文章编号：1000-8152(2000)02-0264-03

264-266,269

非线性随机离散系统推广卡尔曼滤波方法收敛性分析

宋志勇
(中国科学院武汉物理与数学研究所·武汉，430071)

摘要：讨论了非线性随机离散系统的推广卡尔曼滤波算法的收敛性.基于 Boutayeb M 的一阶线性化技巧，得到了确保局部渐近收敛的充分条件.

关键词：收敛性分析；随机非线性离散系统；推广卡尔曼滤波
文献标识码：A

非线性随机离散系统

Convergence Analysis of the Extended Kalman Filter for Nonlinear Random Discrete-Time Systems

SONG Zhiyong
(Wuhan Institute of Physics and Mathematics, the Chinese Academy of Sciences · Wuhan, 430071, P.R.China)

Abstract: In this paper, convergence analysis of the extended Kalman filter (EKF), when used as an observer for nonlinear random discrete-time systems, is presented. Based on M. Boutayeb's formulation of the first-order linearizaton technique, sufficient conditions to ensure local asymptotic convergence are established.

Key words: convergence analysis; random nonlinear discrete-time systems; extended Kalman filter

1 引言(Introduction)

自 60 年代起，随着很多物理过程用非线性数学模型描述研究的同时，非线性动力系统的状态估计问题得到了发展.为了增加控制系统设计的可行性及精确性，提出了一些非线性状态估计方法.推广卡尔曼滤波方法(EKF)是一种应用最广泛的非线性系统滤波方法.EKF 方法是把非线性模型一阶近似再利用古典 Kalman 滤波方法得到.研究 EKF 算法有很多文献，但是很少工作分析滤波的稳定性与收敛性.主要因为 EKF 算法只是近似，状态估计的递推公式是在实际状态附近得到的，因而比较困难.

文献[1]研究了线性时不变系统参数与状态联合估计的渐近性、文献[2]研究了非线性确定系统 EKF 局部渐近性，这些都需要保证 Riccati 方程的一致有界.文献[3]利用一阶线性化技巧研究了非线性确定离散系统 EKF 的收敛性.

本文基于 Boutayeb M 的方法、引进时变矩阵 α_k,β_k，对非线性随机系统 EKF 进行收敛性分析，可以了解到即使对于效果较差的一阶近似，如果对已知噪声 R_k、Q_k 进行适当约束，我们也可以得到 EKF 的渐近性.

2 EKF 算法阐述(EKF algorithm formulation)

考虑非线性系统

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + W_k, \tag{1a}$$

$$y_k = h(x_k, u_k) + V_k, \tag{1b}$$

其中状态 $x_k \in \mathbb{R}^n$，输入 $u_k \in \mathbb{R}^r$，输出 $y_k \in \mathbb{R}^p$，$f \in \mathbb{R}^n$，$h \in \mathbb{R}^p$，f, h 可微.W_k, V_k 为零均值互不相关的高斯白噪声.

$$EW_kW_j^{\mathrm{T}} = Q_k\delta_{kj},\quad Q_k \geqslant 0,$$

$$EV_kV_j^{\mathrm{T}} = R_k\delta_{kj},\quad R_k > 0.$$

1) 状态估计递推公式

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}e_{k+1}, \tag{2}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}} + R_{k+1})^{-1}, \tag{3}$$

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k}. \tag{4}$$

2) 预报递推公式

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(\hat{x}_k, u_k), \tag{5}$$

$$P_{k+1/k} = F_kP_kF_k^{\mathrm{T}} + Q_k, \tag{6}$$

其中

$$e_{k+1} = y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}), \tag{7}$$

$$F_k = F(\hat{x}_k, u_k) = \left.\frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_k}. \tag{8}$$

收稿日期：1998-05-25；收修改稿日期：1999-06-16.

$$H_{k+1}=H(\hat{x}_{k+1/k},u_{k+1})=\left.\frac{\partial h(x_{k+1},u_{k+1})}{\partial x_{k+1}}\right|_{x_{k+1}=\hat{x}_{k+1/k}}. \tag{9}$$

在讨论EKF收敛性的问题中，R_k,Q_k 的约束将起到重要作用.

3 收敛性分析(Convergence analysis)

本节将对所考虑非线性系统的收敛性分析给出一个简单方法.

