文章编号：1000－8152(2000)02－0251－04

251-254

广义非线性系统的极限值问题*

王　伟　杨建辉　刘永清
TP271
（华南理工大学自动控制工程系·广州，510640）

摘要：应用单调迭代法和上下解的方法讨论了广义非线性系统的极限值问题，给出了解存在性的构造性证明，所构造的逼近序列是线性系统的解，因此较易实现数值计算．并且所得结果推广了非线性微分系统的结果．

关键词：单调迭代法；上下解方法；极限值问题；广义非线性系统
文献标识码：A

The External Problems of Nonlinear Singular Systems

WANG Wei,　YANG Jianhui　and　LIU Yongqing
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: In this paper, the external problems of nonlinear singular systems are discussed by using monotone iterative technique and the method of upper and lower solutions. We have proved the existence of external solutions to nonlinear singular systems in a constructive manner. Our sequences constructed are the solutions of linear systems, therefore it is easy to realize the numerical calculation. And it has extended to nonlinear differential systems.

Key words: monotone iterative technique; the method of upper and lower solutions; the external problems; nonlinear singular systems

1　引言(Introduction)

由于在工程实践中，存在着大量的问题不能用简单的线性模型来描述，而必须由非线性模型来刻划，例如，电力系统，受限机器人系统等．因此对广义非线性系统进行研究，是有重要的理论价值和广泛的实际意义的．

单调迭代法和上下解的方法结合是证明非线性系统解存在性的强有力的工具，在解决非线性微分系统中起着重要的作用．Lakshmikantham 等人所著的"Monotone iterative technique for nonlinear differential equations"一书中已有系统的介绍[1]．使用这种方法研究非线性问题的解，不仅可以得到扇形区域上解的存在性结果，而且还可以提供求数值解的方案．因为所构造的逼近序列是线性系统的解，因此较易实现数值计算．

一般说来，使用逼近法证明非线性系统解的存在性，依次按以下三个步骤进行：1) 构造某类近似解序列；2) 证明所构造的近似解序列的收敛性；3) 证明近似解序列的极限函数即为已知问题的解．在这三个步骤中，最值得研究的是第 2)个步骤．对第 2)个步骤的研究就导致了单调迭代法的产生和发展．

迄今为止，单调迭代法已经推广到有限区间上定常系数矩阵的广义系统初值问题和边值问题[2,3]，以及矩形系数矩阵的边值问题[4]．文[5]利用微分不等式，首先通过变量变换将二阶广义系统的边值问题，降为一阶广义积分微分系统的初值问题，讨论了降阶系统解存在性的构造性证明，然后将所得结果还原到原二阶系统上，从而将文[4]的降阶思想引入到广义系统中，促进了单调迭代法在广义系统中的发展．

本文研究广义非线性系统极限值问题．在第 2 节中，给出了基本概念；在第 3 节中，应用单调迭代法讨论了广义非线性系统在有限区间上极限值问题解的存在性．

2　预备知识(Preliminary knowledge)

考察广义非线性系统如下[7]：

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\quad t \in [a, b], \tag{1}$$

$$0 = g(t, x(t), u(t)), \tag{2}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^s$, $f: [a, b] \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ 及 $g: [a, b] \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$.

* 基金项目：广东省自然科学基金资助项目(974101)．
收稿日期：1999－01－31；收修改稿日期：1999－12－03．

广义非线性系统(1),(2),当 $g\equiv 0$ 时,变成非线性微分系统;当 $f\equiv 0$ 时,变成非线性代数系统.

本文应用单调迭代法讨论广义非线性系统(1),(2)满足初始条件:

$$x(t_0)=x_0 \tag{3}$$

的问题,所得结果推广了非线性微分方程的极限值问题和非线性代数系统的结果.

