

文章编号: 1000-8152(2000)02-0259-05

# 模型不确定系统的鲁棒预测控制

陈忠保

李嗣福

(中国科技大学计算机科学技术系·合肥, 230027) (中国科技大学自动化系·合肥, 230027)

**摘要:** 针对一类脉冲传递函数描述的模型不确定系统, 基于预测控制和鲁棒控制相结合的策略, 提出一种鲁棒预测控制器的设计方法, 并讨论了该方法允许的模型摄动鲁棒界. 仿真结果表明文中方法的有效性和理论分析的正确性.

**关键词:** 预测控制; 鲁棒控制; 模型不确定; 稳定性  
**文献标识码:** A

模型不确定系统

## Robust Predictive Control of Systems with Model Uncertainty

CHEN Zhongbao

(Department of Computer Science and Technology, University of Science and Technology of China · Hefei, 230027, P. R. China)

LI Sifu

(Department of Automation, University of Science and Technology of China · Hefei, 230027, P. R. China)

**Abstract:** A synthetic method for robust predictive control of uncertain systems described by impulse transfer function is presented in the paper. The strategy is developed from both predictive control and robust control. Also, the robust bound of model uncertainty is discussed when the method is employed. Finally, the simulation results are presented to illustrate the effectiveness of the method and the correctness of the theoretic analysis.

**Key words:** predictive control; robust control; model uncertainty; stability

### 1 引言(Introduction)

近年来,随着预测控制在应用领域的不断成功,预测控制的理论研究也愈来愈深入.我国控制界的有关专家密切关注着预测控制的最新发展,多次发表关于预测控制的综述性文章<sup>[1-3]</sup>.他们在论文中都对预测控制的鲁棒性给予了极大的关注,这体现出鲁棒性在预测控制研究中的重要地位.但长期以来,由于预测控制所采用的启发式模式,导致鲁棒性分析存在一定的困难.

最近,意大利学者 De Nicolao 给出了一种新颖的鲁棒预测控制方案<sup>[4]</sup>,它表明预测控制对系统脉冲响应序列的摄动具有鲁棒性.在此,我们研究了比脉冲响应序列模型更一般的脉冲传递函数模型,进而讨论了该模型下的鲁棒预测控制器设计问题,并分析了模型摄动的鲁棒稳定界,得到了系统的鲁棒稳定性和模型摄动之间的量化关系,为研究预测控制的鲁棒性提供了一条新的途径.

### 2 问题描述(Problem statement)

假定标称系统用脉冲传递函数描述如下

$$A_0(q^{-1})y_m(k) = B_0(q^{-1})u(k), \quad (1)$$

其中

$$A_0(q^{-1}) = 1 + a_1^0 q^{-1} + \dots + a_n^0 q^{-n},$$

$$B_0(q^{-1}) = b_1^0 q^{-1} + \dots + b_m^0 q^{-m},$$

$q^{-1}$  是一步时延算子,而实际系统为

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k). \quad (2)$$

实际系统(2)和标称系统(1)之间满足

$$\delta A(q^{-1}) = A(q^{-1})/A_0(q^{-1}), \quad \delta B(q^{-1}) = B(q^{-1}) - B_0(q^{-1}), \quad (3)$$

$\delta A(q^{-1})$  和  $\delta B(q^{-1})$  为系统的摄动多项式,描述如下:

$$\delta A(q^{-1}) = 1 + \delta a_1 q^{-1} + \dots + \delta a_{\delta_n} q^{-\delta_n},$$

$$\delta B(q^{-1}) = \delta b_1 q^{-1} + \dots + \delta b_{\delta_m} q^{-\delta_m}, \quad (4)$$

其中  $\delta a_i (i = 1, 2, \dots, \delta_n)$  和  $\delta b_i (i = 1, 2, \dots, \delta_m)$  是已知变化范围的模型摄动参数,满足  $|\delta a_i| < \delta a_i (i = 1, 2, \dots, \delta_n)$ ,  $|\delta b_i| < \delta b_i (i = 1, 2, \dots, \delta_m)$ ,  $\delta \bar{a}_i$  和  $\delta \bar{b}_i$  分别是  $\delta a_i$  和  $\delta b_i$  的最大变化范围.

