

文章编号: 1000-8152(2001)01-0055-03

## 反数字变换算法在线性控制系统参数辨识中的应用\*

冯占林

曹淑琴

(信息产业部电子科学研究院·北京, 100041) (北方工业大学工学院·北京, 100041)

李衍达

(清华大学自动化系, 智能技术与系统国家重点实验室·北京, 100084)

**摘要:** 反数字变换算法<sup>[1]</sup>是新近提出的一种算法. 通过该算法的建立及与微分算法的比较, 证明了基于反数字变换的线性控制系统参数辨识的可行性, 并给出了相应的算法及仿真结果.

**关键词:** 反数字变换; 微分算法; 系统参数辨识

**文献标识码:** A

## Application of Inverse Digital Transform in Identification of Linear System

FENG Zhanlin

(China Academy of Electronics and Information Technology, Information Industry Ministry·Beijing, 100041, P. R. China)

CAO Shuqin

(Institute of Technology, North University of Technology·Beijing, 100041, P. R. China)

LI Yanda

(State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Department of Automation, Tsinghua University·Beijing, 100084, P. R. China)

**Abstract:** Inverse digital transform (IDT)<sup>[1]</sup> was proposed recently to solve the problem in control theory. We study the creation of IDT and then compare IDT with the algorithm of numerical differentiation. It is demonstrated that this algorithm can be applied to system parameter identification. Correspondent algorithm and simulation results have been given.

**Key words:** inverse digital transform; numerical differentiation; system parameter identification

### 1 引言(Introduction)

在动力学、控制工程、日常生活及数学领域中, 存在如下一类问题, 即对于  $k$  阶线性系统, 设其输入信号、输出信号分别为  $x, y$ , 其输入输出关系可用如下微分方程描述:

$$y^{(k)}(t) + a_1 y^{(k-1)}(t) + \dots + a_k = f(x). \quad (1)$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_k, k$ , 分别为系统的参数和阶数,  $f(x)$  为输入信号的函数.

根据系统的输出信号求解输入信号的过程在动力学和数学中被称为反问题<sup>[2,3]</sup>, 从广义上看, 控制系统及信号处理中的辨识问题也属反问题一类, 因此, 解决这类反问题具有更重要更广泛的意义.

解决这类反问题在工程数学上通常采用差分法<sup>[3,4]</sup>, 即在较小离散步长内利用差分近似微分, 然后解差分方程. 但是, 这类方法在工程上存在如下问

题: 1) 离散步长的选取没有标准, 步长越小精度越高, 但计算量越大, 反之, 步长增大计算量减小, 但精度降低; 2) 该方法对系统的初始状态是敏感的, 即在解决问题时需知道系统的初始状态; 3) 没有统一的算法, 如有前差分, 后差分以及按牛顿、贝叶利, 斯杰林格等插值多项式展开的不同形式<sup>[5]</sup>; 4) 在系统辨识及信号处理中提出一系列解决参数辨识方法<sup>[6-9]</sup>, 但这些方法中缺少同时确定系统参数与系统阶数的比较适于工程应用的算法, 这为解决实际问题带来困难. 本文所提出的反数字变换算法可以克服以上所提不足.

### 2 反数字变换算法的建立 (Creation of inverse digital transform)

设式(1)所描述的线性稳定系统有  $k$  个非重根  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , 其零输入响应  $\omega(t)$  及零输出响应  $h(t)$

\* 基金项目: 国家教委留学回国人员科研启动资金和国家博士后科学资助基金(中博基[1998]6号)资助项目.

收稿日期: 1999-02-08; 收修改稿日期: 2000-01-12.

的离散形式分别可表示为:

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^k C_i e^{p_i t}, \quad (2)$$

$$h(t) = 1 + \sum_{i=1}^k b_i e^{p_i t}. \quad (3)$$

其中:  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , 是由系统初始状态所确定的未知参数;  $b_1, b_2, \dots, b_k$  是由系统及输入信号所确定的未知参数.

