

交叉口有交通信号控制时用户最优动态配流模型*

徐建闽 许伦辉 撒元功
(华南理工大学交通学院, 广州, 510640)

U 491.54

摘要: 针对智能交通系统(ITS)项目中主要基础理论之一的动态交通分配问题,在现有研究成果的基础上,提出了更接近真实路网的多起点多终点交叉口设置有交通信号控制(Traffic Signal Control)时的动态配流模型,给出了对现有的通过 Frank-Wolfe 算法所得到的 DUO 配流解进行修正的原则,最后的算例表明由修正后的模型和算法所得到的 DUO 配流解满足 TSC 约束。

关键词: 智能交通系统; 动态配流; 交通信号控制; 最优控制; 算法
文献标识码: A

交叉

Dynamic User - Optimal Assignment Model of Road Network with Traffic Signal Control at Its Intersections

XU Jianmin, XU Lunhui and SA Yuangong

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: The instantaneous dynamic traffic assignment model for multi-origin and multi-destination road network with traffic signal control(TSC)at its intersection is putforwarded and the equivalence is demonstrated that the dynamic user - optimal (DUO)route choice problem can be converted to a optimal control program with a defined objective function. Considering the TSC constraint, the DUO assignment solution obtained from the existing Frank - Wolfe algorithm is revised so that the final DUO solution is consistent with the TSC constraint. A numerical example is presented indicating that the model and algorithm in this paper yields realistic results.

Key words: intelligent transportation system; dynamic traffic assignment; traffic signal control; optimal control; algorithm

1 引言(Introduction)

长期以来,人们为了使城市交通安全、快捷、舒适、高效,采用了诸多行之有效的交通管制措施,但实践证明都无法从根本上解决越来越拥挤的城市交通状况,于是近几十年来,国内外众多学者提出把交通管理和控制问题作为一个系统来进行动态的研究,并逐步发展成智能交通系统(ITS),这也许是真正解决交通诸多问题的唯一途径^[1],但是由于静态交通分配模型无法描述城市交通网络的动态交通流问题,因此作为 ITS 项目中主要技术基础之一的动态交通分配理论日益成为国际上的研究热点,先进的交通预测信息的提供以及最佳出行路径引导等,都有赖于对整个路网动态交通特性的正确描述。到目前为止,动态交通分配问题从研究方法上可分为:1) 计算机模拟方法^[2,3]; 2) 数学规划建模方法^[4,5]; 3) 最优控制理论方法^[6-13]。从对出行者路径选择行为的假设上看,可分为:1) 动态用户最优模型; 2) 动态系统最优模型,其中以 Wardrop 第一原理为评价指标的动态用户最优(Dynamic User-Optimal)配流

模型的研究和应用最为活跃,象 Carey^[8,9], Friesz^[10,11], Ho^[12], Smith^[13], 以及 Boyce 和 Ran Bin^[6,7]等,对 DUO 配流问题均进行了深入研究,提出了各自的配流模型和配流算法,但是这些现有的研究成果,不管是模型的可解释性还是算法的可实现性上都有各自的不足,离实现真正的 ITS 系统的要求仍有较大差距,DUO 配流问题远没有得到解决^[14]。

2 路段状态方程及约束条件(Link state equation and its constrains)

2.1 路段状态方程(Link state equation)

考虑一个给定的具有多起点多终点的交通路网,通常将其表示为一个有向连通图 $G = (A, N)$, 其中 A 表示有向路段(Link)的集合, N 表示路网节点(Node)的集合,节点包括路网的起点,终点,和交叉口,对某次出行,规定 l 表示起点, m 表示终点,设研究动态配流时间区间为 $[0, T]$, 并令:

$$x_a(t) = t \text{ 时刻行驶在路段 } a \text{ 上的交通量}; u_a(t) = t \text{ 时刻驶入路段 } a \text{ 的交通流量};$$

* 基金项目:国家自然科学基金(69974016)和广东省自然科学基金(990575)资助项目
收稿日期:1997-9-1; 收修改稿日期:1998-9-3.

