文章编号：1000-8152(2000)02-0291-05 291-295

区间矩阵系统低保守性鲁棒控制器的设计*

吴庆宪 王 源 姜长生 TP13
(南京航空航天大学自动控制系·南京,210016)

摘要：对于系统矩阵和输入矩阵均为区间矩阵的不确定系统，提出了实对称矩阵集合的最小上界和最大下界的计算方法，并应用该方法设计区间矩阵系统鲁棒控制器，把确定多个矩阵不等式解的复杂问题简化为求解单代数 Riccati 矩阵方程.该设计方法具有较小保守性.

关键词：不确定性系统；区间矩阵；鲁棒控制 鲁棒控制器
文献标识码：A

Design of Lower Conservatism Robust Controller for Interval Matrix Systems

WU Qingxian, WANG Yuan and JIANG Changsheng
(Department of Automatic Control, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics · Nanjing, 210016, P.R.China)

Abstract: In this paper, a method of determining the minimum upper bound and maximum lower bound of the real symmetric matrix set is proposed and applied to design the robust controller for the uncertain systems with system matrix and input matrix being interval. Thus the complex problem of determining the solution of matrix inequalities is simplified to that of solving single algebraic Riccati equation. The method is of lower conservatism.

Key words: uncertain systems; interval matrix; robust control

1 引言(Introduction)

由于被控对象常常存在建模误差，且系统参数存在摄动，即系统存在不确定性，因此，对不确定系统进行鲁棒控制，使系统具有稳定鲁棒性和性能鲁棒性很有意义.区间矩阵能够方便地描述系统的不确定性、时变性等.用区间矩阵描述的不确定系统的鲁棒控制器设计已有若干研究结果[1,2].文[1]在满足匹配条件的情况下，采用奇异值判据设计了鲁棒控制器；文[2]中的鲁棒控制器设计需求解关于区间矩阵顶点的一组代数 Riccati 方程.本文提出了实对称矩阵集合的最小上界和最大下界的计算方法，探讨了降低鲁棒控制器设计的保守性的途径.基于实对称矩阵集合的最小上界和最大下界，把求解多个代数矩阵不等式的问题转化为求解单个代数 Riccati 方程，进而获得具有较小保守性的区间矩阵系统状态反馈鲁棒控制律.

2 区间矩阵系统鲁棒控制问题描述(Representation of robust control for interval matrix systems)

考虑不确定系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{1}$$

其中，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入向量，系统矩阵 A 和输入矩阵 B 为区间矩阵：

$$A = (a_{ij})_{n\times n},\ l_{aij} \leqslant a_{ij} \leqslant h_{aij},\ i,j = 1,\cdots,n,$$
$$B = (b_{ij})_{n\times m},\ l_{bij} \leqslant b_{ij} \leqslant h_{bij},\ i = 1,\cdots,n, j = 1,\cdots,m. \tag{2}$$

取变换

$$\begin{cases} A_0 = ((h_{aij}+l_{aij})/2)_{n\times n},\ \Delta A_0 = ((h_{aij}-l_{aij})/2)_{n\times n}, \\ B_0 = ((h_{bij}+l_{bij})/2)_{n\times m},\ \Delta B_0 = ((h_{bij}-l_{bij})/2)_{n\times m}. \end{cases} \tag{3}$$

称 A_0、B_0 为系统的标称矩阵.则

$$A = A_0 + \Delta A,\quad B = B_0 + \Delta B. \tag{4}$$

记

$$\Delta A = (\Delta a_{ij})_{n\times n},\quad \Delta A_0 = (\Delta a_{0ij})_{n\times n},$$
$$\Delta B = (\Delta b_{ij})_{n\times m},\quad \Delta B_0 = (\Delta b_{0ij})_{n\times m}. \tag{5}$$

则有

$$-\Delta a_{0ij} \leqslant \Delta a_{ij} \leqslant \Delta a_{0ij},\quad i,j = 1,\cdots,n.$$

---

* 基金项目：国家自然科学基金(69574103)资助项目.
收稿日期：1998-05-13；收修改稿日期：1999-11-20.

$$-\Delta b_{0ij} \leqslant \Delta b_{ij} \leqslant \Delta b_{0ij}, \quad i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m. \tag{6}$$

定义 1 设区间矩阵

$$T=(t_{ij})_{m\times n}, \quad l_{tij} \leqslant t_{ij} \leqslant h_{tij},$$
$$i=1,2,\cdots,m, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

称

$$T_k=(\bar{t}_{ij})_{m\times n}, \quad \bar{t}_{ij}=l_{tij} \quad \text{或} \quad \bar{t}_{ij}=h_{tij},$$
$$i=1,2,\cdots,m, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

为区间矩阵的一个顶点.

