

文章编号: 1000-8152(2000)01-0019-04

19-22

非线性随机时滞系统的稳定性与应用*

沈轶 廖晓昕 许晓东 李国宽 TP13
(华中理工大学自动控制工程系·武汉, 430074)

摘要: 首先考虑了不确定性的一族非线性随机时滞系统, 建立了这种系统的均方指数稳定与几乎必然指数稳定的充分准则, 其准则是时滞无关的; 然后应用这些充分条件到一类不确定的随机时滞神经网络, 得到了这种神经网络指数稳定的实用判据. 本文的结果是最近文献中某些结果的推广. 最后一个数值例子说明所给准则的有效性.

关键词: 非线性随机时滞系统; 指数稳定性; 随机时滞神经网络

文献标识码: A

The Stability of Nonlinear Stochastic Delay Systems with Its Applications

SHEN Yi, LIAO Xiaoxin, XU Xiaodong and LI Guokuan

(Department of Automatic Control Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, P. R. China)

Abstract: In the first part of this paper we consider a family of nonlinear stochastic delay systems with uncertainties. For such systems, we establish sufficient criteria for the exponential stability in mean square and the almost sure exponential stability. These criteria are independent of delay. In the second part, we apply these sufficient conditions to a class of stochastic delay neural networks with uncertainties and obtain practical criteria to test exponential stability of these stochastic delay neural networks. Our results are generalizations of some recent ones reported in the literature. In final, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the obtained criteria.

Key words: nonlinear stochastic delay system; exponential stability; stochastic delay neural network

1 引言 (Introduction)

考虑非线性随机时滞系统

$$dx(t) = [g(t, x(t)) + h(t - \tau, x(t - \tau))]dt + f(t, x(t), x(t - \tau))dw(t). \quad (1)$$

这里 $g, h \in C^1[+ \infty, + \infty, \mathbb{R}^n]$, $f: + \infty, + \infty, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是局部 Lipschitz 连续的且满足线性增长条件^[1], $\tau > 0$ 表示时滞, $f(t, x(t), x(t - \tau))dw(t)$ 表示随机扰动, w 是定义在完备的概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上具有自然流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的 m 维标准 Brown 运动. 系统(1)的一种重要的特殊情形是随机时滞神经网络

$$dx(t) = [-Ax(t) + B\sigma(x(t - \tau))]dt + f(t, x(t), x(t - \tau))dw(t). \quad (2)$$

其中 $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $a_i > 0, 1 \leq i \leq n$, $B = (b_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma(x) = (\sigma_1(x_1), \dots, \sigma_n(x_n))^T$, 且 $\forall 1 \leq i \leq n; \sigma_i(0) = 0, \sigma_i(x_i)$ 单调不减, f 的意义与系统(1)相同, 最近文献[2,3]已对系统(2)这种随机时滞神经网络的稳定性进行了研究. 此外系统(1)

的另一种重要的特殊形式是线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau). \quad (3)$$

这里 A, B 为常数矩阵. 近年来人们对系统(3)的稳定性已进行了广泛而深入的研究^[4]. 本文的目的是研究一般的非线性随机时滞系统(1)的稳定性, 为此设 $\forall t \in +$:

$$g(t, 0) = 0, h(t, 0) = 0, f(t, 0, 0) = 0. \quad (4)$$

即 $x = 0$ 为系统(1)的平衡点, 此时系统(1)能等价地表示为

$$dx(t) = [A(t, x(t))x(t) + B(t - \tau, x(t - \tau))x(t - \tau)]dt + f(t, x(t), x(t - \tau))dw(t). \quad (5)$$

其中 $A(t, x(t)) = [a_{ij}(t, x(t))]_{n \times n}$, $B(t, x(t)) = [b_{ij}(t, x(t))]_{n \times n}$, 且 $a_{ij}(t, x), b_{ij}(t, x) \in C[+ \infty, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $1 \leq i, j \leq n$, 这里 A, B 的选择不是唯一的. 由于建模时参数的不精确及测量误差等因素的影响, 系统(5)中的 A, B 往往具有不确定性, 本文设系统(5)中不确定性与随机扰动满足条件(H):

* 基金项目: 国家自然科学基金(69674008), 高校博士点专项基金(97048722)资助项目.