设所估计信号为  $\bar{X}^*[t_n]$ , 根据系统响应特性, 则得下述方程组

$$\begin{cases} \bar{X}^*[t_n] + d_1 e^{p_1 t_n} + d_2 e^{p_2 t_n} + \dots + d_k e^{p_k t_n} = y[t_{n-k}], \\ \bar{X}^*[t_n] + d_1 e^{p_1 t_{n-k+1}} + d_2 e^{p_2 t_{n-k+1}} + \dots + d_k e^{p_k t_{n-k+1}} = y[t_{n-k+1}], \\ \vdots \\ \bar{X}^*[t_n] + d_1 e^{p_1 t_n} + d_2 e^{p_2 t_n} + \dots + d_k e^{p_k t_n} = y[t_n]. \end{cases} \quad (4)$$

其中  $d_i = c_i + b_i \bar{X}^*[t_n]$ .

解方程组可得  $\bar{X}^*[t_n]$ . 它是离散信号  $|y[t_i]$ ,  $i = n, n-1, \dots, n-k$  经变换所得的值, 故称之为  $k$  阶反数字变换算法. 通过分析和整理可得到如下两种典型的算法.

令  $k=1, p_1 = 1/T_{01}$ , 可得

$$\bar{X}^*[n\Delta t] = \frac{y[n\Delta t] - y[(n-1)\Delta t]e^{-\Delta t/T_{01}}}{1 - e^{-\Delta t/T_{01}}}. \quad (5)$$

令  $k=2, p_{1,2} = \beta \pm j\Omega$ , 则得

$$\bar{X}^*[n\Delta t] = \frac{y[n\Delta t] - 2y[(n-1)\Delta t]e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + y[(n-2)\Delta t]e^{-2\beta\Delta t}}{1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}}. \quad (6)$$

不难验证, 由于算法(4)是线性的, 因此, 任意阶的算法均可通过两种典型的算法(5)和(6)的线性组合而得到, 这为实际应用带来方便.

根据离散函数拉氏变换定理, 对式(5)、(6)可得如下形式:

$$W_{01}^*(p) = \frac{\bar{X}[p]}{y[p]} = \frac{1 - e^{-p\Delta t} e^{-\Delta t/T_{01}}}{1 - e^{-\Delta t/T_{01}}}, \quad (7)$$

$$W_{02}^*(p) = \frac{\bar{X}^*[p]}{y[p]} = \frac{1 - 2e^{-p\Delta t} e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + e^{-2p\Delta t} e^{-2\beta\Delta t}}{1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}}. \quad (8)$$

同理, 对于系统具有重根情况仍然可得到类似结果, 讨论过程与上相同, 限于篇幅, 这里不再赘述.

### 3 与微分算法的比较 (Comparison with the numerical differential)

对于算法(5), 当  $\Delta t$  比较小时, 取  $e^{-\Delta t/T_{01}} = 1 - \Delta t/T_{01}$  得如下关系:

$$\bar{X}^*[n\Delta t] = \frac{T_{01}}{\Delta t} \{y[n\Delta t] - y[(n-1)\Delta t]\} + y[(n-1)\Delta t].$$

该结果恰好与用牛顿插值多项式取前两项解一阶差分方程时的结果完全吻合<sup>[5]</sup>. 通过讨论可以看出, 对更复杂的情况, 当反数字变换算法阶数较高时, 只要把(5)式按级数展开并截取一定的项, 即可得到相应的微分算法; 另外, 反数字变换算法可以用来解决具有复根的情况. 由此看来, 反数字变换算法比微分法更具一般性.

### 4 应用 (Application)

由前面分析可知, 任意阶的算法均可通过两种典型的算法(5)和(6)的线性组合而得到, 这样, 把由式(1)所描述的  $k$  阶系统的阶跃响应(3)代入  $J$  阶反数字变换算法得

$$\bar{X}^*[n\Delta t] = 1 + \sum_{i=1}^k B_i^* e^{-n\Delta t/T_{0i}}. \quad (9)$$

其中

$$B_i^* = b_i \frac{\prod_{l=1}^J (e^{-\Delta t/T_l} - e^{-\Delta t/T_{0i}})}{\prod_{l=1}^J (1 - e^{-\Delta t/T_{0l}})}.$$

$T_1, T_2, \dots, T_k, T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0J}$  分别为系统和反数字变换算法的参数.

