文章编号:1000-8152(2000)02-0180-04

180-183

一种求解不可微非线性函数的全局解的混合遗传算法*

谢 巍 方康玲 O224 O242.23
(武汉科技大学信息科学与工程学院·武汉,430081)

摘要:通过在遗传算法中加入一个改进的模式搜索算子,结合模式搜索法和遗传算法两者的长处,利用模式搜索算法的不要求优化对象的导数,又可进一步改进遗传算法的局部细致搜索的能力,能以较大的概率求得不可微函数的全局解.数值计算表明该算法显著优于模式搜索法和遗传算法.

关键词:智能计算;不可微函数;遗传算法;模式搜索法
文献标识码:A

A Hybrid Genetic Algorithm for Global Solution of Indifferentiable Nonlinear Function

XIE Wei and FANG Kangling
(Information Science and Engineering College, Wuhan University of Science and Technology · Wuhan, 430081. P.R.China)

Abstract: In this paper, through a promoted Fletcher-Reeves operator embedded into the genetic algorithm, the method that combines the advantages of the genetic algorithm and the Fletcher-Reeves which need not the optimal problem function's differential and promote the ability of the genetic algorithm's locally meticulous search can be got with the faster convergence and the greater probability for the global solution. The numerical computing results show that it is distinctly superior to the two algorithm above.

Key words: computational intelligent; indifferentiable function; genetic algorithm; Flecher-Reeves algorithm

1 引言(Introduction)

求解不可微非线性函数的优化问题的主要数值方法有模式搜索法,Rosenblock算法及单纯形法等.但这些算法都是局部极值算法,只能得到局部极值解而非全局解.

近年来,模拟生物进化的遗传算法吸引了众多领域的研究人员,在函数优化、模式识别、图象处理、人工智能得到广泛应用.遗传算法将生物进化中遗传、变异、自然选择等观点引入优化计算中.遗传算法只需要优化对象的目标函数值,在不可微甚至不连续的函数优化问题中,遗传算法以其能以较大概率求得全局最优解,计算时间相对较少,具有较强鲁棒性、适应性和高度的并行性等特点得到广泛重视.在参考文献[1]中作者提出对连续和可微的函数优化问题采用在遗传算法中嵌入一个最速下降算子从而结合两者的长处的混合优化算法;取得了很好的效果,但不适于不可微函数优化问题.

本文提出一种将模式搜索法加入遗传算法中的混合优化算法,用以提高不可微函数优化的收敛速度.模式搜索法又叫步长加速法,由探测性移动和模式性移动两种移动方式组成,前者为揭示目标函数变化规律来探测其最佳下降方向,后者利用发现的函数规律循着有利方向(近似梯度方向)寻求较好的点,可看成最速下降法的一种近似,做为一种直接寻优的方法对不可微函数的优化问题还是很有效的,将模式搜索法和遗传算法相结合可得到一种既可以较大概率搜索全局最优解又能进行局部细致搜索的混合优化算法.

2 问题描述(Problem description)

考虑复杂对象的非线性不可微函数的优化问题,我们可表述成

$$\min f(x),\quad a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

其中 a_i 和 b_i 分别为变量 x_i 的上下界,n 为变量 x 的维数,$f(x)$ 为非线性不可微函数.在大多数实际情况中,对于一个研究对象的函数,给定一个已知的自变量,我们可以得到一个相应的函数值,除此之外则不可能获得函数是否可微或连续等方面的信息.

* 基金项目:湖北省自然基金(98J055)项目资助.
收稿日期:1998-01-15;收修改稿日期:1999-03-22.