$v_a(t)$ = t 时刻驶出路段 a 的交通流量;

$e^{lm}(t)$ = t 时刻由起点 l 到达讫点 m 的交通流量;

$E^{lm}(t)$ = t 时刻以前由 l 到达 m 的交通量总和;

$x_{ar}^{lm}(t)$ = t 时刻行驶在由 l 到 m 的路径 r (route)

上路段 a 的交通量;

$u_{ar}^{lm}(t)$ = t 时刻驶入由 l 到 m 的路径 r 上路段 a

的交通流量;

$v_{ar}^{lm}(t)$ = t 时刻驶出由 l 到 m 的路径 r 上路段 a

的交通流量;

$e_r^{lm}(t)$ = t 时刻由起点 l 通过路径 r 到达讫点 m

的交通流量;

$E_r^{lm}(t)$ = t 时刻以前由起点 l 通过路径 r 到达讫

点 m 的交通量总和;

$q^{lm}(t)$ = 给定的由起点 l 到讫点 m 的出行量.

此外,对于路网中任一节点 i ,记 $A(i)$ 为所有起节点为 i 的路段集合, $B(i)$ 为所有讫节点为 i 的路段集合.那么得到如下的路段交通量状态方程为:

$$\frac{dx_{ar}^{lm}(t)}{dt} = u_{ar}^{lm}(t) - v_{ar}^{lm}(t), \forall l, m, r, a, \quad (1)$$

$$\frac{dE_r^{lm}(t)}{dt} = e_r^{lm}(t), \forall l, m, r; m \neq l. \quad (2)$$

约束条件有:

• 交通流守恒约束:

$$q^{lm}(t) = \sum_{a \in A(l)} \sum_r u_{ar}^{lm}(t), \forall l, m; l \neq m, \quad (3)$$

$$\sum_{a \in B(i)} v_{ar}^{lm}(t) = \sum_{a \in A(i)} u_{ar}^{lm}(t), \forall l, m, r, i; i \neq l, m, \quad (4)$$

$$\sum_{a \in B(m)} \sum_r v_{ar}^{lm}(t) = e^{lm}(t), \forall l, m; m \neq l. \quad (5)$$

• 非负约束:

$$\begin{cases} x_{ar}^{lm}(t) \geq 0, u_{ar}^{lm}(t) \geq 0, \\ v_{ar}^{lm}(t) \geq 0, \forall l, m, r, a; \end{cases} \quad (6)$$

$$e_r^{lm}(t) \geq 0, E_r^{lm}(t) \geq 0, \forall l, m, r. \quad (7)$$

• TSC 约束:

在不考虑有右转车流的情况下:设路段 a 的起点 p 处的信号控制周期为 T_p ,绿信比为 g_p ,讫点 s 处的信号控制周期为 T_s ,绿信比为 g_s ,则有:

$$\begin{cases} u_{ar}^{lm}(t) = 0, t \in [(k-1)T_p, g_p k T_p], \\ \forall l, m, r, a; k = 1, 2, \dots, N_p, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} v_{ar}^{lm}(t) = 0, t \in [(k-1)T_s, g_s k T_s], \\ \forall l, m, r, a; k = 1, 2, \dots, N_s. \end{cases} \quad (9)$$

其中 $N_p = T/T_p, N_s = T/T_s$.

• 初始条件约束:

$$x_{ar}^{lm}(0) = 0, E_r^{lm}(0) = 0, \forall l, m, r, a. \quad (10)$$

• 定义约束:

$$\sum_{lmr} u_{ar}^{lm}(t) = u_a(t), \sum_{lmr} v_{ar}^{lm}(t) = v_a(t), \quad (11)$$

$$\sum_{lmr} x_{ar}^{lm}(t) = x_a(t);$$

$$\sum_r e_r^{lm}(t) = e^{lm}(t), \quad (12)$$

$$\sum_r E_r^{lm}(t) = E^{lm}(t), \forall l, m.$$

• FIFO (First-in first-out) 约束:

$$x_{ar}^{lm}(t) = \sum_{i \in I} \{ x_{ar}^{lm}[t + \tau_a(t)] - x_{br}^{lm}(t) \} +$$

$$\{ E_r^{lm}[t + \tau_a(t)] - E_r^{lm}(t) \},$$

$$\forall l, m, r, i, a \in B(i); i \neq l. \quad (13)$$

3 具有 TSC 约束时 DUO 配流解的确定 (Determining the DUO solution with TSC constrains)

在不考虑 TSC 约束时,DUO 配流问题等价于一个以下面的式(14)为目标函数的最优控制问题^[6-13],并且可以由 Frank-Wolfe 算法求得问题的最优数值解^[7]

$$\min_{u, v, x, e} J = \int_0^T \sum_a \left\{ \int_0^{u_a(t)} f_{1a}[x_a(t), \alpha] d\alpha + \int_0^{v_a(t)} f_{2a}[x_a(t), \alpha] d\alpha \right\}. \quad (14)$$

约束条件为:式(1)~式(13).