称

$$\Psi_T=\{T_1,T_1,\cdots,T_{Nt}\}, \quad Nt=2^{m\times n}$$

为区间矩阵的顶点集合.

根据区间矩阵顶点和顶点集合的定义,区间矩阵 T 可以表示为[2]

$$T=\sum_{k=1}^{N_t}\alpha_k T_k, \quad \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{N_t}\alpha_k=1. \tag{8}$$

一般地,区间矩阵不确定元素的个数为 N,则区间矩阵的顶点数 $N_t=2^N$.

不确定系统(1)可以表示为

$$\dot{x}(t)=(A_0+\Delta A)x(t)+(B_0+\Delta B)u(t). \tag{9}$$

选取二次型性能指标

$$J=\int_0^\infty x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\mathrm{d}t, \quad Q\geqslant 0,\ R>0. \tag{10}$$

而鲁棒控制问题则是设计线性控制律使闭环系统具有稳定鲁棒性和性能鲁棒性.

3 区间矩阵系统低保守性鲁棒控制器的设计(Design of robust controller for interval matrix systems with lower conservatism)

考虑区间矩阵系统(1),二次型性能指标式(10),设 $P>0$, $x(0)$ 为系统的初始状态,取状态反馈控制律

$$u(t)=Kx(t)=-R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px(t), \tag{11}$$

则有

$$A_c=A-BR^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P. \tag{12}$$

若系统闭环稳定,即 $\mathrm{Re}\lambda(A_c)<0$,下述 Lyapunov 方程

$$P_0A_c+A_c^{\mathrm{T}}P_0+Q+PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P=0 \tag{13}$$

存在正定解 P_0,则式(10)所示性能指标

$$J=x^{\mathrm{T}}(0)P_0x(0). \tag{14}$$

由于 A_c 含有不确定性参数阵 ΔA 和 ΔB,故 P_0 为 ΔA 和 ΔB 的矩阵函数,因而性能指标 J 为不确定值.从性能鲁棒的要求出发,希望能给出鲁棒控制系统性能指标的上界,这将有助于估计由于参数摄动而引起性能降低的范围.而鲁棒控制器的设计方法,若能使性能指标具有较小的上界值,则称该设计方法具有低保守性.

定理 1 给定

$$H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)>0. \tag{15}$$

如果存在 $P>0$,满足下述 Riccati 方程

$$PA_0+A_0^{\mathrm{T}}P-PMP+\bar{Q}=0, \tag{16}$$

其中

$$M=B_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}+F_m-E_M, \quad \bar{Q}=Q+H. \tag{17}$$

E_M 为实对称阵集合 $\{\Delta A_iH^{-1}\Delta A_i^{\mathrm{T}}, i=1,\cdots,2^{n\times n}\}$ 的最小上界,$\{\Delta A_i, i=1,\cdots,2^{n\times n}\}$ 为区间矩阵 ΔA 的顶点集合. F_m 为实对称阵集合 $\{\Delta B_jR^{-1}B_0^{\mathrm{T}}+B_0R^{-1}\Delta B_j^{\mathrm{T}}, j=1,\cdots,2^{n\times m}\}$ 的最大下界. $\{\Delta B_j, j=1,\cdots,2^{n\times m}\}$ 为区间矩阵 ΔB 的顶点集合,则状态反馈控制律

$$u(t)=-R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{18}$$

使区间矩阵系统(1)闭环渐近稳定,且使性能指标

$$J=x^{\mathrm{T}}(0)P_0x(0)\leqslant x^{\mathrm{T}}(0)Px(0). \tag{19}$$

证 根据式(8),区间矩阵可表示为

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{N_a}\alpha_i\Delta A_i,\ \alpha_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{N_a}\alpha_i=1,\ N_a=2^{n^2},$$
$$\Delta B=\sum_{j=1}^{N_b}\beta_j\Delta B_j,\ \beta_j\geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{N_b}\beta_j=1,\ N_b=2^{m\times n}. \tag{20}$$