2.1 模式搜索法(Fletcher-Reeves algorithm)

模式搜索法是一种直接优化的方法,该方法的特点是简单、直观、不需要求解函数的导数.其算法为:

Step 1 初始化:给定初始点 $x^{(1)} \in E^n$,以及 n 个坐标方向 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$,初始步长 δ,加速因子 $\alpha \geqslant 1$,减缩率 $\beta \in (0,1)$,容许误差 $\varepsilon > 0$,置 $y^{(1)} = x^{(1)}, k = 1, j = 1$;

Step 2 如果 $f(y^{(j)} + \delta e_j) < f(y^{(j)})$,则令 $y^{(j+1)} = y^{(j)} + \delta e_j$,进行 Step 4;否则,进行 Step 3;

Step 3 如果 $f(y^{(j)} - \delta e_j) < f(y^{(j)})$,则令 $y^{(j+1)} = y^{(j)} - \delta e_j$,进行 Step 4;否则,令 $y^{(j+1)} = y^{(j)}$,进行 Step 4;

Step 4 如果 $j < n$,则置 $j = j + 1$,转 Step 2;否则,进行 Step 5;

Step 5 如果 $f(y^{n+1}) < f(x^k)$,则进行 Step 6;否则,进行 Step 7;

Step 6 置 $x^{(k+1)} = y^{(n+1)}$,令 $y^{(1)} = x^{(k+1)} + \alpha(x^{(k+1)} - x^{(k)})$,置 $k = k + 1, j = 1$,转 Step 2;

Step 7 如果 $\delta \leqslant \varepsilon$,则停止迭代,得点 $x^{(k)}$,否则,置 $\delta = \beta\delta, y^{(1)} = x^{(k)}, x^{(k+1)} = x^{(k)}$,置 $k = k + 1, j = 1$,转 Step 2.

模式搜索法是一种局部直接寻优的方法,可看作最速下降法的一种近似,由于模式搜索法无需计算目标函数的导数,因此适合不可微函数的优化问题.

2.2 遗传算法(Genetic algorithm)

遗传算法是对自然进化和群体遗传的一种模仿,它将目标函数转化基因组群,以适应函数为优化目标,通过基因的重组和交换以及突变,不断地得到下一代优化基因组合,直到最后的优化结果.遗传算法主要的优势在于对优化对象的先验信息的要求甚少,一般只需要函数的数值关系以及它的全局的收敛性.数值计算表明它可以越过局部极值而使群体向全局最优值迁移,这种特性来自于遗传算法内部基因的多样性,使得算法基本上能在全方位搜索[2].遗传算法的计算过程如下:

Step 1 随机产生初始父代群体并计算其适应度并对其编码;

Step 2 选择群体中两个个体以交换概率 P_c 进行交换运算;

Step 3 对群体中的个体以变异概率 P_m 进行变异运算;

Step 4 对每个个体进行解码并计算其适应度;

Step 5 选择子代群体(适者生存,不适者淘汰);

Step 6 满足迭代条件则停止,否则返回 Step 2.

3 混合算法(Hybrid algorithm)

遗传算法在求解优化问题也有固有的弊端,由于其通常采用二进制码,导致计算精度与字符串长度、运算量之间的矛盾以及完全依概率随机操作,使得遗传算法的局部搜索能力不强.而模式搜索法具有较强的局部搜索能力,并且可大大提高收敛速度,结合模式搜索法和遗传算法在求解不可微函数优化问题的优势,本文提出以下的混合算法主要在以上的遗传算法的第四步中加入模式搜索算子,旨在提高求得解的概率和收敛速度,混合算法的计算过程如下:

Step 1 随机产生初始父代群体并计算其适应度并对其编码;

Step 2 选择群体中两个个体以交换概率 P_c 进行编码,交换运算;

Step 3 对群体中的个体以变异概率 P_m 进行变异,解码运算;

Step 4 将父代和子代都加入新的子代群体,对群体中的每个个体以概率 P_{ch} 进行模式搜索,将子代取代父代加入新的子代群体,计算每个个体的适应度;

Step 5 选择子代群体(适者生存,不适者淘汰);

Step 6 满足迭代条件则停止,否则返回 Step 2.