收稿日期: 1998-1-13; 收修稿日期: 1998-11-27.

$$\begin{aligned}
 \text{(H)} \quad & \forall (t, x) \in {}^+x^n, (t, x, y) \in {}^+x^n \times {}^+y^n; \\
 & a_y^m \leq a_y(t, x) \leq a_y^M, \\
 & b_y^m \leq b_y(t, x) \leq b_y^M, \\
 & \text{tr}f^T(t, x, y)f(t, x, y) \leq \\
 & \alpha_1 \|x\|^2 + \alpha_2 \|y\|^2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $a_y^m, a_y^M, b_y^m, b_y^M (1 \leq i, j \leq n)$ 为常数, α_1 与 α_2 为非负常数, 值得注意的是满足条件(H)的 $A(t, x)$ 与 $B(t, x)$ 可以是非线性函数.

本文设系统(5)有初始条件 $x(s) = \zeta(s), -\tau \leq s \leq 0, \zeta \in L^2 \mathcal{F}_0([- \tau, 0]; {}^n)$, 而 $L^2 \mathcal{F}_0([- \tau, 0]; {}^n)$ 是 n 值的随机过程 $\zeta(s), -\tau \leq s \leq 0$, 并使 $\zeta(s), -\tau \leq s \leq 0$ 是 \mathcal{F}_0 可测, $\int_{-\tau}^0 E \|\zeta(s)\|^2 ds < \infty$ (E 表示期望), 由文献[1]知, 对任意满足条件(H)的 $A(t, x), B(t, x)$ 与 $f(t, x, y)$, 系统(5)有唯一解, 记为 $x(t; \zeta)$, 简记为 $x(t)$, 且 $\forall t > 0, x(t)$ 满足 $\int_0^t E \|x(s)\|^2 ds < \infty$. 本文的目的是研究对任意满足条件(H)的 $A(t, x), B(t, x)$ 与 $f(t, x, y)$, 系统(5)的均方指数稳定性与几乎必然指数稳定性^[1], 建立了不确定性随机时滞系统(5)指数稳定的时滞无关的判据, 并给出了所得结果在随机时滞神经网络中的应用. 本文的结果涵盖并推广了现有文献^[4-8]中许多已知的结果, 并且就我们所知, 关于不确定性随机时滞神经网络的稳定性的讨论在文献中还很少见到.

2 主要结果(Main results)

在叙述主要结果之前, 首先介绍下面需用的记号, 令 I_1, I_2, I_3 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的三个子集, $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ 为其补集, 定义 $A_{I_1 I_2} = [a_{ij}^{I_1 I_2}]_{n \times n}, B_{I_1 I_3} = [b_{ij}^{I_1 I_3}]_{n \times n}$, 其中

$$a_{ij}^{I_1 I_2} = \begin{cases} a_{ij}^M, & (i, j) \in (I_1 \times I_2) \cup (\bar{I}_1 \times \bar{I}_2) \triangleq I_1 I_2, \\ a_{ij}^m, & (i, j) \in (I_1 \times \bar{I}_2) \cup (\bar{I}_1 \times I_2) \triangleq \bar{I}_1 \bar{I}_2, \end{cases} \tag{8}$$

$$b_{ij}^{I_1 I_3} = \begin{cases} b_{ij}^M, & (i, j) \in (I_1 \times I_3) \cup (\bar{I}_1 \times \bar{I}_3) \triangleq I_1 I_3, \\ b_{ij}^m, & (i, j) \in (I_1 \times \bar{I}_3) \cup (\bar{I}_1 \times I_3) \triangleq \bar{I}_1 \bar{I}_3. \end{cases} \tag{9}$$

定理 1 若存在正定阵 G , 正对角阵 $Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 使

$$\lambda + \|G\|(\alpha_1 + \alpha_2) < 0. \tag{10}$$

其中

$$\lambda = \max\{\lambda_{\max}[A_{I_1 I_2}^T G + GA_{I_1 I_2} + Q +$$

$$GB_{I_1 I_3} Q^{-1} B_{I_1 I_3}^T G^{-1}; I_1, I_2, I_3 \text{ 是}$$

$$\{1, 2, \dots, n\} \text{ 的三独立子集}\}, \tag{11}$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$ 记矩阵最大特征值, $\|\cdot\|$ 记 2-范数, 则不确定性随机时滞系统(5)均方指数稳定, 也几乎必然指数稳定.