本文所需要的主要假设是:

H0) 存在 $v_0=(v_x^{\mathrm T},v_u^{\mathrm T})^{\mathrm T},w_0=(w_x^{\mathrm T},w_u^{\mathrm T})^{\mathrm T}$,其中 $v_x,w_x\in C^1[[a,b],\mathbb{R}^r]$,$v_u,w_u\in C[[a,b],\mathbb{R}^s]$,有 $v_0(t)\leqslant w_0(t),t\in[a,b]$;

H1) 存在非负 $M_i(t)\in L^1[a,b]$ 和 $N_j(t)>0(i=1,\cdots,r;j=1,\cdots,s)$ 有

$$\begin{aligned}&f_i(t,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_s)-\\&f_i(t,x_1,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_s)\geqslant\\&-M_i(t)(x_i-\bar{x}_i);\\&g_j(t,x_1,\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_j,\cdots,u_s)-\\&g_j(t,x_1,\cdots x_r,u_1,\cdots,\bar{u}_j,\cdots,u_s)\geqslant\\&-N_j(t)(u_j-\bar{u}_j);\end{aligned}$$

H2) 对任意 $t\in[a,b]$,有 $\dot{v}_x\geqslant f(t,v_x,v_u)$,且 $v_x(t_0)\leqslant x_0$,以及对任意 $t\in[a,b]$,有 $0\leqslant g(t,v_x,v_u)$;

H3) 对任意 $t\in[a,b]$,有 $\dot{w}_x\leqslant f(t,v_x,v_u)$,且 $w_x(t_0)\geqslant x_0$,以及对任意 $t\in[a,b]$,有 $0\geqslant g(t,v_x,v_u)$;

H4) 对固定的 $t\in[a,b]$,$f_i(t,x_1,\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_s)$ 关于 $x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_s$ 单调非减,$g_j(t,x_1,\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_s)$ 关于 $x_1,\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_{j-1},u_{j+1},\cdots,u_s$ 单调非减;

H5) $|f_i(t,x_1,\cdots,x_r,u_1,\cdots,u_s)|\leqslant\lambda_i(t)|x_i|,i=1,\cdots,r,\lambda_i\in L^1[a,b]$.

定义 如果 $\rho(t)$ 和 $\gamma(t)$ 满足下列条件:

1) $\rho(t)$ 和 $\gamma(t)$ 皆为广义系统初值问题(1)~(3)的解,且 $v_0(t)\leqslant\rho(t)\leqslant\gamma(t)\leqslant w_0(t),t\in[a,b]$;

2) 对于广义系统初值问题(1)~(3)的任意解 $\xi(t)$ 满足:$v_0(t)\leqslant\xi(t)\leqslant w_0(t),t\in[a,b]$,都有 $\rho(t)\leqslant\xi(t)\leqslant\gamma(t),t\in[a,b]$;

则称 $\rho(t)$ 和 $\gamma(t)$ 分别为广义系统初值问题(1)~(3)在扇形区域 $\{(t,z(t))\mid t\in[a,b],v_0(t)\leqslant z(t)\leqslant w_0(t)\}$ 上的最小解和最大解.

注 在上述定义中,一般地,$v_0(t)$ 和 $w_0(t)$ 为满足 H0)的函数.

3 主要结果(Main result)

下面我们应用单调迭代法讨论了广义非线性系统在有限区间上极限值问题解的存在性.

定理 假设条件 H0)~H5)成立,则存在单调序列 $\{v_n(t)\},\{w_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上单调收敛于广义非线性系统(1),(2)满足初值条件(3)的最小解 $\rho(t)$ 和最大解 $\gamma(t)$,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n(t)=\rho(t),\lim\limits_{n\to\infty}w_n(t)=\gamma(t)$,且满足 $v_0(t)\leqslant\rho(t)\leqslant\gamma(t)\leqslant w_0(t),t\in[a,b]$.

证 对任意 $\eta=(\eta_x^{\mathrm T},\eta_u^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in[v_0,w_0]=\{(x^{\mathrm T},u^{\mathrm T})^{\mathrm T}:v_x\leqslant x\leqslant w_x,x\in C^1[[a,b],\mathbb{R}^r],v_u\leqslant u\leqslant w_u,u\in C[[a,b],\mathbb{R}^s]\}$.

考虑广义非线性系统的初值问题

$$\dot{x}_i=f_i(t,\eta(t))-M_i(t)(x_i-\eta_i),\quad x_i(t_0)=x_{0i}, \tag{4}$$

$$0=g_j(t,\eta(t))-N_j(t)(u_j-\eta_{r+j}), \tag{5}$$

其中 $v_{xi}(t_0)\leqslant x_{0i}\leqslant w_{xi}(t_0)$.

先讨论(4).由于(4)关于 x_i 是线性的,所以(4)在 $[a,b)$ 上存在唯一解 $x_i(t)(i=1,\cdots,r)$.

