文章编号：1000 - 8152(2001)01 - 0080 - 03

# 非线性离散系统基于观测器的反馈控制*

向峥嵘　陈庆伟　胡维礼
(南京理工大学自动化系·南京，210094)

**摘要**：针对一类非线性离散系统，首先提出了一种新的容易实现的状态观测器设计方案，并证明了观测器的收敛性．其次设计了系统基于观测器的输出反馈稳定化控制器．最后给出了数值算例，仿真结果表明了本文设计方法的有效性．

**关键词**：非线性离散系统；状态观测器；线性化；反馈控制；稳定性
**文献标识码**：A

# Feedback Control of Nonlinear Discrete-Time Systems Based on Observers

XIANG Zhengrong,　CHEN Qingwei　and　HU Weili
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology · Nanjing, 210094, P. R. China)

**Abstract**: A new kind of simple and easily implementable state observers are proposed for a class of nonlinear discrete-time systems, and the convergence of the estimated state towards the true state is proved. Then, the observer-based controllers which are used to stabilize the systems are designed. Finally, a numerical example is given to demonstrate effectiveness of the proposed method.

**Key words**: nonlinear discrete-time systems; state observers; linearization; feedback control; stability

## 1　引言(Introduction)

自状态空间描述被引入到控制领域之后，状态反馈成为控制系统设计的重要手段之一，其中状态完全可测是此控制方法中的一个必不可少的假设．然而在工程应用中，由于不易测量或测量设备在经济上和使用性的限制而使得这个假设往往难以实现，且对非线性系统分别用估计状态和真实状态进行控制可能会产生不同的结果[1]，故研究用估计状态来实现输出反馈控制是很有必要的．

近年来，有关非线性系统基于观测器的输出反馈控制设计已有了一些研究结果．文[2]通过近似线性化的方法给出了一类非线性系统基于观测器的反馈控制器设计，文[1]利用微分几何方法研究了一类伪非线性系统基于状态观测器的镇定设计，文[3]在其基础上，利用系统的结构属性研究了相似组合大系统基于观测器的镇定设计．然而这些结果都是针对连续系统而言的，关于离散系统，这方面的研究结果还未见到．本文将对一类非线性离散系统给出其基于观测器的输出反馈控制器设计方案，并用仿真算例说明了所得结论的有效性和可行性．

## 2　问题的描述(Problem statement)

考虑下列非线性离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ y(k) = h(x(k)). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量，$u(k), y(k) \in \mathbb{R}$ 分别为系统的控制输入和可测输出，$f(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ 上的 $n$ 维光滑向量场．不失一般性，假定 $f(0,0) = 0$，$h(0) = 0$．

记 $u_{[r]}(k)$ 为如下的向量：

$$u_{[r]}(k) = \begin{pmatrix} u(k+r-1) \\ u(k+r-2) \\ \vdots \\ u(k) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

对于向量场 $f(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ 和正整数 $m \geqslant 1$，可记 $f^{m+1}$ 为

$$f^{m+1}(x(k), u_{[m+1]}(k)) = f(f^m(x(k), u_{[m]}(k)), u(k+m)). \tag{3}$$

其中 $f^1(x(k), u_{[1]}(k)) = f(x(k), u(k))$．

* 基金项目：国家自然科学基金(69974021)、南京理工大学科研发展基金资助项目．
收稿日期：1999 - 01 - 19；收修改稿日期：1999 - 10 - 15．

显然,由式(3)可得

$$\begin{aligned}x(k+m) &= f^m(x(k),u_{[m]}(k)),\\ y(k+m) &= h\circ f^m(x(k),u_{[m]}(k)).\end{aligned}\tag{4}$$

**定义 1**[4] 给定$\mathbb{R}^n$上的一个$C^\infty$函数$h(x)$和$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1$上的光滑向量场$f(x,u)$,可观测性矩阵$Q[x,u_{[n-1]}]$为

$$Q[x,u_{[n-1]}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Phi[x,u_{[n-1]}]) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}h\circ f^{n-1}(x,u_{[n-1]})\\ h\circ f^{n-2}(x,u_{[n-2]})\\ \vdots\\ h(x)\end{pmatrix}.\tag{5}$$

**定义 2**[5] 考虑系统(1),若对$\forall x(k)\in\mathbb{R}^n$, $\forall u(k)\in\mathbb{R}$,存在最小正整数$i$使得下式成立

$$\frac{\partial}{\partial u(k)}(h\circ f^i(x(k),u_{[i]}(k)))\neq 0.\tag{6}$$

则称系统(1)具有全局相对阶为$i$.