令 $\tilde{x}_{k+1},\tilde{x}_{k+1/k}$ 为状态估计及状态预测误差向量

$$\tilde{x}_{k+1}=x_{k+1}-\hat{x}_{k+1}, \tag{10}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k}=x_{k+1}-\hat{x}_{k+1/k}. \tag{11}$$

引进李亚谱诺夫函数 V_k

$$V_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}^{-1}\tilde{x}_{k+1}. \tag{12}$$

我们的目的是确定使得 V_{k+1} 递减的条件.引进未知对角阵 α_{k+1} 和 β_{k+1}，$\alpha_{k+1}\in\mathbb{R}^{p\times p}$，$\beta_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都为时变且

$$\alpha_{k+1}=\mathrm{diag}\{\alpha_{k+1}^{(1)},\cdots,\alpha_{k+1}^{(p)}\}, \tag{13}$$

$$\beta_k=\mathrm{diag}\{\beta_k^{(1)},\cdots,\beta_k^{(n)}\}, \tag{14}$$

$$H_{k+1}^{(i)}\tilde{x}_{k+1/k}=\alpha_{k+1}^{(i)}e_{k+1}^{(i)}, \tag{15}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k}^{(j)}=\beta_k^{(j)}F_k^{(j)}\tilde{x}_k. \tag{16}$$

$H_{k+1}^{(i)},F_k^{(j)}$ 分别为 H_{k+1} 和 F_k 的第 i,j 行.(15)，(16)式为我们研究收敛性的关键所在.

由(15)，(16)知

$$\alpha_{k+1}e_{k+1}=H_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k}, \tag{17}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k}=\beta_kF_k\tilde{x}_k. \tag{18}$$

x_{k+1} 减去(2)的两边得到

$$\tilde{x}_{k+1}=\tilde{x}_{k+1/k}-P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}}+R_{k+1})^{-1}e_{k+1}. \tag{19}$$

从(3)，(4)得到

$$P_{k+1}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}=P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}}+R_{k+1})^{-1}, \tag{20}$$

$$P_{k+1}^{-1}=P_{k+1/k}^{-1}+H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}. \tag{21}$$

把(20)代入(19)，(19)代入(12)得

$$V_{k+1}=(\tilde{x}_{k+1/k}-P_{k+1}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}e_{k+1})^{\mathrm{T}}P_{k+1}^{-1}\cdot(\tilde{x}_{k+1/k}-P_{k+1}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}e_{k+1}), \tag{22}$$

或者

$$V_{k+1}=\tilde{x}_{k+1/k}P_{k+1}^{-1}\tilde{x}_{k+1/k}-\tilde{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}e_{k+1}-e_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k}+e_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}P_{k+1}H_{k+1}^{-1}R_{k+1}^{-1}e_{k+1}. \tag{23}$$

(21)代入(23)得

$$V_{k+1}=V_{k+1/k}+\tilde{x}_{k+1/k}^{\mathrm{T}}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k}-\tilde{x}_{k+1/k}^{\mathrm{T}}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}e_{k+1}-e_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k}+e_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}P_{k+1/k}^{-1}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}e_{k+1}, \tag{24}$$

$$V_{k+1/k}=\tilde{x}_{k+1/k}^{\mathrm{T}}P_{k+1}^{-1}\tilde{x}_{k+1/k}. \tag{25}$$

利用(17)和(18)，(24)变为

$$V_{k+1}=V_{k+1/k}+e_{k+1}^{\mathrm{T}}(\alpha_{k+1}R_{k+1}^{-1}\alpha_{k+1}-\alpha_{k+1}R_{k+1}^{-1}-R_{k+1}^{-1}\alpha_{k+1}+R_{k+1}^{-1}H_{k+1}P_{k+1}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1})e_{k+1}, \tag{26}$$

而

$$V_{k+1/k}=\tilde{x}_k^{\mathrm{T}}F_k^{\mathrm{T}}\beta_k(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}}+Q_k)^{-1}\beta_kF_k\tilde{x}_k. \tag{27}$$

序列 $\{V_k\}_{k=1,2,\cdots}$ 下降意味着

$$V_{k+1}-V_k=V_{k+1}-V_{k+1/k}+V_{k+1/k}-V_k\leqslant 0, \tag{28}$$

即

$$V_{k+1}-V_k=e_{k+1}^{\mathrm{T}}(\alpha_{k+1}R_{k+1}^{-1}\alpha_{k+1}-\alpha_{k+1}R_{k+1}^{-1}-R_{k+1}^{-1}\alpha_{k+1}+R_{k+1}^{-1}H_{k+1}P_{k+1}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1})e_{k+1}+\tilde{x}_k^{\mathrm{T}}(F_k^{\mathrm{T}}\beta_k(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}}+Q_k)^{-1}\beta_kF_k-P_k^{-1})\tilde{x}_k\leqslant 0.$$

确保上式成立的充分条件是

$$\alpha_{k+1}R_{k+1}^{-1}\alpha_{k+1}-\alpha_{k+1}R_{k+1}^{-1}-R_{k+1}^{-1}\alpha_{k+1}+R_{k+1}^{-1}H_{k+1}P_{k+1}H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}\leqslant 0, \tag{29}$$

$$F_k^{\mathrm{T}}\beta_k(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}}+Q_k)^{-1}\beta_kF_k-P_k^{-1}\leqslant 0. \tag{30}$$