其次讨论(5).对上述 η,由(5)可唯一地确定解

$$u_j(t)=N_j^{-1}(t)g_j(t,\eta(t))+\eta_{r+j}(t),\quad j=1,\cdots,s. \tag{6}$$

定义映射 T 如下:$T_\eta=(x^{\mathrm T},u^{\mathrm T})^{\mathrm T}$,其中 $x=(x_1,\cdots,x_r)^{\mathrm T},u=(u_1,\cdots,u_s)^{\mathrm T}$ 是线性系统(4),(5)的唯一解.

我们可以证明映射 T 满足下列性质:

a) $v_0\leqslant Tv_0,w_0\geqslant Tw_0$;

b) 对任意 $\eta_1,\eta_2\in[v_0,w_0]$,且 $\eta_1(t)\leqslant\eta_2(t)$,$\eta_1(t_0),\eta_2(t_0)$ 存在,则有 $T\eta_1\leqslant T\eta_2$.

首先证明 a).令 $\varphi(t)=v_1-v_0$,其中 v_1 是(4)当取 $\eta=v_0$ 时所得的唯一解,则对 $i=1,\cdots,r$,有

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i(t)=\dot{v}_{1i}(t)-\dot{v}_{0i}(t)\leqslant\\ f_i(t,v_0(t))-M_i(t)(v_{1i}-\\ v_{0i}(t))-f_i(t,v_0(t))=-M_i(t)\varphi_i(t),\end{aligned}$$

且 $\varphi_i(t_0)\geqslant 0$,故

$$\varphi_i(t)\geqslant\varphi_i(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t}M_i(s)\mathrm{d}s)\geqslant 0.$$

即

$$v_{1i}(t)\geqslant v_{0i}(t),\quad i=1,\cdots,r.$$

又对 $j=1,\cdots,s$,由(6)及条件 H2)得

$$v_{1(r+j)}(t)=N_j^{-1}(t)g_j(t,v_0(t))+v_{0(r+j)}(t)\geqslant$$

$$v_{0(r+j)}(t),\quad j = 1,\cdots,s,$$

类似可得，$w_0 \geqslant Tw_0$.

其次证明 b). 令 $\phi(t) = \alpha_2 - \alpha_1$，其中 $\alpha_1 = T\eta_1, \alpha_2 = T\eta_2$，则对 $i = 1,\cdots,r$，有

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_i(t) = \dot{\alpha}_{2i}(t) - \dot{\alpha}_{1i}(t) = \\ &f_i(t,\eta_2(t)) - M_i(t)(\alpha_{2i}(t) - \eta_{2i}(t)) - \\ &f_i(t,\eta_1(t)) + M_i(t)(\alpha_{1i}(t) - \eta_{1i}(t)).\end{aligned}$$

由条件 H4) 及 H1)，有

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_i(t) \geqslant &f_i(t,\eta_{21},\cdots,\eta_{2i},\cdots,\eta_{2(r+s)}) - \\ &M_i(t)\phi_i(t) - \\ &f_i(t,\eta_{21},\cdots,\eta_{1i},\cdots,\eta_{2(r+s)}) + \\ &M_i(t)(\eta_{2i}(t) - \eta_{1i}(t)) \geqslant \\ &-M_i(t)(\eta_{2i}(t) - \eta_{1i}(t)) - M_i(t)\phi_i(t) + \\ &M_i(t)(\eta_{2i}(t) - \eta_{1i}(t)) = -M_i(t)\phi_i(t),\end{aligned}$$

且 $\phi_i(t_0) = 0$，故

$$\phi_i(t) \geqslant \phi_i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} M_i(s)\mathrm{d}s\right) = 0.$$

即

$$\alpha_{2i}(t) \geqslant \alpha_{1i}(t),\quad i = 1,\cdots,r.$$

又对 $j = 1,\cdots,s$，由(6)得

$$\begin{aligned}\phi_{r+j}(t) = \alpha_{2(r+j)}(t) - \alpha_{1(r+j)}(t) = \\ &N_j^{-1}(t)g_j(t,\eta_2(t)) + \eta_{2(r+j)}(t) - \\ &N_j^{-1}(t)g_j(t,\eta_1(t)) + \eta_{1(r+j)}(t).\end{aligned}$$