其中 Step 4 中的模式搜索算子的算法如下所示:

模式搜索算子运算过程为:

Do{

对群体中第 i 个个体产生[0,1]间的随机数,如果随机数大于既定的模式搜索概率 P_{ch},则进行如下运算:

Do{

进行探测性移动和模式移动;

}while(满足所需的精度和迭代次数)

将产生的子代取代父代加入子代群体;

}while(搜索完整个群体)

本文的混合算法中的交换算子、突变算子和选择算子的作用是进行全局宏观搜索、而模式搜索算子是进行局部细致搜索.

对上述的混合算法作如下说明：

由于进行杂交运算和子代选择时所需的概率与适应度是成正比的，故适应度函数的定义将对该混合算法有全局性的影响，故适应度函数的定义为 $g(x) = f_{max} - f(x) + k(f_{max} - f_{min})$，其中 f_{max} 和 f_{min} 分别为当前群体中的最大和最小函数值；k 为控制当前群体中最大和最小适应度值之比的参数值．由于算法中每代的 f_{max} 和 f_{min} 随群体不同而变化，以上定义的适应度函数使得该混合算法在确定适应度和选择概率上有自适应性和鲁棒性[1]．本文采用混合式数据结构，只有个体在被确定进行杂交和变异运算时才进行编码，运算结束后产生的子代要进行解码，采用混合式数据结构的优点是避免编码的有限字长对精度的影响，充分发挥模式搜索法的细致的局部搜索能力．本文中 Step 4 中加入了模式搜索算子，该算子主要进行的是传统不可微函数直接数值优化模式搜索运算．在每次繁殖的子代中都以概率 P_{ch} 判断是否进行模式搜索运算，由于模式搜索法是一种迭代点的点序列使函数值单调下降的良好的局部极值的优化算法，所以经过模式搜索过的新的子代群体发展了父代的优良品质，因此可将子代取代父代直接进入子代候选群体．

4 举例计算(Citing and calulating)

本文考虑的如下不可微非线性函数优化问题

$$f(x)=(x_1-10x_2)^2+5(x_3-x_4)^2+(x_2-2x_3)^4+10(x_1-x_4)^4+[\sin^2(kx_1)+\sin^2(kx_2)+\sin^2(kx_3)+\sin^2(kx_4)]+\mathrm{int}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2),$$

$$-1 \leqslant x_i \leqslant 1,$$

int 为求整运算．

该等式中加入求整运算是为了增加不可微因子，当除去不可微因子且 $k = 0$ 时，该式是全局优化问题的著名算例 Powell 函数，该函数的全局极值点 x^* 在(0,0,0,0)处，在全局极值点处的函数值 $f(x^*) = 0$，且有 x^* 处的二阶偏导奇异矩阵，当 k 不为零，上式在 Powell 函数上密集地增加局部极值点，大大地增加了求解的难度．本文对上述的问题进行了大量的数值运算，在计算中，先随机产生了[-1,1]中的 3000 组 4 维向量，每 30 组作为初始群体，一共进行了 100 次运算．下面我们分别用纯模式搜索法和遗传算法以及它们相结合在一起的混合算法求解以上问题．

4.1 模式搜索法求解结果(The result of Fletoher-Reeves algorithm)

令初始步长 δ 为 0.005，减缩率 β 为 0.5，容许误差 ε 为 0.0001，最多迭代次数为 500 次．

当 k 为零时，该函数可近似认为是单调性较好的函数，我们运用模式搜索法可以以满概率求得极值点，当 x^* 在(0,0,0,0)处，$f(x^*) = 0$．

当 k 为 8 时，上式在 Powell 函数上密集地增加局部极值点，运用模式搜索法仅以 7% 的概率求得极值点．

4.2 遗传算法求解结果(The result of genetic algorithm)