在上文的模型不确定描述中,如果取

$$A(q^{-1}) = A_0(q^{-1}) = 1,$$

$$B_0(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N h_i q^{-i},$$

$$\delta B(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta h_i q^{-i},$$

即是文[4]所讨论的脉冲响应序列不确定模型.

下面我们假设: A1) 标称系统(1)已知; A2) 标称系统和实际系统满足关系式(3)和(4); A3)  $\delta A(q^{-1})$  是 Hurwitz 多项式,  $\delta_n$  是有限的正整数. 其中假设 A3) 意味着实际系统和标称系统的不稳模态是匹配的. 在此前提下, 本文将预测控制和鲁棒控制结合起来, 给出一种确保系统鲁棒稳定的控制方法及允许的模型摄动范围.

### 3 鲁棒预测控制器的设计 (Design of robust predictive controllers)

通常, 预测控制器的设计主要针对标称系统, 着眼于提高标称系统的闭环性能, 当标称系统与实际系统失配时, 使标称系统性能良好的控制器, 有可能使实际系统闭环失稳. 因而, 有必要在保持标称系统良好性能的前提下, 同时提高实际系统的鲁棒稳定性. 为此, 我们将鲁棒预测控制器的设计过程分成两步. 首先, 对标称系统设计一性能良好的预测控制器; 尔后, 再设计一额外的鲁棒控制器, 提高包括实际系统、标称系统、预测控制器在内的增广系统的鲁棒性.

#### 3.1 预测控制器的设计 (Design of predictive controllers)

针对标称系统(1)设计预测控制器的方法较多, 在此, 我们采用状态空间方法<sup>[5]</sup>, 结果如下.

建立和系统(1)等价的预测状态空间模型

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + H\Delta u(k), \\ y_m(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $x(k)$  是  $N(N \geq \max(n+1, m))$  维预测状态向量,  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$  是当前控制增量,  $G, H, C$  的形式如下

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ 0 & -\alpha_{n+1}^0 & \cdots & -\alpha_1^0 \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$H = \begin{bmatrix} g_1^0 \\ g_2^0 \\ \vdots \\ g_{N-1}^0 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0, \dots, 0]_{1 \times N},$$

$\alpha_i^0 (i = 1, 2, \dots, n+1)$  是  $A_0 \Delta (\Delta = 1 - q^{-1})$  的系数,  $g_i^0 (i = 1, 2, \dots, N)$  是标称系统(1)的阶跃响应序列的前  $N$  项.

取预测控制的性能指标为

$$J = \sum_{i=N_1}^{N_2} [y_r(k+i) - \hat{y}_m(k+i)]^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_u} \Delta u^2(k+i-1), \quad \lambda > 0,$$

其中  $[N_1, N_2]$  是预测区间,  $N_u$  是控制优化长度, 满足  $\Delta u(k+i) = 0 (i \geq N_u)$ ,  $y_r(k+i)$  是参考输入序列,  $\hat{y}_m(k+i)$  是考虑了当前时刻输出  $y(k)$  后的模型输出修正值, 即

$\hat{y}_m(k+i) = y_m(k+i) + [y(k) - y_m(k)]$ , 而  $y_m(k+i)$  是由(5)式获得的  $k+i$  时刻的模型输出值.

在上述条件下, 容易得到预测控制律<sup>[6]</sup>

$$\Delta u(k) = [1, 0, \dots, 0] (H_u^T H_u + \lambda I)^{-1} H_u^T [Y_r(k) - \hat{Y}_p(k)], \quad (6)$$

其中

$$Y_r(k) = [y_r(k+N_1), y_r(k+N_1+1), \dots, y_r(k+N_2)]^T,$$

$$\hat{Y}_p(k) = H_p x(k) + F[y(k) - y_m(k)]$$

是模型预测修正值, 有关矩阵的取值如下

$$H_u = \begin{bmatrix} g_{N_1}^0 & g_{N_1-1}^0 & \cdots & g_{N_1-N_u+1}^0 \\ g_{N_1+1}^0 & g_{N_1}^0 & \cdots & g_{N_1-N_u}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{N_2}^0 & g_{N_2-1}^0 & \cdots & g_{N_2-N_u+1}^0 \end{bmatrix},$$

$$g_i^0 = \begin{cases} 0, & i \leq 0, \\ CG^{-1}H, & i > 0, \end{cases}$$

$$H_p = \begin{bmatrix} CG^{N_1} \\ CG^{N_1+1} \\ \vdots \\ CG^{N_2} \end{bmatrix}, \quad F = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