根据最小上界和最大下界的性质

$$\begin{aligned}&P\Delta A+\Delta A^{\mathrm{T}}P=\\&\sum_{i=1}^{N_a}\alpha_i(P\Delta A_i+\Delta A_i^{\mathrm{T}}P)\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N_a}\alpha_i(P\Delta A_iH^{-1}\Delta A_i^{\mathrm{T}}P+H)\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N_a}\alpha_i(PE_MP+H)=PE_MP+H.\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&B_0R^{-1}\Delta B^{\mathrm{T}}+\Delta BR^{-1}B_0^{\mathrm{T}}=\\&\sum_{j=1}^{N_b}\beta_j(B_0R^{-1}\Delta B_j^{\mathrm{T}}+\Delta B_jR^{-1}B_0^{\mathrm{T}})\geqslant\\&\sum_{j=1}^{N_b}\beta_jF_m=F_m.\end{aligned} \tag{22}$$

因为存在 $P=P^{\mathrm{T}}>0$ 满足式(16),故取 Lyapunov 函数 $V=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$,考虑到式(18),式(19),式(21)

和式(22)，则有

$$\dot{V} = \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) = x^{\mathrm{T}}(t)(PA_c + A_c^{\mathrm{T}}P)x(t) = x^{\mathrm{T}}(t)[PA_0 + A_0^{\mathrm{T}}P + (P\Delta A + \Delta A^{\mathrm{T}}P) - 2PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P - P(B_0R^{-1}\Delta B^{\mathrm{T}} + \Delta BR^{-1}B_0^{\mathrm{T}})P]x(t).$$

$$\dot{V} \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)[PA_0 + A_0^{\mathrm{T}}P + PE_MP - 2PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P - PF_mP + H]x(t). \tag{23}$$

运用式(16)得，$\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{V} \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)[-(Q + PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P])]x(t) < 0. \tag{24}$$

根据 Lyaounov 稳定性判据知，$\mathrm{Re}\lambda(A_c) < 0$. 区间矩阵系统闭环渐近稳定.

记 $\bar{E}$ 为实对称阵集合 $\{\Delta A_iH^{-1}\Delta A_i^{\mathrm{T}}, i = 1,\cdots,2^{n\times n}\}$ 的某个上界，$\underline{F}$ 为实对称阵集合 $\{\Delta B_jR^{-1}B_0^{\mathrm{T}} + B_0R^{-1}\Delta B_j^{\mathrm{T}}, j = 1,\cdots,2^{n\times m}\}$ 的某个下界. 根据式(21)，式(22)

$$\pi(P) = P\bar{E}P + H - P\underline{F}P - P\Delta A - \Delta A^{\mathrm{T}}P + P(\Delta BR^{-1}B_0^{\mathrm{T}} + B_0R^{-1}\Delta B^{\mathrm{T}})P \geqslant 0. \tag{25}$$

而在给定 H 的条件下，当取 $\bar{E}$，$\underline{F}$ 分别为 E_M 和 F_m 时，可得 $\pi(P)$ 的较小上界

$$\pi_M(P) = PE_MP + H - PF_mP - P\Delta A - \Delta A^{\mathrm{T}}P + P(\Delta BR^{-1}B_0^{\mathrm{T}} + B_0R^{-1}\Delta B^{\mathrm{T}})P \geqslant 0. \tag{26}$$

由式(16)可得

$$PA_c + A_c^{\mathrm{T}}P + Q + PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P + \pi_M(P) = 0. \tag{27}$$

由式(27)减去式(13)得

$$(P - P_0)A_c + A_c^{\mathrm{T}}(P - P_0) + \pi_M(P) = 0. \tag{28}$$

注意到 $\pi_M(P) \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\lambda(A_c) < 0$，所以，$P - P_0 \geqslant 0$. 对于二次型性能指标则有

$$J = x^{\mathrm{T}}(0)P_0x(0) \leqslant x^{\mathrm{T}}(0)Px(0).$$

定理证毕.