我们分别令交换率为 0.8，变异率为 0.05 时，最大繁殖代数为 10000 次．

当 k 为零时，运用遗传算法以 100% 的概率求得全局解．

当 k 为 8 时，运用遗传算法以 90% 的概率求得全局解．

以上的计算举例表明遗传算法是一种以较大概率求得全局解的全局优化算法，但在此例的条件下尚不能达到满概率求解．事实上，可通过调节以上的参数，遗传算法可以满概率求解，但一般要经过漫长的繁殖过程，耗费大量的机时，求解效率很低．考虑到遗传算法的局部搜索能力不强，因此充分利用模式搜索法的局部细致搜索能力，通过改进遗传算法的第四步，在其中加入模式搜索算子，即可大大提高求解效率和得解的概率．

4.3 混合算法求解结果(The result of the bybrid algorithm)

结合模式搜索法和遗传算法在求解不可微函数优化问题的优势，本文提出混合算法的数值运算结果如下：

因为该函数的极值点密集地集中于区间[-1,1]中，为探讨该混合算法中模式搜索算子的局部细致搜索能力，我们分别令模式搜索的初始步长 δ 为 0.005，减缩率 β 为 0.5，容许误差为 0.0004；初始步长 δ 为 0.0005，减缩率 β 为 0.5，容许误差为0.0001；初始步长 δ 为 0.001，减缩率 β 为 0.5，容许误差为 0.0002；最多迭代次数都为 500 次，P_c 为 0.8；P_m 为 0.05．最大繁殖代数为 500 代．

说明：

1) 考虑到混合算法的精度等因素的影响，我们假定如果 $f(x) \leqslant 10^{-5}$，就认为搜索到全局最优解．

2) 从表 1 中可看出，当 $P_{ch} = 0$ 时，该混合算法退化成遗传算法；当 P_{ch} 不等于 0 时，混合算法的求解概率明显高于遗传算法的求解概率．当我们适当调整模式搜索法的初始步长及容许误差，能够提高

求解的概率；当 P_{ch} 大于 0.035，繁殖代数仅为 500 代，该算法以满概率搜索到全局解.

3) 当我们调整模式搜索法的初始步长 δ 为 0.001 及容许误差为 0.0002，减缩率 β 为 0.5；通过遗传算法和模式搜索法的共同作用，当 P_{ch} 为 0.025，该算法就以满概率搜索到全局解.

表 1　计算结果

Table 1　The result of calculation

初始步长 δ	P_{ch}							
	0.0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035
$k=8\quad\delta=0.005$	50	75	75	92	96	97	99	100
搜索到解的概率	50%	75%	75%	92%	96%	97%	99%	100%
$k=8\quad\delta=0.0005$	50	78	78	94	96	98	100	100
搜索到解的概率	50%	78%	78%	94%	96%	98%	100%	100%
$k=8\quad\delta=0.001$	50	72	87	95	98	100	100	100
搜索到解的概率	50%	72%	87%	95%	98%	100%	100%	100%

5　结束语(Conclusion)

针对不可微函数的全局优化问题，本文提出了一种基于模式搜索法的混合遗传算法，该算法综合了遗传算法在全局优化方面的优势以及模式搜索法在局部深度搜索方面的特点，同时又无需知道目标函数导数方面的信息，通过改进遗传算法的第四步，在其中加入模式搜索算子，可大大提高求解效率和求得解的概率. 仿真结果表明，该算法明显优于遗传算法和模式搜索法.

参考文献(References)

[1] 赵明旺. 连续可微函数全局优化的混合遗传算法[J]. 控制与决策，1997，12(5)：589 - 592

[2] 孙艳丰，王众托. 遗传算法在优化问题中的应用研究进展[J]. 控制与决策，1996，11(4)：425 - 430

[3] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京：清华大学出版社，1989

[4] 席少霖，赵风治. 最优化计算方法[M]. 上海：上海科技出版社，1983

本文作者简介

谢　巍　1974 年生. 1996 年在武汉科技大学自动化系获得学士学位，现为武汉科技大学研究生. 主要研究方向为智能控制，模糊控制.

方康玲　1945 年生. 1968 年毕业于上海交通大学无线电系，现为武汉科技大学教授、信息学院院长. 主要从事计算机过程控制，智能控制，模糊控制.