利用  $\hat{Y}_p(k)$  和  $x(k), \Delta u(k), y(k)$  之间的关系, 可将控制律(6)表示成多项式形式<sup>[6]</sup>

$$\left(1 + \frac{P(q^{-1})}{A_0(q^{-1})}\right) \Delta u(k) = K(q^{-1}) y_r(k+N_2) - f y(k). \quad (7)$$

式中

$$K(q^{-1}) = k_{N_2-N_1+1} + k_{N_2-N_1} q^{-1} + \cdots + k_1 q^{-N_2+N_1},$$

$$f = \sum_{i=1}^{N_2-N_1+1} k_i, \quad P(q^{-1}) = K \begin{bmatrix} P_{N_1}(q^{-1}) \\ \vdots \\ P_{N_2}(q^{-1}) \end{bmatrix},$$

$K = [k_1, k_2, \dots, k_{N_2 - N_1 + 1}]$  是  $(H_u^T H_u + \lambda I)^{-1} H_u^T$  的第一行元素,  $P_i(q^{-1})$  是  $q^{-1}$  的多项式, 满足

$$\frac{P_i(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} = C(G - I)(qI - G)^{-1}H.$$

当模型与实际系统一致时, 可通过适当选择预测控制参数 ( $N_1, N_2, N_u$  和  $\lambda$ ), 构成稳定的闭环系统<sup>[6]</sup>. 当模型表示的标称系统与实际系统失配时, 则需设计额外的鲁棒控制器, 提高系统的鲁棒性能.

### 3.2 鲁棒控制器的设计 (Design of robust controllers)

采用的系统结构如图 1 所示.

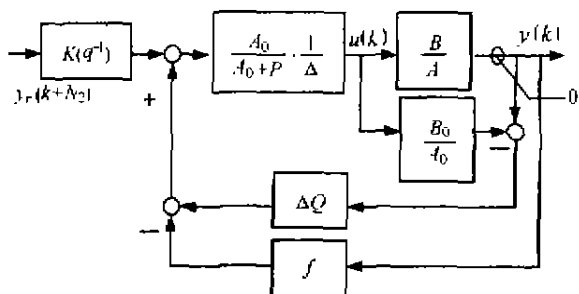


图 1 鲁棒预测控制的系统结构

Fig. 1 System structure of robust predictive control

在图 1 中,  $K(q^{-1})$ ,  $\frac{A_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1}) + P(q^{-1})} \cdot \frac{1}{\Delta}$  和  $f$  是根据标称系统设计的预测控制器. 为了提高系统的鲁棒性, 引入标称系统  $\frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})}$  作为内模, 另外增加了鲁棒控制器  $\Delta Q(q^{-1})$ . 下面给出求取  $Q(q^{-1})$  的方法.

从图 1 出发, 不考虑回路外的信号  $K(q^{-1})y_r(k + N_2)$ , 从 0 点断开, 可获得实际的开环传函

$$L(q^{-1}) = \frac{A_0}{A} \frac{(f - \Delta Q)B}{\Delta(A_0 + P) + \Delta QB_0}$$

和标称开环传函

$$\bar{L}(q^{-1}) = \frac{(f - \Delta Q)B_0}{\Delta(A_0 + P) + \Delta QB_0}.$$

考虑(3)式的不确定描述, 有

$$L(q^{-1}) = \frac{1}{\delta A} \frac{(f - \Delta Q)B}{\Delta(A_0 + P) + \Delta QB_0}.$$

当假设 A3) 成立时,  $L(q^{-1})$  与  $\bar{L}(q^{-1})$  具有相同数目的不稳定极点 (如果存在不稳定极点). 根据奈魁斯特定理, 当

$$|L(e^{-j\omega}) - \bar{L}(e^{-j\omega})| < |1 + \bar{L}(e^{-j\omega})|, \quad \forall \omega \in [0, \pi] \quad (8)$$

时, 实际闭环系统与标称闭环系统的稳定性等价.