由条件 H4) 及 H1)，有

$$\begin{aligned}&\phi_{r+j}(t) \geqslant \\ &N_j^{-1}(t)[g_j(t,\eta_{21}(t),\cdots,\eta_{2(r+j)}(t),\cdots,\eta_{2(r+s)}(t)) - \\ &g_j(t,\eta_{21}(t),\cdots,\eta_{1(r+j)}(t),\cdots,\eta_{2(r+s)}(t))] + \\ &[\eta_{2(r+j)}(t) - \eta_{1(r+j)}(t)] \geqslant \\ &-[\eta_{2(r+j)}(t) - \eta_{1(r+j)}(t)] + \\ &[\eta_{2(r+j)}(t) - \eta_{1(r+j)}(t)] = 0,\end{aligned}$$

于是，我们可以定义序列

$$v_n(t) = Tv_{n-1}(t),\quad w_n(t) = Tw_{n-1}(t).\quad (7)$$

由 a) 和 b) 知

$$\begin{aligned}&v_0(t) \leqslant v_1(t) \leqslant \cdots \leqslant v_n(t) \leqslant \cdots \leqslant \\ &w_n(t) \leqslant \cdots \leqslant w_1(t) \leqslant w_0(t).\end{aligned}\quad (8)$$

由于对每个 $n, v_n(t) \leqslant w_0(t), t \in [a,b]$，所以 $\{v_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上单调地收敛，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(t) = \rho(t)$. 定义 $F_n(t) = f(t,v_n(t))$，则 $\{F_{in}(t)\}_{n=1}^{\infty}(i = 1,\cdots,r)$ 是一连续序列，所以

$$\lim_{n\to\infty} F_{in}(t) = \lim_{n\to\infty} f_i(t,v_n(t)) = f_i(t,\rho(t)) = F_i(t).$$

由可测函数的极限函数仍然可测知，$F_i(t)$ 在 $[a,b]$ 上可测，且由条件 H5)，有

$$\begin{aligned}|F_{in}(t)| = |f_i(t,v_n(t))| \leqslant \lambda_i(t)|v_{ni}(t)| \leqslant \\ \lambda_i(t)\max\{|v_{0i}(t)|,|w_{0i}(t)|\},\end{aligned}$$

因为 $\int_t^b \lambda_i(s)\mathrm{d}s < \infty$，所以 $\int_t^b f_i(s,\rho(s))\mathrm{d}s$ 存在. 现由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_t^b F_{in}(s)\mathrm{d}s = \int_t^b F_i(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_t^b f_i(s,v_n(s))\mathrm{d}s = \int_t^b f_i(s,\rho(s))\mathrm{d}s.$$

又因 $v_{(n+1)i}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}v_{(n+1)i}(t) = x_{0i} - \int_t^b f_i(s,v_n(s))\mathrm{d}s + \\ \int_t^b M_i(s)(v_{(n+1)i}(s) - v_{ni}(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，有

$$\rho_i(t) = x_{0i} - \int_t^b f_i(s,\rho(s))\mathrm{d}s,$$

所以 $\rho_i(t)$ 是绝对连续的，从而 $\rho_i(t)$ 是连续的.

对于 $j = 1,\cdots,s$，有

$$N_j(t)v_{(n+1)(r+j)}(t) - v_{n(r+j)}(t) = g_j(t,v_n(t)).$$

由 g 的连续性，当 $n \to \infty$ 时，有 $0 = g_j(t,\rho(t))$，故 $\rho(t)$ 是广义非线性系统(1)，(2) 满足初值条件(3) 的解. 同理可证 $\gamma(t)$ 也是广义非线性系统(1)，(2) 满足初值条件(3) 的解.

对于(1) ~ (3) 的任意解 $\xi(t)$ 满足：

$$v_0(t) \leqslant \xi(t) \leqslant w_0(t),$$

利用归纳法可以证明：

$$v_0(t) \leqslant \rho(t) \leqslant \xi(t) \leqslant \gamma(t) \leqslant w_0(t),\ t \in [a,b].$$

从而 $\rho(t), \gamma(t)$ 分别是(1) ~ (3)的最小解和最大解.　证毕.