现在考虑在路径 r 中除起点 l 和讫节点 m 外的各中间节点(交叉口)处设置有交通信号控制,也即配流模型中含有(8),(9)两式的约束,那么此时必须对没有 TSC 约束时 DUO 配流解 $u_{ar}^{lm*}(t), v_{ar}^{lm*}(t)$ 进行修正.修正的原则是保证在一个交通信号控制周期内,修正后的 $u_{ar}^{lm}(t), v_{ar}^{lm}(t)$ 和 $x_{ar}^{lm}(t)$ 与原来的最优值 $u_{ar}^{lm*}(t), v_{ar}^{lm*}(t)$ 和 $x_{ar}^{lm*}(t)$ 具有相同的状态变量边界值和目标函数值,具体的表达形式为:

1) 路段 a 起点 p 处有 TSC:

根据式(8)给出的约束: $u_{ar}^{lm}(t) = 0, t \in [(k-1)T_p, g_p k T_p], k = 1, 2, \dots, N_p$, 而 $u_{ar}^{lm}(t), t \in [g_p k T_p, k T_p], v_{ar}^{lm}(t), t \in [(k-1)T_p, k T_p]$ 的值由下面两个积分方程确定:

$$\int_{g_p k T_p}^{k T_p} u_{ar}^{lm}(t) dt - \int_{(k-1)T_p}^{k T_p} v_{ar}^{lm}(t) dt = \int_{(k-1)T_p}^{k T_p} [u_{ar}^{lm*}(t) - v_{ar}^{lm*}(t)] dt, \quad (15)$$

$$\int_{g_p k T_p}^{k T_p} \left[\int_0^{u_{ar}^{lm}(t)} f_{1a}(x_a(t), \alpha) d\alpha \right] dt +$$

$$\int_{(k-1)T_p}^{kT_p} \left[\int_0^{x_{ar}^{lm^*}(t)} f_{2a}(x_a(t), \alpha) d\alpha \right] dt = \int_{(k-1)T_p}^{kT_p} \left[\int_0^{u_{ar}^{lm^*}(t)} f_{1a}(x_a(t), \alpha) d\alpha + \int_0^{v_{ar}^{lm^*}(t)} f_{2a}(x_a(t), \alpha) d\alpha \right] dt. \quad (16)$$

其中式(15)是由 $x_{ar}^{lm}(kT_p) = x_{ar}^{lm^*}(kT_p)$ 得, 式(16)是由在一个交通信号控制周期 $[(k-1)T_p, kT_p]$ 内, 目标函数式(14)的值相等得到.

2) 路段 a 的讫点 s 处有 TSC;

由式(9)给出的约束得:

$$v_{ar}^{lm}(t) = 0, t \in [(k-1)T_s, g_s kT_s], k = 1, 2, \dots, N_s,$$

而

$$v_{ar}^{lm}(t), t \in [g_s kT_s, kT_s], u_{ar}^{lm}(t), t \in [(k-1)T_s, kT_s]$$

的值同理由下面的积分方程得到:

$$\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} u_{ar}^{lm}(t) dt - \int_{g_s kT_s}^{kT_s} v_{ar}^{lm}(t) dt = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} [u_{ar}^{lm^*}(t) - v_{ar}^{lm^*}(t)] dt, \quad (17)$$

$$\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \left[\int_0^{u_{ar}^{lm}(t)} f_{1a}(x_a(t), \alpha) d\alpha \right] dt + \int_{g_s kT_s}^{kT_s} \left[\int_0^{v_{ar}^{lm}(t)} f_{2a}(x_a(t), \alpha) d\alpha \right] dt = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \left[\int_0^{u_{ar}^{lm^*}(t)} f_{1a}(x_a(t), \alpha) d\alpha + \int_0^{v_{ar}^{lm^*}(t)} f_{2a}(x_a(t), \alpha) d\alpha \right] dt. \quad (18)$$