将  $L(q^{-1})$  和  $\bar{L}(q^{-1})$  的表达式代入(8)式中, 有稳定性等价的充分条件

$$\left| \frac{f - \Delta Q}{\Delta(A_0 + P) + fB_0} \right| < \left| \frac{B}{\delta A} - B_0 \right|, \quad \forall \omega \in [0, \pi]. \quad (9)$$

为了保证上面的不等式成立, 我们通过设计  $Q$ , 使

$$\frac{f - \Delta Q}{\Delta(A_0 + P) + fB_0} \text{ 的无穷范数极小, 即} \quad (10)$$

$$\min_{Q(e^{-j\omega})} \left\| \frac{f - \Delta Q}{\Delta(A_0 + P) + fB_0} \right\|_{\infty}.$$

问题(10)可转换为标量模型匹配问题来求解.

令

$$T_1(e^{-j\omega}) = \frac{f}{(1 - e^{-j\omega})(A_0 + P) + fB_0},$$

$$T_2(e^{-j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{(1 - e^{-j\omega})(A_0 + P) + fB_0},$$

从而(10)式等价于

$$\min_{Q(e^{-j\omega})} \|T_1 - QT_2\|_{\infty}.$$

其中  $T_1$  的分子项是标量,  $T_2$  在  $e^{-j\omega} = 1$  处有一零点, 依据[7], 解为

$$Q(q^{-1}) = \frac{T_1(q^{-1}) - T_1(1)}{T_2(q^{-1})}. \quad (11)$$

将  $T_1(q^{-1}), T_2(q^{-1})$  的具体形式代入(11)式, 得到

$$Q(q^{-1}) = \frac{f[B_0(1) - B_0] - \Delta(A_0 + P)}{\Delta B_0(1)}. \quad (12)$$

因为  $B_0(1) - B_0(q^{-1})$  显含因子  $\Delta$ , 故分子、分母中的  $\Delta$  可以对消, 使  $Q(q^{-1})$  成为有限项的  $q^{-1}$  多项式.  $Q(q^{-1})$  即是我们所要设计的鲁棒控制器.

从整个设计过程看, 预测控制器的设计是独立进行的, 鲁棒控制器的设计依赖于前者. 由于鲁棒控制器的存在, 当模型失配时, 可提高系统的鲁棒稳定性, 而没有模型失配时, 也不会破坏标称系统所具有的良好性能, 所以增加鲁棒控制器只会改善系统的性能.

### 4 鲁棒稳定性分析 (Analysis of robust stability)

在图 1 所示的结构中, 预测控制器和鲁棒控制器分别采用(7)式和(12)式. 下面, 将分析这样构造的系统对模型摄动的鲁棒稳定性.

**定理** 在假设 A1) ~ A3) 下, 如果单独的预测控制律(7)使标称系统稳定, 则当模型摄动满足

$$\left| \frac{B(e^{-j\omega})}{\delta A(e^{-j\omega})} - B_0(e^{-j\omega}) \right| < |B_0(1)|, \quad \forall \omega \in [0, \pi], \quad (13)$$

在同时采用(7)式和(12)式的鲁棒预测控制时, 图 1 所示的系统是闭环稳定的.

证 在假设 A1)~A3)下,图 1 所示系统中的鲁棒控制器可由问题(10)求得,将所得结果(12)式代入(10)式,得到

$$\min_{Q \in \mathcal{R}^m} \left\| \frac{f - \Delta Q}{\Delta(A_0 + P) + fB_0} \right\|_{\infty} = |B_0(1)|^{-1}.$$

对照(9)式,易知当

$$|B_0(1)|^{-1} < \left| \frac{B}{\delta A} - B_0 \right|^{-1}, \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

时,即(13)式成立时,(9)式也成立,从而满足了奈魁斯特定理的条件,于是,图 1 结构下的标称闭环系统和实际闭环系统的稳定性等价。

现考虑标称闭环系统的稳定性,由定理所给条件,单独的预测控制器可保证标称系统稳定,在图 1 中,去掉内模  $\frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})}$  和鲁棒控制器  $\Delta Q(q^{-1})$ ,且不考虑回路外的信号,得到闭环特征多项式为  $\Delta(A_0 + P) + fB_0$ ,显然其零点都在单位圆内,再由  $\bar{L}(q^{-1})$  的形式,可推出对应的标称闭环系统的特征多项式也为  $\Delta(A_0 + P) + fB_0$ ,所以,图 1 所示的标称闭环系统是稳定的,根据奈魁斯特定理,图 1 中的实际闭环系统也是稳定的。