由于运用实对称集合最小上界和最大下界的性质，降低了不确定性矩阵 $\pi(P)$ 的上界，从而使二次型性能指标 J 具有较小的上界值，因而上述鲁棒控制器设计方法具有低保守性.

由于在控制律设计中，引入给定的加权阵 H，并运用二项式不等式处理不确定性项 $P\Delta A + \Delta A^{\mathrm{T}}P$，因此选择合适的 H 阵元素，将有助于进一步减小 P，获得性能指标 J 的更小的上界值. H 阵元素的调整可应用最优化方法，这一问题有待进一步研究.

4 算例(Example)

考虑区间矩阵系统

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A)x(t) + (B_0 + \Delta B)u(t).$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.7070 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2192 & 0 & 1.2031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0673 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}.$$

性能指标中

$$Q = I_{4\times 4}, R = I_{2\times 2},$$

取

$$H = \mathrm{diag}(0.0100, 0.1000, 0.0020, 1.0000),$$

$$\bar{Q} = Q + H.$$

经计算实对称阵集合 $\{\Delta A_iH^{-1}\Delta A_i^{\mathrm{T}}, i = 1,\cdots,4\}$ 的最小上界

$$E_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9279 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

实对称阵集合 $\{\Delta B_jR^{-1}B_0^{\mathrm{T}} + B_0R^{-1}\Delta B_j^{\mathrm{T}}, j = 1,2\}$ 的最大下界

$$F_m = \begin{bmatrix} -0.0330 & -0.2274 & 0.4123 & 0 \\ -0.2274 & -8.3104 & 2.8385 & 0 \\ 0.4123 & 2.8385 & -5.1461 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

求解 Riccati 方程(16)得

$$P = \begin{bmatrix} 6.4196 & 0.8451 & 0.6641 & -3.8266 \\ 0.8451 & 0.4248 & 0.3414 & -0.4690 \\ 0.6641 & 0.3414 & 0.4706 & -0.1155 \\ -3.8266 & -0.4690 & -0.1155 & 4.5456 \end{bmatrix}.$$

进而得到

$$K=\begin{bmatrix}-1.7460 & 0.2172 & 1.2647 & 2.4827\\ 1.9719 & 1.3731 & 0.1265 & -2.3104\end{bmatrix}.$$

在系统参数容许的不确定范围内的标称系统 $S_0:(A_0,B_0)$ 和由区间矩阵的几个顶点对应的系统

$$S_1:(A_0+\Delta A_0,B_0+\Delta B_0),$$
$$S_2:(A_0-\Delta A_0,B_0-\Delta B_0),$$
$$S_3:(A_0-\Delta A_0,B_0+\Delta B_0).$$

在该控制器作用下的闭环响应曲线分别如图1所示.性能指标 $J\leqslant x^{\mathrm{T}}(0)Px(0)=6.7398$.而按文[4]方法所得性能指标 $J\leqslant 7.17$.

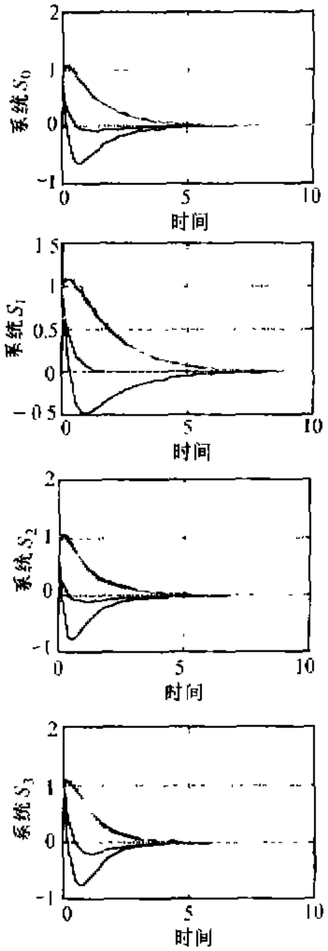

图1 鲁棒控制系统闭环响应曲线

Fig. 1 Closed-loop response curves for the robust controled system

参考文献(References)

[1] Xu Bugong. Robust controller desing for uncertain systems with interval parameters[J]. 控制理论与应用, 1996, 13(5): 631 – 638