引理 1 设 α_{k+1} 满足如下条件

$$1-\sqrt{1-\Delta_{k+1}}\leqslant\alpha_{k+1}^{(i)}\leqslant 1+\sqrt{1-\Delta_{k+1}},\quad i=1,\cdots,p, \tag{31}$$

其中

$$\Delta_{k+1}=\lambda_{\max}(R_{k+1})\lambda_{\max}(R_{k+1}^{-1}H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}}\cdot(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{\mathrm{T}}+R_{k+1})^{-1}),$$

$\lambda_{\max}$ 为最大特征值，R_{k+1} 满足 $\Delta_{k+1}\leqslant 1$，则(29)式成立.

证　见[3].

引理 2 设

$$F_k\text{为有界非奇异矩阵} \tag{32}$$

且

$$-\left(\frac{\lambda_{\min}D_k}{\lambda_{\max}A_k}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\beta_k^{(j)}\leqslant\left(\frac{\lambda_{\min}D_k}{\lambda_{\max}A_k}\right)^{\frac{1}{2}},\quad j=1,\cdots,n. \tag{33}$$

其中

$$D_k = (F_kP_kF_k^{\mathrm{T}})^{-1},\quad A_k = (F_kP_kF_k^{\mathrm{T}} + Q_k)^{-1},$$

则(30)式成立.

证　在(32)假定下,(30)式等价于

$$\beta_k(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}} + Q_k)^{-1}\beta_k - (F_kP_kF_k^{\mathrm{T}})^{-1} \leqslant 0,$$

即

$$\beta_kA_k\beta_k - D_k \leqslant 0.$$

又

$$\beta_kA_k\beta_k = \begin{bmatrix} \beta_k^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_k^{(n)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} \beta_k^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_k^{(n)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\beta_k^{(1)})^2 & \cdots & A_{1n}\beta_k^{(1)}\beta_k^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}\beta_k^{(n)}\beta_k^{(1)} & \cdots & A_{nn}(\beta_k^{(n)})^2 \end{bmatrix}.$$

由 A_k、D_k 为正定知

$$\beta_k(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}} + Q_k)^{-1}\beta_k = \beta_kA_k\beta_k \leqslant \left(\frac{\lambda_{\min}D_k}{\lambda_{\max}A_k}\right)A_k \leqslant D_k = (F_kP_kF_k^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

证毕.

引理 3　设存在正实数 η_1,η_2,η_3 及某一有限正整数 M,使得对所有的 $k \geqslant M$ 有

$$O_e^{\mathrm{T}}(k-M,k)\mathscr{R}(k-M,k)O_e(k-M,k) \leqslant \eta_1 I_n, \tag{34}$$

$$(k+1)\eta_2 I_n \leqslant H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}, \tag{35}$$

$$\lambda(\psi(0,kM-1)) \leqslant k\eta_3, \tag{36}$$

其中

$$O_e(k-M,k) = \begin{bmatrix} H_{k-M}F_{k-M}^{-1}F_{k-M+1}^{-1}\cdots F_{k-1}^{-1} \\ H_{k-M+1}F_{k-M+1}^{-1}\cdots F_{k-1}^{-1} \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix}, \tag{37}$$

$$\mathscr{R}(k-M,k) = \mathrm{diag}(R_{k-M}^{-1},\cdots,R_k^{-1}), \tag{38}$$

$$\Psi(0,k) = F_k^{-\mathrm{T}}F_{k-1}^{-\mathrm{T}}\cdots F_0^{-\mathrm{T}}P_0^{-1}F_0^{-1}\cdots F_{k-1}^{-1}F_k^{-1}. \tag{39}$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_{\min}(P_{k+1}^{-1}) = \infty, \tag{40}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\lambda_{\max}(P_{k+1}^{-1})}{\lambda_{\min}(P_{k+1}^{-1})} < \infty. \tag{41}$$

证　由 $\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B) \leqslant \lambda_i(A+B)$ 有

$$\lambda_{\min}(P_{k+1}^{-1}) = \lambda_{\min}[(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}} + Q_k)^{-1} + H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}] \geqslant \lambda_{\min}(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}} + Q_k)^{-1} + \lambda_{\min}(H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}).$$

由(35)知

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_{\min}(H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}) = \infty,$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_{\min}(P_{k+1}^{-1}) = \infty.$$