实际应用中,(13)式的条件较难判别,可在某些特殊情况下,得到更易于操作的鲁棒稳定条件。

**推论 1** 当  $\delta A(q^{-1}) = 1$  时,前述定理的鲁棒稳定性有充分条件

$$|\delta B(e^{-j\omega})| < |B_0(1)|, \quad \forall \omega \in [0, \pi].$$

该推论可由定理直接得到,文[4]的结果是  $A_0(q^{-1}) = 1$  时的特例。

**推论 2** 当  $\sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i < 1$  时,前述定理的鲁棒稳定性有充分条件

$$\frac{\|B_0\|_{\infty} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{b}_i}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i} < |B_0(1)|, \quad (14)$$

证 考虑到(3)式的模型不确定描述,有

$$\begin{aligned} \left| \frac{B}{\delta A} - B_0 \right| &= \left| \frac{(B_0 + \delta B)A_0}{A} - B_0 \right| \leq \\ & \left| \frac{A_0 B_0}{A} - B_0 \right| + \left| \frac{\delta B}{\delta A} \right| \leq \\ & |B_0| \cdot \left| \frac{1 - \delta A}{\delta A} \right| + \left| \frac{\delta B}{\delta A} \right| \leq \\ & \frac{|B_0| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{b}_i}{|\delta A|}, \quad \forall \omega \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

当限定  $\sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i < 1$  时,有

$$|\delta A| \geq 1 - |\delta A - 1| \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i,$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{B}{\delta A} - B_0 \right| &\leq \frac{|B_0| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{b}_i}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i} \leq \\ & \frac{\|B_0\|_{\infty} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{b}_i}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i}. \end{aligned}$$

故只要(14)式成立,就有

$$\left| \frac{B}{\delta A} - B_0 \right| < |B_0(1)|, \quad \forall \omega \in [0, \pi].$$

由前文的定理知,当扰动多项式  $\delta A(q^{-1}), \delta B(q^{-1})$  的参数在  $\delta \bar{a}_i, \delta \bar{b}_i$  界定的范围内时,系统具有鲁棒稳定性。

推论 1 表明,当实际系统和标称系统的分母多项式相匹配时,最多可允许 100% 的稳态增益变化,而当分母多项式不匹配时,由推论 2 可知,扰动的允许范围将变小,另外,根据模型不确定的描述形式可知,定理和推论适用于较广泛的对象,其一,适用于时延、阶次变化或不确定的系统,即具有结构鲁棒性;其二,适用于参数变化的系统,即具有参数鲁棒性。

### 5 仿真例子和结论 (Simulation results and conclusions)

假设标称系统用差分方程描述为

$$(1 - 1.2q^{-1})(1 - 0.5q^{-1})y(k) = (q^{-1} + 2q^{-2})u(k),$$

模型扰动为

$$\delta A(q^{-1}) = 1 + 0.1q^{-1}, \quad \delta B(q^{-1}) = 1q^{-1} - 1.3q^{-2}.$$

用推论 2 可验证扰动满足(14)式。

$$\begin{aligned} \frac{\|B_0\|_{\infty} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{b}_i}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta \bar{a}_i} &= \\ \frac{3 \times 0.1 + 2.3}{1 - 0.1} &< |B_0(1)| = 3. \end{aligned}$$

