i(s)\omega_n^2)s + \beta_i(s)\omega_n^2} \quad (3.7)$$

则系统的衰减率和振荡频率变为:

$$\begin{cases} \omega_i = \sqrt{\beta_i}\omega_n, \\ \zeta_i = (2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i\omega_n^2)/2\omega_i = (2\zeta + \lambda\beta_i\omega_n)/2\sqrt{\beta_i}. \end{cases} \quad (3.8)$$

#### 1) 稳态误差.

文献[4]指出, 基于偏差和偏差变化率两维输入的模糊控制器是在不同区间上的 PD 控制器, 而一般的 PD 控制器不能消除稳态误差, 下面分析如何选择控制参数消除系统的稳态误差.

系统误差为:

$$\begin{aligned} E_i(s) &= R(s) - Y_i(s) = \\ &= \frac{[s^2 + (2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i(s)\omega_n^2)s]R(s) - \omega_n^2\alpha_i(s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i(s)\omega_n^2)s + \beta_i(s)\omega_n^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

在阶跃输入信号作用下:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE_i(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s[s^2 + (2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i(s)\omega_n^2)s] \frac{1}{s} - s\omega_n^2 \frac{\alpha_i}{s}}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i(s)\omega_n^2)s + \beta_i(s)\omega_n^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

要使  $e_{ss} = 0$ , 在(3.10)式中则要使  $\alpha_i \rightarrow 0$ , 而  $\alpha_i = P_{i-1} + a_{i-1}(P_{i-1} - P_i)/\Delta_i$ , 即模糊规则中, if  $s(X, t)$  is  $A_0$  then  $u = P_0 = 0$ .

在速度输入信号作用下:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE_i(s) = \\ &= \frac{2\zeta + \lambda\beta_i\omega_n}{\beta_i\omega_n} = 0 \Rightarrow \alpha_i = \frac{\lambda(P_i - P_{i-1})}{2\zeta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

由此可以得到隶属度函数划分与控制规则参数之间的定量关系.

#### 2) 稳定性.

根据(3.7)式, 由 Routh-Hurwitz 稳定判据, 有:

$$\begin{aligned} s^2: & \quad 1 \quad \beta_i\omega_n^2 \\ s^1: & \quad 2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i\omega_n^2 \quad 0 \\ s^0: & \quad \beta_i\omega_n^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

由此得到:

$$\beta_i\omega_n^2 > 0, \quad 2\zeta\omega_n + \lambda\beta_i\omega_n^2 > 0; \quad (3.13)$$

即:

$$P_i > P_{i-1}, \quad \lambda > \frac{-2\zeta}{\beta_i\omega_n} \quad (3.14)$$

这与人们的控制经验是一致的, 这里给出了定量关系.

## 4 结论(Conclusion)

本文对模糊控制器的性质进行了分析, 得到如下主要结果:

1) 基于滑动模态控制原理, 将模糊控制系统的输入量简化为广义跟踪误差的一个超平面, 简化了控制器的设计, 对于多输入语言变量的系统, 控制规则数随输入变量个数呈线性增加, 并给出了设计参数与系统稳定性和稳态误差之间的定量关系;

2) 给出了一种符合工程上应用的非线性划分模糊语言变量隶属度区间的参数化方法;

3) 给出了模糊控制器与系统输入变量隶属度函数划分之间的参数定量关系(3.4)式;

4) 对于模糊控制器的内部机理和某些性质进行了分析, 得到了一些定量关系, 表明模糊控制器在稳定性和稳态误差等指标上与一般 PD 控制的不同点, 并可根据这些定量关系调整参数.

5) 可利用得到的这些定量关系进一步分析模糊控制器的机理和性质.

6) 关于模糊滑动模态控制系统的性质分析还有许多工作要做, 本文只是一个尝试, 提出了分析这类系统的一条思路, 做了初步的工作, 与其它滑动模态控制的比较以及系统的动态特性还需要做进一步的研究.

## 参考文献(References)

- [1] Lee C.C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller-Part I & II [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1990, 20(2): 404-435
- [2] Ying H. A nonlinear fuzzy controller with linear control rules is the sum of a global two-dimensional multilevel relay and a local nonlinear proportional-integral controller [J]. Automatica, 1993, 29(2): 499-

505

- [3] Ying H, et al. Fuzzy control theory; the nonlinear case[J]. *Automatica*, 1990, 26(2): 513 - 520
- [4] Ju M S, et al. Design of adaptive fuzzy controls based on natural control laws[J]. *Fuzzy Sets and System*, 1996, 81(2): 191 - 204
- [5] Slotine J E, et al. Adaptive sliding controller synthesis for nonlinear systems[J]. *Int. J. Control*, 1986, 43(6): 1631 - 1651
- [6] Wu J C, et al. A sliding-model approach to fuzzy control design[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 1996, 4(2): 141 - 151
- [7] 陈怡欣, 陈永义, 模糊控制器动态性能的改善[J]. *模糊系统与数学*, 1996, 10(3): 76 - 81
- [8] 孙庆, 自适应模糊控制的研究与应用[博士学位论文][D]. 北

京;北京控制工程研究所, 1997

### 本文作者简介

**李少远** 1965年生, 1987年毕业于河北工业大学自动化系, 1992年3月在该校获得硕士学位, 1997年7月在南开大学计算机与系统科学系获得博士学位. 现在上海交通大学自动化所做博士后研究工作. 研究领域为预测控制, 模糊控制, 自适应控制理论与应用.

**席裕庚** 1946年生, 1968年毕业于哈尔滨军事工程学院, 1984年在德国慕尼黑工业大学获得博士学位. 现为上海交通大学自动控制系教授, 博士生导师. 主要从事复杂系统控制理论及智能机器人的研究.

(上接第13页)

### 本文作者简介

**吴悦** 1967年生, 1989年毕业于大连理工大学应用数学专业, 获理学学士学位, 1994年考入东北大学自动控制系攻读硕士学位, 因学习成绩优秀于1996年获提前攻读博士学位资格, 1998年毕业于东北大学控制理论与控制工程专业, 获工学博士学位. 现为香港城市大学高级副研究员. 研究领域为生产调度, 智能化优化方法, 模

糊优化理论及应用, 计算机集成制造等, 在国内外重要期刊发表论文10余篇

**汪定伟** 1948年生, 1982年毕业于东北大学自动控制系, 1993年获工学博士学位, 1994年在美国北卡罗纳州大学作博士后工作. 现为东北大学系统工程系教授, 博士生导师. 研究领域为CIMS生产存储管理的建模, 优化与控制, 模糊优化理论及应用, 智能化优化方法等. 在国内外重要期刊上发表论文100余篇, 出版专著2部, 译著2部