由式(9)可得出如下结论:

当所估计信号  $\bar{X}^*[t_n] = 1$  时,  $B_i^* = 0$ , 即所选反数字变换算法的参数与系统的参数分别相等, 反之亦然. 该条件是一个充分必要条件, 其数学表示为:

当且仅当  $J \geq k, T_{0i} = T_i, i = 1, 2, \dots, k$  时,  $\bar{X}^*[t_n] = 1$ .

若式(1)中为如下形式

$$f(x) = x^v + m_1 x^{v-1} + \dots + m_v. \quad (10)$$

其中  $v$  为导数的阶次,  $v \leq k$ .

结合式(1)、(10)、(5)得如下关系式:

$$M = D^{-1} [G^{-1}(I - Y) - D_v], \quad (11)$$

$$M = [m_1, m_2, \dots, m_v]^T, Y = [y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_v)]^T,$$

$$G = [G_1, G_2, \dots, G_v], D = [D_0, D_2, \dots, D_{v-1}],$$

$$G_j = (-1)^{j-1} [e^{-t_1/T_j}, e^{-t_2/T_j}, \dots, e^{-t_v/T_j}], j = 1, 2, \dots, v,$$

$$D_j = (-1)^{j+1} \left[ \frac{T_1^j}{d_1}, \frac{T_2^j}{d_2}, \dots, \frac{T_v^j}{d_v} \right]^T, j = 0, 1, 2, \dots, v,$$

$$d_j = T_j \prod_{i=1}^j (T_j - T_i), \quad j = 1, 2, \dots, v.$$

其中大写字母  $M, Y, G, D$  表示矩阵,  $T$  表示矩阵的转置,  $-1$  表示矩阵的求逆,  $I$  表示幺矩.

按上式可计算系数  $m_1, \dots, m_v$ .

下面讨论系统具有复根的情况. 为了说明方便, 以二阶系统为例.

设二阶系统的特征方程为

$$T^2 p^2 + 2T\xi p + 1 = 0. \quad (12)$$

特征根为  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$ , 其中

$$\delta = \xi/T, \quad \omega = \sqrt{1 - \xi^2}/T.$$

阶跃响应为  $y(t) = 1 - Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$ .

其中

$$A = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = 1/\sqrt{1 - \xi^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega/\delta = \sqrt{1 - \xi^2}/\xi.$$

将其代入式(3)得

$$\begin{aligned} \bar{X}^* [n\Delta t] = & 1 - A_1 e^{-\delta n\Delta t} |2e^{-\delta\Delta t} \sin[(n+1)\omega\Delta t + \\ & \varphi][e^{-\delta\Delta t} \cos\omega\Delta t - e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t] + \\ & \sin(n\omega\Delta t + \varphi)(e^{-2\beta\Delta t} - e^{-2\delta\Delta t})|. \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$A_1 = 1/(1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}).$$

整理得

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=0}^{\infty} \{ & 1 - \bar{X}^* [n\Delta t] \} = \\ & B_1 [e^{-\delta\Delta t} \cos\omega\Delta t - e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t] + \\ & B_2 (e^{-2\delta\Delta t} - e^{-2\beta\Delta t}). \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$B_1 = \frac{\delta \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{(\omega^2 + \delta^2)\Delta t} - \sin\varphi,$$

$$B_2 = \frac{\delta \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{(\omega^2 + \delta^2)\Delta t}.$$

当且仅当  $\omega = \Omega, \delta = \beta$  时,  $S = 0$ .

对于比较复杂的系统, 利用式(5)、(6)构成的反数字变换算法仍然得相同的结论. 根据上述讨论可见, 反数字变换算法可以用于线性系统参数辨识中, 辨识算法可采用如下判据:

$$S = \sum_{i=1}^N (1 - \bar{X}^* [i\Delta t])^2. \quad (15)$$

从理论上讲,  $N$  应取无穷大, 但实际上可根据具体情况选取, 一般取  $N \geq (3 \sim 5) T_{\max}$  即可. 另外, 按照判据(15)可以使辨识的参数达到任意精度, 但对于实际系统, 由于存在干扰, 会使辨识精度降低.