所以,可用文中的鲁棒预测控制器,使实际系统闭环稳定。

针对标称系统,取预测控制器参数为  $N_1 = 1, N_2 = 5, N_u = 3, \lambda = 0.1$ ,得到形如(7)式的预测控制器,其中

$$K(q^{-1}) = 0.0311 - 0.0714q^{-1} - 0.0171q^{-2} + 0.3072q^{-3} + 0.1501q^{-4},$$

$$f = 0.4, \quad A_0(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.6q^{-2},$$

$$P(q^{-1}) = 2.4504q^{-1} - 0.5910q^{-2}.$$

根据(12)式得到的鲁棒控制器为

$$Q(q^{-1}) = 0.0666 + 0.0165q^{-1} - 0.0030q^{-2}.$$

只用预测控制器作用于标称系统,得到闭环阶跃响应如图2所示,可见预测控制能够保证标称系统的稳定性,但是,这样的预测控制器作用于实际系统时,却是不稳定的,实际系统的闭环阶跃响应如图3所示.如果用本文所提的预测加鲁棒的控制方法,由仿真得到的闭环阶跃响应如图4所示,可见系统闭环稳定,这和理论结果是一致的.

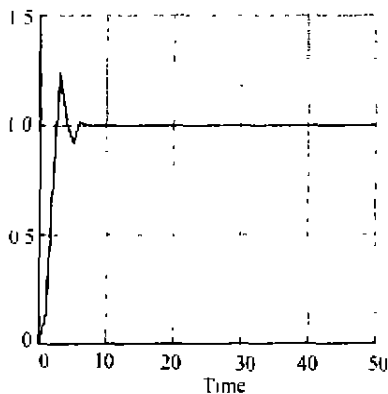


图2 标称系统的预测控制阶跃响应

Fig. 2 Step response of nominal predictive control system

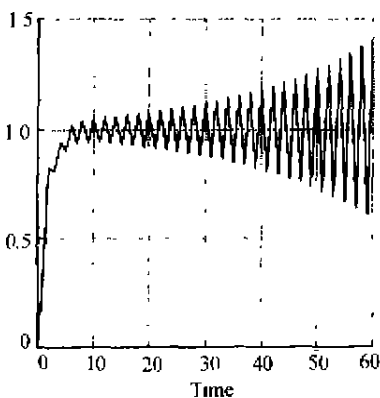


图3 预测控制在模型扰动下的发散情形

Fig. 3 Divergence of predictive control under model perturbation

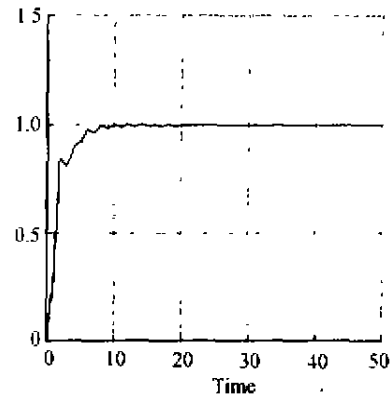


图4 预测加鲁棒后的收敛情形

Fig. 4 Convergence of predictive and robust control

以上,本文针对脉冲传递函数描述的模型不确定系统,详细讨论了一种鲁棒和预测相结合的控制策略,给出了鲁棒控制器的设计方法,并分析了模型扰动和鲁棒稳定性之间的定量关系,避免了传统的预测控制由于采用启发式模式而造成的鲁棒分析不易量化的不足.文中所给的鲁棒稳定性条件都是充分的,进一步寻找较少保守性的结果还有待更深入的研究.

本文的工作得到科大恒星公司的资助,在此表示感谢.

#### 参考文献(References)

- [1] 席裕庚,许晓鸣,张钟俊.预测控制的研究现状和多层智能预测控制[J].控制理论与应用,1989,6(2):1-7
- [2] 徐立鸿.预测控制的研究现状和问题[J].控制理论与应用,1994,11(1):121-125
- [3] 王伟,杨建军.广义预测控制:理论、算法与应用[J].控制理论与应用,1997,14(6):777-786
- [4] De Nicolao G, Magni L and Scattolini R. Robust predictive control of systems with uncertain impulse response[J]. Automatica, 1996,32(10):1475-1479
- [5] 李嗣福,陈忠保.GPC的预测状态空间形式及预测控制算法形式的统一[J].控制与决策,1998,13(1):34-38
- [6] 陈忠保.基于状态空间方法的预测控制系统分析及其控制器设计[D].合肥:中国科技大学,1997
- [7] 解学书,钟宜生.H.控制理论[M].北京:清华大学出版社,1994

#### 本文作者简介

陈忠保 见本刊2000年第1期第106页.

李嗣福 见本刊2000年第1期第106页.