参考文献(References)

[1] Ladde G S, Laksmikantham V and Vatsala A S. Monotone Iterative *Technique for Nonlinear Differential Equations* [M]. London: Pitman, 1985

[2] Uvah J A and Vatsala A S. Monotone method for first order singular systems with boundary conditions [J]. J Appl. Math. Simulation, 1989, 2(4): 217 – 224

[3] Vatsala A S. Monotone iterative technique for singular systems of differential equations [A]. In: Proceeding of International Conference on Nonlinear Analysis & Applications [C]. New York: Dekker, 1987, 559 – 582

[4] Uvah J A and Vatsala A S. Monotone iterative technique for nonlinear

boundary value problems of first-order differential systems with rectangular coefficients [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, 162(2): 482 - 493

[5] Wang W and Liu Y Q. Monotone iterative technique for boundary value problems of second order singular differential systems [J]. J. System Science & System Engeenng, 1995, 4(3): 266 - 272

[6] 王伟,史希福.三阶常微分方程两点边值问题解的存在性及单调迭代法[J].数学学报,1992,35(2):213-219

[7] Owense D H and Jones R P. Iterative solution of constrained differential/algebraic systems [J]. Int. J Control, 1987, 27(6): 957 - 974

本文作者简介

王 伟 1963年生.1985年和1988年于东北师范大学数学系获理学学士和理学硕士学位,1996年于华南理工大学自动控制工程系获工学博士学位.现为华南理工大学自动控制工程系系统工程研究所讲师.主要研究方向:广义系统的稳定、镇定与控制、交通工程,管理信息系统.

杨建辉 1961年生.1999年于华南理工大学自动控制工程系获工学博士学位.现为华南理工大学工商管理学院讲师.主要研究方向:广义分布参数系统的镇定与控制

刘永清 见本刊2000年第1期第8页.

(上接第250页)

附录(Appendix)

引理3的证明:

注意到 $N + N^{T} < 0$ 并利用引理2,得

$$Z + Z^{T} < 0,$$

及

$$P + P^{T} - (X + Y^{T})(Z + Z^{T})^{-1}(Y + X^{T}) < 0. \tag{A1}$$

令

$$H = -(Z^{-1} + (Z^{T})^{-1})^{-1},$$

注意到

$$Z + Z^{T} < 0,$$

及

$$H = Z(-Z - Z^{T})^{-1}Z^{T},$$

可得

$$H > 0.$$

因此存在可逆阵 W 使得 $H = W^{T}W$.于是由[9]得

$$XZ^{-1}HZ^{-1}Y + Y^{T}(Z^{T})^{-1}H(Z^{T})^{-1}X^{T} =$$
$$(XZ^{-1}W^{T})(WZ^{-1}Y) + (Y^{T}(Z^{T})^{-1}W^{T})(W(Z^{T})^{-1}X^{T}) \leqslant$$
$$(XZ^{-1}W^{T})(W(Z^{T})^{-1}X^{T}) + (Y^{T}(Z^{T})^{-1}W^{T})(WZ^{-1}Y) =$$
$$-X(Z + Z^{T})^{-1}X^{T} - Y^{T}(Z + Z^{T})^{-1}Y, \tag{A2}$$

利用矩阵求逆引理得到

$$(XZ^{-1}Y + Y^{T}(Z^{T})^{-1}X^{T}) -$$
$$(X + Y^{T})(Z + Z^{T})^{-1}(Y + X^{T}) =$$
$$-X(Z + Z^{T})^{-1}X^{T} - Y^{T}(Z + Z^{T})^{-1}Y -$$
$$XZ^{-1}HZ^{-1}Y - Y^{T}(Z^{T})^{-1}H(Z^{T})^{-1}X^{T}, \tag{A3}$$

于是由(A2)及(A3)得

$$XZ^{-1}Y + Y^{T}(Z^{T})^{-1}X^{T} \geqslant$$
$$(X + Y^{T})(Z + Z^{T})^{-1}(Y + X^{T}). \tag{A4}$$

注意到(A1)与(A4)即得所证.

本文作者简介

徐胜元 1968年生.现为南京理工大学博士研究生.主要研究方向为广义系统、鲁棒控制和自适应控制.

杨成梧 1936年生.1961年毕业于哈尔滨军事工程学院,现为南京理工大学教授,博士生导师.主要研究方向为2D系统,广义系统,高速采样控制,H_{∞}控制和离散事件动态系统等.