3) 路段 a 的起点 p 和讫点 s 处都有 TSC;

此时, 由于路段 a 的起点 p 处和讫点 s 处的交通信号控制周期, 绿信比都不一定相同, 要一次修正就获得同时考虑起点和讫点带 TSC 约束的 $u_{ar}^{lm}(t)$ 和 $v_{ar}^{lm}(t)$ 是困难的, 可行的方法是先不考虑讫点 s 处的 TSC 约束, 由(34), (35) 两式依据最优的 $u_{ar}^{lm^*}(t)$, $v_{ar}^{lm^*}(t)$ 和 $x_{ar}^{lm^*}(t)$ 确定出只考虑起点 p 处带 TSC 约束的 $\bar{u}_{ar}^{lm}(t)$, $\bar{v}_{ar}^{lm}(t)$ 和 $\bar{x}_{ar}^{lm}(t)$, 然后再由(36), (37) 两式依据 $\bar{u}_{ar}^{lm}(t)$, $\bar{v}_{ar}^{lm}(t)$ 和 $\bar{x}_{ar}^{lm}(t)$ 确定出 $u_{ar}^{lm}(t)$, $v_{ar}^{lm}(t)$ 和 $x_{ar}^{lm}(t)$, 此即是同时考虑路段 a 的起点 p 和讫点 s 处都有 TSC 约束时所获得的 DUO 配流问题的解. 当然也可以先考虑讫点 s 处有 TSC 约束, 再考虑起点 p 处有 TSC 约束, 它们在满足修正算法的原则上是等价的.

由上面的分析可知, 在获得了 $u_{ar}^{lm^*}(t)$, $v_{ar}^{lm^*}(t)$

和 $x_{ar}^{lm^*}(t)$ 的情况下, 要得到考虑 TSC 约束时的 $u_{ar}^{lm}(t)$, $v_{ar}^{lm}(t)$ 和 $x_{ar}^{lm}(t)$, 关键是要解如上所述的两个定积分方程, 方程的解具有非唯一性. 在这里采用一种简单的算法, 即在 $u_{ar}^{lm}(t)$, $v_{ar}^{lm}(t)$ 不为零的时区内, 记 $u_{ar}^{lm}(t) = \beta_1 u_{ar}^{lm^*}(t)$, $v_{ar}^{lm}(t) = \beta_2 v_{ar}^{lm^*}(t)$, 这样方程式的右边是具体的数值, 方程式的左边将是关于系数 β_1, β_2 的函数, 因此通过两个积分方程可以求出修正系数 β_1, β_2 , 从而也就得到了考虑 TSC 约束时 DUO 配流问题的最终数值解.

4 一个算例 (A numerical example)

文献[7]中给出了如图 1 所示的一个简单测试路网, 各路段通行时间函数取成相等:

$$C_a(k) = 1.0 + 0.001[u_a(k)]^2 + 0.015[v_a(k)]^2 + 0.002[x_a(k)]^2.$$

将研究时间区间 $[0, T]$ 分成 7 个时区并对模型进行离散化, 已知各时间区间 k 的 O-D (Orientation-Destination) 出行量如表 1 所示, 文献[7]中给出了没有 TSC 约束时路段 2~5 的求解结果如表 2 所示.

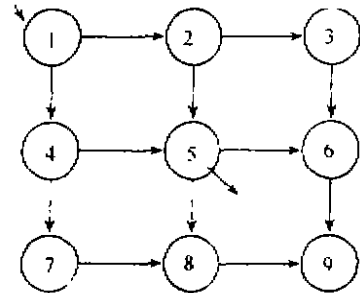


图 1 测试路网

Fig. 1 Test road network

表 1 各时间区间的出行量

Table 1 O-D trip table for each time interval k

| 时间区间 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------------|----|---|---|---|---|---|---|
| $q^{15}(k)$ | 10 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $q^{19}(k)$ | 10 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