证 作 Lyapunov 泛函

$$\begin{aligned}
 V(x_t) = & x^T(t) G x(t) + \\
 & \int_{-\tau}^0 x_t^T(\theta) Q x_t(\theta) d\theta,
 \end{aligned} \tag{12}$$

则由 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned}
 \dot{V} = & 2x^T(t) G [A(t, x(t))x(t) + \\
 & B(t - \tau, x(t - \tau))x(t - \tau)] + \\
 & \text{tr}f^T(t, x(t), x(t - \tau))Gf(t, x(t), x(t - \tau)) + \\
 & x^T(t) Q x(t) - x^T(t - \tau) Q x(t - \tau).
 \end{aligned} \tag{13}$$

因

$$\begin{aligned}
 2x^T(t) G B(t - \tau, x(t - \tau))x(t - \tau) - \\
 x^T(t - \tau) Q x(t - \tau) \leq \\
 x^T(t) G B(t - \tau, x(t - \tau)) Q^{-1} \cdot \\
 B^T(t - \tau, x(t - \tau)) G x(t),
 \end{aligned} \tag{14}$$

令 $y(t) = Gx(t), I_1 = \{i \in \{1, \dots, n\}; y_i(t) \geq 0\}$, $I_2 = \{j \in \{1, \dots, n\}; x_j(t) \geq 0\}$, 则

$$\begin{aligned}
 x^T(t) G A(t, x(t))x(t) \leq \\
 \sum_{(i,j) \in I_1 I_2} y_i(t) a_{ij}^M x_j(t) + \sum_{(i,j) \notin I_1 I_2} y_i(t) a_{ij}^m x_j(t) = \\
 x^T(t) G A_{I_1 I_2} x(t).
 \end{aligned} \tag{15}$$

令 $z = B^T(t - \tau, x(t - \tau)) G x(t) = B^T(t - \tau, x(t - \tau)) y(t)$, 则 $\forall 1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
 z_i = & \sum_{j=1}^n b_{ji}(t - \tau, x(t - \tau)) y_j = \\
 & \sum_{j \in I_1} b_{ji}(t - \tau, x(t - \tau)) y_j + \\
 & \sum_{j \in I_2} b_{ji}(t - \tau, x(t - \tau)) y_j.
 \end{aligned}$$

显然 $\forall 1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
 z_i \leq & \sum_{j \in I_1} b_{ji}^M y_j + \sum_{j \in I_2} b_{ji}^m y_j \triangleq u_i, \\
 z_i \geq & \sum_{j \in I_1} b_{ji}^m y_j + \sum_{j \in I_2} b_{ji}^M y_j \triangleq v_i, \\
 z_i^2 \leq & \max\{u_i^2, v_i^2\}.
 \end{aligned}$$

令 $I_3 = \{i \in \{1, \dots, n\}; v_i^2 \leq u_i^2\}$, 则

$$\begin{aligned}
 x^T(t) G B(t - \tau, x(t - \tau) \\
 \tau) Q^{-1} B^T(t - \tau, x(t - \tau)) G x(t) =
 \end{aligned}$$

$$x^T(t)GB_{I_1I_3}Q^{-1}B_{I_1I_3}^T Gx(t). \quad (16)$$

将式(14),(15),(16)代入式(13),并应用式(7)与式(11),有

$$\begin{aligned} \leq V \leq & (\lambda + \|G\| \alpha_1) \|x(t)\|^2 + \\ & \|G\| \alpha_2 \|x(t-\tau)\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

由已知条件式(10),可推出存在唯一的 $\epsilon > 0$:

$$\lambda + \|G\|(\alpha_1 + \epsilon) + \|G\|\alpha_2 e^{\epsilon\tau} + \epsilon\tau e^{\epsilon\tau} \|Q\| = 0, \quad (18)$$