下面给出两个应用上述辨识算法的例子.

1) 对于理想系统.

i) 传递函数为式(16), 其时间常数为  $(T_1, T_2, T_3) = (1.25, 3.25, 5.5)$ . 当任意给定的误差  $\epsilon = 5.0 \times 10^{-3}$  时, 辨识结果为  $(1.3, 3.5, 5.2)$ ; 当任意给定的误差  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-8}$  时, 辨识结果为  $(1.25, 3.25, 5.5)$ .

ii) 传递函数为式(17), 其参数为: 分子系数/时间常数 =  $(1, 9)/(2, 5, 8)$ . 当任意给定的误差  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-15}$  时, 辨识结果为  $(1, 9)/(2, 5, 8)$ .

iii) 传递函数为式(18), 其根为  $p_{1,2} = -2 \pm j9.83$ . 当任意给定的误差  $\epsilon = 5.0 \times 10^{-5}$  时, 辨识结果为  $(2, 9.8)$ ; 当任意给定的误差  $\epsilon = 2.0 \times 10^{-6}$  时, 辨识结果为  $(2, 9.81)$ .

$$W(p) = \frac{1}{(1.25p + 1)(3.25p + 1)(5.5p + 1)}, \quad (16)$$

$$W(p) = \frac{(p+1)(9p+1)}{(2p+1)(5p+1)(8p+1)}, \quad (17)$$

$$W(p) = \frac{20}{0.01p^2 + 0.04p + 1}. \quad (18)$$

2) 对于实际系统.

图 1 中, (a)、(b) 分别为控制系统在非超调和超调情况下的辨识结果 (步长为 0.01), 其中, 非平滑曲线为实测结果, 平滑曲线为辨识结果. 由此可以看出, 辨识结果令人满意, 同时, 与文献[6]中的结果基本相同.

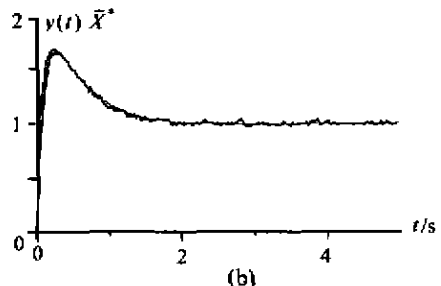
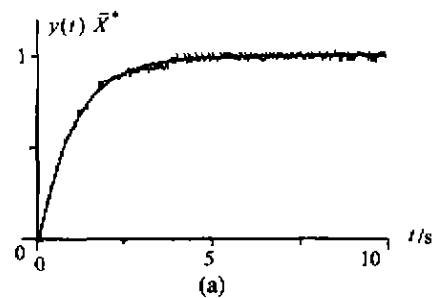


图 1 辨识结果  
Fig. 1 Identification results

## 6 实验结果(Experiment result)

根据以上分析,用 MPR-I 型机器人(技术参数:长度 20mm,直径 8mm,重量 7.9g,驱动器个数为 1,最大速度 40mm/s,工作频率 0 ~ 45Hz,负载力 > 0.5N)<sup>[1]</sup>进行实验.实验用的管道的管径为 15mm,长约 75cm,管道内表面的光洁度为 3.2,铁管;位移测量装置采用英国 RENISHAW 公司的 ML10 激光干涉仪的改进型(主要改造光回路).用  $\pi/6, \pi/4, \pi/3, 3\pi/8$  几种弯管,以机器人在直管中的最大速度对应的工作频率 20Hz 分别进行实验,选用不同的摩擦材料改变接触面的摩擦系数.机器人基本上能完成在弯管内的运动(速度不尽相同),这一结果与理论计算相一致.