[2] Mori T and Kokame H. Stabilization of perturbed systems via linear optimal regulator[J]. Int. J. Control, 1988, 47(1): 363 – 372

[3] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 1984

[4] Kosmidou O I. Robust stability and performance of systems with structured bounded uncertainties: an extension of the guaranteed cost control approach[J]. Int. J. Control, 1990, 52(3): 627 – 640

[5] 姜长生, 孙隆和, 吴庆宪, 陈文华. 系统理论与鲁棒控制[M]. 北京: 航空工业出版社, 1998

附录(Appendix)

实对称矩阵集合的最小上界和最大下界(Minimum upper bound and maximum lower bound of real symmetric matrix set)

定义 A1 设 $\Psi_c=\{C_1,C_2,\cdots,C_{N_c}\}$ 为 n 维实对称阵集合,记

$$C_+=\{C\mid C-C_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,N_c\}, \tag{A1}$$

$$C_-=\{C\mid C-C_i\leqslant 0, i=1,2,\cdots,N_c\}. \tag{A2}$$

称 C_+ 为 Ψ_c 的上界集, C_- 为 Ψ_c 的下界集.

定义 A2 $\forall x\in\mathbb{R}^n$,若

$$x^{\mathrm{T}}C_Mx=\min_{C\in C_+}x^{\mathrm{T}}Cx, \tag{A3}$$

$$x^{\mathrm{T}}C_mx=\max_{C\in C_-}x^{\mathrm{T}}Cx, \tag{A4}$$

则称 C_M 为 Ψ_c 的最小上界, C_m 为 Ψ_c 的最大下界.

定理 A 设 $C_1,C_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为实对称阵.则两实对称阵的最小上界和最大下界按以下方法计算:

1) $C_1-C_2\geqslant 0$,则

$$C_M=C_1,\quad C_m=C_2.$$

2) $C_1-C_2\leqslant 0$,则

$$C_M=C_2,\quad C_m=C_1.$$

3) C_1-C_2 为不定阵,设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为实对称阵 C_1-C_2 的特征值,

$$\begin{cases}U^{\mathrm{T}}(C_1-C_2)U=\mathrm{diag}\{\Lambda_p,\Lambda_n\},\\ \Lambda_p=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_q\},\quad \lambda_i>0,\ i=1,\cdots,q,\\ \Lambda_n=\mathrm{diag}\{\lambda_{q+1},\cdots,\lambda_n\},\quad \lambda_i\leqslant 0,\ i=q+1,\cdots,n.\end{cases} \tag{A5}$$

U 为由实对称矩阵 C_1-C_2 的正交特征向量构成的正交阵.则

$$C_M=C_2+U\mathrm{diag}\{\Lambda_p,0\}U^{\mathrm{T}}=C_1-U\mathrm{diag}\{0,\Lambda_n\}U^{\mathrm{T}}. \tag{A6}$$

$$C_m=C_2+U\mathrm{diag}\{0,\Lambda_n\}U^{\mathrm{T}}=C_1-U\mathrm{diag}\{\Lambda_p,0\}U^{\mathrm{T}}. \tag{A7}$$

证 结论1),2)显然成立,只需证明结论3).设 C_+ 和 C_- 分别为 C_1 和 C_2 的上界集和下界集,取

$$\bar C_1=U^{\mathrm{T}}C_1U,\quad \bar C_2=U^{\mathrm{T}}C_2U,\quad \bar C=U^{\mathrm{T}}CU. \tag{A8}$$

并设 $\bar C_+$ 和 $\bar C_-$ 分别为矩阵 $\bar C_1$ 和 $\bar C_2$ 的上界集和下界集.若 $\bar C\in\bar C_+$,则应有

$$\begin{aligned}&\bar C-\bar C_2\geqslant 0,\\ &\bar C-\bar C_1=\bar C-\bar C_2-(\bar C_1-\bar C_2)=\\ &\qquad \bar C-\bar C_2-\mathrm{diag}\{\Lambda_p,\Lambda_n\}\geqslant 0.\end{aligned} \tag{A9}$$

即

$$\bar{C} - \bar{C}_2 \geqslant \mathrm{diag}\{\Lambda_n, \Lambda_n\}. \quad (A10)$$