而 $\forall t \geq 0$ 时,有

$$\begin{aligned} Ee^{\epsilon t}V \leq & E\zeta^T(0)G\zeta(0) + \|Q\|C_1 + \\ & \|G\|\alpha_2 \int_0^t e^{\epsilon s} E \|x(s-\tau)\|^2 ds + \\ & (\lambda + \|G\|\alpha_1 + \|G\|\epsilon) \int_0^t e^{\epsilon s} E \|x(s)\|^2 ds + \\ & \epsilon E \int_0^t e^{\epsilon s} ds \int_{-\tau}^0 x_s^T(\theta) Q x_s(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $C_1 = \int_{-\tau}^0 E \|x(t)\|^2 dt$, 易证当 $t \geq \tau$ 时,
 $\int_0^t e^{\epsilon s} E \|x(s-\tau)\|^2 ds \leq e^{\epsilon\tau} (C_1 + \int_0^t e^{\epsilon s} E \|x(s)\|^2 ds)$,
 (20)

$$\begin{aligned} E \int_0^t e^{\epsilon s} ds \int_{-\tau}^0 x_s^T(\theta) Q x_s(\theta) d\theta \leq & \\ \tau e^{\epsilon\tau} \|Q\| (C_1 + \int_0^t e^{\epsilon s} E \|x(s)\|^2 ds). \end{aligned} \quad (21)$$

将式(20),(21)代入式(19),并应用式(18),可推出
 $t \geq \tau$ 时

$$Ee^{\epsilon t}V(x(t)) \leq C_2. \quad (22)$$

其中 $C_2 = E\zeta^T(0)G\zeta(0) + (1 + \epsilon\tau e^{\epsilon\tau}) \|Q\| C_1 + \|G\|\alpha_2 e^{\epsilon\tau} C_1$. 从式(12)与式(22)易推出:

$$E \|x(t)\|^2 \leq C_2 [\lambda_{\min}(G)]^{-1} e^{-\epsilon t}, t \geq \tau. \quad (23)$$

即不确定性随机时滞系统(5)均方指数稳定,其 Lyapunov 指数 ϵ 由式(18)确定.

下面应用文献[9]中引理 2.7 证明系统(5)几乎必然指数稳定.类似于式(16)的证明,易推出 $\forall (t_1, t_2, x, y) \in {}^+X; {}^+X \times {}^n X \times {}^n X$:

$$\begin{aligned} \|A(t_1, x)x\| & \leq \rho(A) \|x\|, \\ \|B(t_2, y)y\| & \leq \rho(B) \|y\|. \end{aligned} \quad (24)$$

这里 $\rho(A) = \max\{\|A_{I_1I_2}\|\}; I_1, I_2$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 的两独立子集, $\rho(B) = \max\{\|B_{I_1I_2}\|\}; I_1, I_2$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 的两独立子集,由式(7),(22),(24)及文献[9]中引理 2.7 可推出,存在 $\epsilon > 0$:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|x(t)\| \leq -\frac{\epsilon}{2}, \quad \text{a. s.}$$

即系统(5)几乎必然指数稳定,其 Lyapunov 指数 $\frac{\epsilon}{2}$ 由式(18)确定.

注 1 定理 1 涵盖并推广了文献[4~6]中的结果.

3 应用(Applications)

考虑不确定性随机时滞神经网络

$$dx(t) = [-Ax(t) + B\sigma(x(t-\tau))]dt + f(t, x(t), x(t-\tau))dw(t). \quad (25)$$

其中

$$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad a_i > 0, 1 \leq i \leq n,$$

$$B = (b_{ij})_{n \times n} \in {}^{n \times n}, \sigma(x) = (\sigma_1(x_1), \dots, \sigma_n(x_n))^T, \sigma_i(0) = 0, 1 \leq i \leq n,$$

τ, f 与 w 的意义与系统(1)相同,并设系统(25)满足如下的条件(H):

$$(H) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n:$$

$$\begin{cases} 0 < a_i^m \leq a_i \leq a_i^M, & b_{ij}^m \leq b_{ij} \leq b_{ij}^M, \\ 0 \leq \sigma_i^m \leq x_i^{-1} \sigma_i(x_i) \leq \sigma_i^M, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} |r f^T(t, x, y) f(t, x, y)| \leq \alpha_1 \|x\|^2 + \alpha_2 \|y\|^2, \\ \forall (t, x, y) \in {}^+X \times {}^n X \times {}^n X. \end{cases} \quad (27)$$

这里 $a_i^m, a_i^M, b_{ij}^m, b_{ij}^M, \sigma_i^m, \sigma_i^M, (1 \leq i, j \leq n)$ 均为常数,而 α_1, α_2 为非负常数,类似于定理 1 的证明,我们有

定理 2 若存在正定阵 G , 正对角阵 $Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i > 0 (1 \leq i \leq n)$, 使

$$\bar{\lambda} + \|G\|(\alpha_1 + \alpha_2) < 0. \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} = & \max\{\lambda_{\max}[-(A_{I_1I_2}^T G + GA_{I_1I_2}) + \\ & Q + GB_{I_1I_3}MQ^{-1}MB_{I_1I_3}^T G]; I_1, I_2, I_3 \text{ 是} \\ & \{1, 2, \dots, n\} \text{ 的三独立子集}\}, \end{aligned}$$

$$M = \text{diag}(\sigma_1^M, \dots, \sigma_n^M),$$

则系统(25)均方指数稳定,也几乎必然指数稳定.