### 参考文献(References)

- [1] Cheng Lianglun and Yang Yiming. Study on micro robot in fine pipe [A]. Int. Advanced Robotics Program '98 on Micro Robotics and System [C], Beijing, China, 1998

(上接第 57 页)

## 5 结论(Conclusion)

1) 该反数字变换算法的建立已考虑了系统的零输入响应,因此,在应用时,不用考虑系统初始条件的影响.

2) 该反数字变换算法具有适于应用的典型形式,而且借助于它们可以构成任意阶的反数字变换算法,由此可形成适于应用的递推算法.

3) 根据反数字变换算法的特点,它可以应用于线性系统的参数辨识和控制系统或器件的频率特性改善上.用于线性系统的参数辨识时无须对系统建模并可同时辨识系统的参数与阶数.从理论上讲,应用它对线性系统进行参数辨识时可以达到任意给定的精度,但是,对于实际系统而言,由于存在噪声干扰,使得辨识结果存在一定的误差.试验表明,当噪声干扰小于信号能量的 5% 时,辨识结果可以满足工程要求.

### 参考文献(References)

- [1] Kolosov O S and Feng Zhanlin. Inverse digital filtering for control [A]. Transactions of Moscow State Institute of Radiotechnology System [C], Moscow, 1995, 43 - 45 (in Russian)
- [2] Galfulin A S. Method of Solving the Inverse Problem of Dynamics

- [2] Trinkle J, Pang J, Sudarsky S, et al. On dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction [J]. Zeitschrift for Angewandte Mathematic and Mechanic, 1997, 77(2): 267 - 269
- [3] O'Malley R E, Jiang Furu, Shang Hanyi, et al. Introducing to Singular Perturbation (Chinese version) [M]. Beijing: Science Press, 1988
- [4] Trajan V and Burridge R. Dynamics of a rigid body in frictional contact with rigid walls: motion in two dimensions [A]. In: Proc. 1987 IEEE Int. Conf. Robot Automat. [C], Raleigh, NC, 1987
- [5] Xu Shuhai and Zhu Fangsheng. Numerical Method for Stiff Differential Equations [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 1987 (in Chinese)
- [6] Bi Xuetao. Advanced Dynamics [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1994 (in Chinese)

### 本文作者简介

程良伦 1965 年生, 1986 年毕业于华中理工大学自动控制工程系, 1992 年获华中理工大学工业自动化硕士学位. 现为广东工业大学电气工程及自动化系副教授, 主要从事智能控制、机器人技术的研究.

杨宜民 1945 年生, 现为广东工业大学电气工程及自动化系教授, 博士生导师, 研究领域: 智能控制, 微机器人技术.

[M]. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian)

- [3] Orlov Yu V and Razumuvskii D D. Numerical method of solving optimal generalized control [J]. Automatics and Telemechanics, 1993, 5 (5): 44 - 46 (in Russian)
- [4] Korn G and Korn T. Mathematics Handbook for the Science Worker and Engineering [M]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian)
- [5] Anisimov D N. Identification of linearity dynamic object by the method of exponential modulation [J]. Herald of Moscow Power Engineering, 1994, (2): 74 - 78 (in Russian)
- [6] Abutaliev E D and Bulishev U Sh. Method and Algorithm of Identification for System of Controlling the Continuously Operational Object [M]. Tashkent: Fan, 1990 (in Russian)
- [7] Fang Chongzhi and Xiao deyun. Process Identification [M]. Beijing: Tsinghua University Publishing House, 1988 (in Chinese)
- [8] Zhang Xizmda. Signal Processing [M]. Beijing: Tsinghua University Publishing House, 1995 (in Chinese)

### 本文作者简介

冯占林 1963 年生, 1997 年在莫斯科动力学院获博士学位, 现在清华大学自动化系做博士后研究工作, 主要研究领域为自动控制理论与应用、系统辨识、信号处理等.

曹淑琴 1963 年生, 1989 年在阜新矿业学院获硕士学位, 现在清华大学自动化系华康公司工作, 主要研究领域为控制系统、工业自动化等.

李衍达 1936 年生, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 清华大学信息学院院长, 主要研究领域为自动控制理论与应用、信号与信息处理、模式识别与智能系统、计算机网络等.