综合式(A9)和式(A10),并考虑到 $\Lambda_n \leqslant 0$, 应有

$$\bar{C} - \bar{C}_2 \geqslant \mathrm{diag}\{\Lambda_p, 0\}. \quad (A11)$$

按 C_M 定义,当取 $\bar{C} = \bar{C}_M$ 时,式(A11)的等号成立,即

$$\begin{aligned}\bar{C}_M &= \bar{C}_2 + \mathrm{diag}\{\Lambda_p, 0\} = \\ &- (\bar{C}_1 - \bar{C}_2) + \mathrm{diag}\{\Lambda_p, 0\} + \bar{C}_1 = \\ &\bar{C}_1 - \mathrm{diag}\{0, \Lambda_n\}. \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned}C_M &= U\bar{C}_M U^{\mathrm{T}} = C_2 + U\mathrm{diag}\{\Lambda_p, 0\} U^{\mathrm{T}} = \\ &C_1 - U\mathrm{diag}\{0, \Lambda_n\} U^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

若 $C \in C_-$, 类似可得

$$\bar{C} - \bar{C}_2 \leqslant 0. \quad (A13)$$

$$\bar{C} - \bar{C}_2 \leqslant \mathrm{diag}\{\Lambda_p, \Lambda_n\}. \quad (A14)$$

综合式(A13)和式(A14),并考虑到 $\Lambda_n \leqslant 0$, 应有

$$\bar{C} - \bar{C}_2 \leqslant \mathrm{diag}\{0, \Lambda_n\}. \quad (A15)$$

按 C_m 定义,当取 $\bar{C} = \bar{C}_m$ 时,式(A15)的等号成立,即

$$\bar{C}_m = \bar{C}_2 + \mathrm{diag}\{0, \Lambda_n\} = \bar{C}_1 - \mathrm{diag}\{\Lambda_p, 0\}. \quad (A16)$$

$$\begin{aligned}C_m &= U\bar{C}_m U^{\mathrm{T}} = C_2 + U\mathrm{diag}\{0, \Lambda_n\} U^{\mathrm{T}} = \\ &C_1 - U\mathrm{diag}\{\Lambda_p, 0\} U^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

定理证毕.

n 维实对称矩阵集合 $\Psi_c = \{C_1, C_2, \cdots, C_{N_c}\}$ 的最小上界 C_M 和最大下界 C_m 按以下步骤递推确定:

1) 取 $i = 1$,

$$C_{M_1} = C_{m_1} = C_1; \quad (A17)$$

2) 按定理A所示方法求取实对称阵 C_{M_i} 和 C_{i+1} 的最小上界 $C_{M_{i+1}}$, 实对称阵 C_{m_i} 和 C_{i+1} 的最大下界 $C_{m_{i+1}}$;

3) 若 $i < N_c - 1$, 则 $i = i + 1$, 转2);

4) 若 $i = N_c - 1$, 则

$$C_M = C_{M_{i+1}}, \quad C_m = C_{m_{i+1}}. \quad (A18)$$

当 $N_c = 2$ 时,按定理A可求得两实对称阵 C_1、C_2 的最小上界 C_{M_2} 和最大下界 C_{m_2}, 且知当且仅当 $C \geqslant C_{M_2}$ 时, $C \in C_+$, 当且仅当 $C \leqslant C_{m_2}$ 时, $C \in C_-$, 故当 $N_c = 3$ 时,确定三个实对称阵 C_1、C_2、C_3 的最小上界和最大下界等同于求取两实对称阵 C_{M_2} 和 C_3 的最小上界和 C_{m_2} 和 C_3 的最大下界,可按此类推至 N_c 为任意正整数.

本文作者简介

吴庆宪 1955年生.副教授.1985年获东南大学控制理论与应用专业硕士学位.主要研究方向为鲁棒控制、工业过程控制.

王 源 1968年生.1990年于重庆大学获学士学位.1999年于南京航空航天大学自动控制系获硕士学位.现为南京航空航天大学自动控制系博士生.主要研究方向为鲁棒控制和智能自修复控制等.

姜长生 1942年生.教授.1968年南京航空航天大学自动控制理论专业研究生毕业.已出版专著3部,发表论文50余篇.主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和综合火飞控制等.