表 2 路段 2~5 的 DUO 配流解

Table 2 Optimal assignment solution for link 2~5

| 时间区间 | 交通量 | 驶入流量 | 驶出流量 | 交通量 | 通行时间 |
|------|--------------|------------|------------|------------|------------|
| k | $x_a^+(k+1)$ | $u_a^+(k)$ | $v_a^+(k)$ | $x_a^+(k)$ | $C_a^+(k)$ |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.00 |
| 2 | 4.2 | 4.2 | 0.0 | 0.0 | 1.02 |
| 3 | 3.6 | 3.6 | 4.2 | 4.2 | 1.31 |
| 4 | 1.2 | 1.2 | 3.6 | 3.6 | 1.22 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 1.2 | 1.2 | 1.03 |
| 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.00 |

表3 有TSC时路段2~5的DUO配流解

Table 3 Optimal assignment solution for link 2~5 with TSC

| 时间区间 k | 交通量 $x_n(k+1)$ | 驶入流量 $u_n(k)$ | 驶出流量 $v_n(k)$ | 交通量 $x_n(k)$ | 通行时间 $C_n(k)$ |
|-------------|-------------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.00 |
| 2 | 4.2 | 4.2 | 0.0 | 0.0 | 1.02 |
| 3 | 0 | 0 | 4.2 | 4.2 | 1.30 |
| 4 | 1.2 | 4.8 | 3.6 | 0 | 1.22 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 1.2 | 1.2 | 1.03 |
| 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.00 |

参考文献(References)

- [1] 刘以成. 21世纪的公路交通——智能车路系统[J]. 中国公路学报, 1995, 8(3): 15-17
- [2] Yagar S. Dynamic traffic assignment by individual path minimization and queuing[J]. Transportation Research, 1971, 5(3): 179-196
- [3] Mahmassani H S, Pecta S, et al. Dynamic traffic assignment with multiple user classes for real-time ATIS/ATMS applications in large urban systems[A]. Proceedings of the Advanced Traffic Management Conference[C], Federal Highway Administration, US Department of Transportation, Washington, DC, 1993, 91-114
- [4] Merchant D K and Nemhauser G L. A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems[J]. Transportation Science, 1978a, 23(12): 183-199
- [5] Merchant D K and Nemhauser G L. Optimality conditions for a dynamic traffic assignment model[J]. Transportation Science, 1978b, 23(12): 200-207
- [6] Bin Ran, David E Boyce and LeBlanc L J. A new class of instantaneous dynamic user——optimal traffic assignment models[J]. Operations Research, 1993, 41(1): 192-202
- [7] Boyce D E, Ran B and LeBlanc L J. Solving an instantaneous dynam-

ic user——optimal traffic assignment model[J]. Transportation Science, 1991a, 46(8): 124-135

- [8] Carey M. Optimal time-varying flows on congested networks[J]. Operations Research, 1987, 35(5): 58-69
- [9] Carey M. Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem[J]. Transportation Research, 1992, 26B(10): 127-133
- [10] Friesz T L, et al. Dynamic network traffic assignment control problem[J]. Operations Research, 1989, 37(3): 893-901
- [11] Friesz T L, et al. A variational inequality formulation of the dynamic network user equilibrium problem[J]. Operations Research, 1993, 41(4): 179-191
- [12] HO J K. A successive linear optimization approach to the dynamic traffic assignment problem[J]. Transportation Science, 1980a, 25(14): 295-305
- [13] Smith M J. A new dynamic traffic model and the existence and calculation of dynamic user equilibria on congested capacity——constrained road networks[J]. Transportation Research, 1993, 27B(8): 49-63
- [14] 陆化普, 史其信, 徽亚峰. 动态交通分配理论的回顾与展望[J]. 公路交通科技, 1996, 13(2): 34-43

本文作者简介

徐建闽 1960年生. 1988年和1994年在华南理工大学自动化系分别获硕士和博士学位. 现为华南理工大学科研处处长, 教授. 主要研究领域为自适应控制, 鲁棒控制, 智能控制, 现代交通工程, CIMS, 机器人控制等.

许伦辉 1965年生. 1987年7月, 1990年3月在国防科技大学自动控制系分别获工学学士和硕士学位. 现为华南理工大学自动控制工程系博士研究生. 研究方向为非线性系统理论, 智能控制, 智能运输系统, 交通监控与交通管理等.

撒元功 1975年生. 1997年毕业于哈尔滨工程大学自动控制系自动控制专业. 现为华南理工大学博士研究生. 目前研究兴趣为智能控制, 交通控制.