由(6),(21)知

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{-1} &= (F_kP_kF_k^{\mathrm{T}} + Q_k)^{-1} + H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1} \leqslant \\ &(F_kP_kF_k^{\mathrm{T}})^{-1} + H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1} = \\ &F_k^{-\mathrm{T}}P_k^{-1}F_k^{-1} + H_{k+1}^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}H_{k+1} \leqslant \\ &O_e^{\mathrm{T}}(1,k+1)\mathscr{R}(1,k+1)O_e\cdot \\ &(1,k+1) + \Psi(0,k), \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} P_{kM}^{-1} &\leqslant O_e^{\mathrm{T}}(1,kM)\mathscr{R}(1,kM)O_e(1,kM) + \\ &\Psi(0,kM-1) = \\ &\sum_{i=1}^{k}[O_e^{\mathrm{T}}((i-1)M+1,iM)\cdot \\ &\mathscr{R}((i-1)M+1,iM)\cdot \\ &O_e((i-1)M+1,iM)] + \Psi(0,kM-1), \end{aligned}$$

由(34)知

$$\lambda(P_{kM}^{-1} - \Psi(0,kM-1)) \leqslant k\eta_1.$$

再由(35)得

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\lambda_{\max}(P_{k+1}^{-1})}{\lambda_{\min}(P_{k+1}^{-1})} < \infty.$$

定理　假定(31),(33),(34),(35)式成立,非线性随机离散系统(1a),(1b)的 EKF 方法(2)~(6)将确保

$$\lim_{k\to\infty}(x_k - \hat{x}_k) = 0. \tag{42}$$

证　由引理 1 和引理 2 知 $\{V_k\}$ 为递减序列且收敛于正标量 V,即

$$\lim_{k\to\infty}V_k = V.$$

又因为

$$\frac{V_k}{\mathrm{tr}(P_k^{-1})} \geqslant \frac{\lambda_{\min}(P_k^{-1})\tilde{x}_k^{\mathrm{T}}\tilde{x}_k}{n\lambda_{\max}(P_k^{-1})} \geqslant 0,$$

由(40)知

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{tr}(P_k^{-1}) = \infty,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{\min}(P_k^{-1})\tilde{x}_k^{\mathrm{T}}\tilde{x}_k}{n\lambda_{\max}(P_k^{-1})} = 0.$$

(下转第 269 页)

在原点是一致渐近稳定的.

4　结论(Conclusion)

本文提出的离散双线性系统稳定控制判据和设计方法,设计简便,判断容易,特别适合于系统在小范围内工作的情况,可以利用简单低廉的线性反馈获得稳定的控制效果,具有一定的工业实用意义.

参考文献(References)

[1] 华向明.双线性系统建模与控制[M].上海:华东化工学院出版社,1990

[2] Stepanenko Y and Yang X. Stabilization analysis of discrete nonlinear systems[J]. Int. J. Control, 1995, 61(6):1313 - 1326

[3] Yang X et al. Stability of discrete bilinear systems with output feedback[J]. Int. J. Control. 1989,52(1):135 - 158

本文作者简介

穆肇骊　1973 年生.西安交通大学自动控制系博士生.主要研究方向为现代控制理论与智能控制.

刘　锋　1970 年生.西安交通大学自动控制系博士生.主要研究方向为混沌理论和智能控制.

邱祖廉　1937 年生.西安交通大学自动控制系教授.博士生导师.主要研究方向为大滞后系统,神经网络技术、智能控制等.

(上接第 266 页)

又由(41)知 $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{x}_k = 0.$　　证毕.

4　结论(Conclusion)

非线性随机离散系统收敛性分析的核心就是利用 Boutayeb M 的方法,引进未知矩阵 α_k,β_k 评价模型的线性性.构造等式 $\alpha_{k+1}e_{k+1} = H_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k}$,$\tilde{x}_{k+1/k} = \beta_k F_k\tilde{x}_k$,替代了线性例子收敛性分析中的近似式,$e_{k+1} \approx H_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k}$,$\tilde{x}_{k+1/k} \approx F_k\tilde{x}_k$.在对 R_k,Q_k 加约束的情况下,得到了它的局部收敛性.

参考文献(References)

[1] Liung L. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1979, AC-24(1):36 - 50

[2] Song Y and Grizzle J W. The extended Kalman filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems[J]. J. Math. Syst. Estim. Contr., 1995,5(1):59 - 78

[3] Boutayeb M. Rafaralahy H and Dorouach M. Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997, AC-42(4):581 - 586

[4] 陈翰馥.离散时间的递推估计与随机控制[M].北京:科学出版社,1980

本文作者简介

宋志勇　1974 年生.1996 年于华中师范大学数学系获理学学士学位.现为中国科学院武汉物理与数学研究所应用数学专业硕士研究生.研究兴趣为非线性控制理论及其应用.