注 2 若式(26)中 $a_i^m = a_i^M, b_{ij}^m = b_{ij}^M, \sigma_i^m = 1, \sigma_i^M = 0, 1 \leq i, j \leq n$, 则系统(25)变成文献[2]中讨论的一类随机时滞神经网络,并且文献[2]中主要是讨论系统的均方指数稳定性,进一步还设 $\tau = 0$, 则系统(25)变成文献[3]中讨论的一类随机神经网络,因而本文所讨论的系统(25)比文献[2,3]中讨论的系统更具一般性,同时定理 2 也涵盖并推广了文献[7,8]的主要结果.

4 例(Example)

考虑不确定性随机时滞神经网络

$$dx(t) = [-Ax(t) + B\sigma(x(t-\tau))]dt + f(t, x(t), x(t-\tau))dw(t). \quad (29)$$

其中

$$A^m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}, \quad A^M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 27 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 18 & \frac{4}{5} \end{bmatrix},$$

$$B^m = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -2 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad B^M = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

并设

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2;$$

$$|f^T(t, x, y)f(t, x, y)| \leq \alpha_1 \|x\|^2 + \alpha_2 \|y\|^2.$$

通过简单计算

$$A_{|1|,|1|} = A_{|2|,|2|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A_{|1|,|2|} = A_{|2|,|1|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 27 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 18 & \frac{4}{5} \end{bmatrix},$$

$$B_{|1|,|1|} = B_{|2|,|2|} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$B_{|1|,|2|} = B_{|2|,|1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 4 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

定理 2 中令 $G = Q = I$, 易算出 $\bar{\lambda} = -\frac{3}{4}$, 则由定理 2 可知当 $\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{3}{4}$ 时, 系统(29) 均方指数稳定, 也几乎必然指数稳定.

参考文献(References)

- [1] Mao X. Exponential Stability of Stochastic Differential Equations [M]. New York: Marcel Dekker, 1994
- [2] Liao X X, Mao X. Stability of stochastic neural networks[J]. Neural, Parallel & Scientific Computations, 1996, 4(2): 205-224
- [3] Liao X X, Mao X. Exponential stability and instability of stochastic neural networks[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1996, 14(1): 165-185
- [4] Chen J, Xue D M, Shafai B. On sufficient conditions for stability in dependent of delay[J]. IEEE Trans. Automat Contr., 1995, 40(8): 1675-1680
- [5] Ye H, Michel A N, Wang K. Robust stability of nonlinear time-delay systems with applications to neural network[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems I, 1996, 43(7): 532-543
- [6] Wang K, Michel A N. On the stability of a family of nonlinear time-varying systems[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems I, 1996, 43(7): 517-531
- [7] Cao Y J, Wu Q H. A note stability of analog neural network with time delays[J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1996, 7(6): 1533-1535
- [8] Kelly D G. Stability in contractive nonlinear neural networks[J]. IEEE Trans. Biomedical Engineering, 1990, 37(3): 231-242
- [9] Mao X, Shan A. Exponential stability of stochastic differential delay equations[J]. Stochastics and Stochastics Reports, 1997, 60(1): 135-153

本文作者简介

沈 轶 1964 年生. 华中理工大学自动控制系做博士后研究. 已发表论文 20 余篇. 研究领域为随机系统, 神经网络.

廖晓昕 1938 年生. 华中理工大学自动控制系教授, 博士生导师. 已在《中国科学》、《国际控制论杂志》等刊物上发表论文 100 余篇, 中英文著作 5 部. 研究领域为神经网络、非线性控制系统.

许晓东 1968 年生. 华中理工大学副教授, 博士. 已发表论文 10 余篇. 研究领域为系统工程.

李国宽 1972 年生. 华中理工大学博士生. 已发表论文 10 余篇. 研究领域为模式识别.