## 3 主要结果(Main results)

**定理 1** 如果对$\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall u_{[n-1]}\in\mathbb{R}^n$,可观测性矩阵$Q[x,u_{[n-1]}]$满秩,则可构造下列观测器来估计系统(1)的状态

$$\begin{cases}\omega(k) = \Phi^{-1}(y_{[n]}(k-n+1),u_{[n-1]}(k-n+1)),\\ \hat{x}(k) = f^{n-1}(\omega(k),u_{[n-1]}(k-n+1)).\end{cases}\tag{7}$$

证 引入非线性状态变换

$$y_{[n]}(k-n+1) = \begin{pmatrix}y(k)\\ y(k-1)\\ \vdots\\ y(k-n+1)\end{pmatrix} = \Phi(x(k-n+1),u_{[n-1]}(k-n+1)).\tag{8}$$

由于可观测性矩阵$Q[x,u_{[n-1]}]$是满秩的,故由隐函数定理可知$\Phi^{-1}$存在,即有

$$\begin{aligned}&x(k-n+1) =\\ &\Phi^{-1}(z(k),u_{[n-1]}(k-n+1)) =\\ &\Phi^{-1}(y_{[n]}(k-n+1),u_{[n-1]}(k-n+1)) =\\ &\omega(k),\quad k\geqslant n-1,\end{aligned}$$

于是由式(4)可得

$$\begin{aligned}&x(k)-\hat{x}(k) =\\ &x(k)-f^{n-1}(\omega(k),u_{[n-1]}(k-n+1)) =\\ &0,\quad k\geqslant n-1.\end{aligned}\tag{9}$$

定理1证毕.

**注 1** 观测器(7)较文[4]给出的观测器形式上要简单、易于实现,且不需要系统(1)满足另外两个假设条件.

下面考虑系统(1)的稳定控制器设计问题.

**定理 2** 如果系统(1)具有全局相对阶为$n$,则系统(1)可以用观测器(7)给出的估计状态实现输出反馈渐近稳定.

证 构造下列状态变换

$$\begin{cases}z_1(k) = h(x(k)),\\ z_2(k) = h\circ f(x(k),u(k)),\\ \quad\vdots\\ z_n(k) = h\circ f^{n-1}(x(k),u_{[n-1]}(k)),\end{cases}\tag{10}$$

及状态反馈

$$v(k) = h\circ f^n(x(k),u_{[n]}(k)),\tag{11}$$

可将系统(1)化为如下标准可控线性离散系统

$$\begin{cases}z(k+1) = Az(k)+Bv(k),\\ y(k) = Cz(k).\end{cases}\tag{12}$$

其中$(A,B,C)$为Brunovsky标准型.

显然,系统(12)的状态反馈稳定控制器为

$$v(k) = -Kz(k).\tag{13}$$

其中$K=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$的选取应使得下列多项式的特征根具有负实部

$$P(\lambda) = \lambda^n + k_n\lambda^{n-1} + \cdots + k_2\lambda + k_1 = 0.\tag{14}$$

因为$\frac{\partial}{\partial u(k)}(h\circ f^n(x(k),u_{[n]}(k)))\neq 0$,故由隐函数定理知存在函数$\gamma:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,使得

$$u(k) = \gamma(x(k),v(k)).\tag{15}$$

控制律(15)需要用到系统(1)的全部状态,为此需要构造状态观测器来估计系统(1)的状态,并利用估计状态进行反馈控制.由题设可知

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0,\ i = 0,1,\cdots,n-2,\tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\neq 0.\tag{17}$$

考虑下列$n$个行向量

$$\left\{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\cdots,\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n-1}\right\}.\tag{18}$$

假设由式(18)构成的$n$个行向量是线性相关的,则对某个正整数$j(j\leqslant n)$,存在标量函数$a_k(x)$, $k=0,1,\cdots,j-1$,使得

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^j = \sum_{k=0}^{j-1}\alpha_k(x)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^k.\tag{19}$$

上式两边右乘$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n-j-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$,可得

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \sum_{k=n-j-1}^{n-2}\alpha_k(x)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right).\tag{20}$$

由式(16)、(17)可知,上式左边不等于零,右边等于零,结果矛盾,故由式(18)给出的 $n$ 个行向量是线性无关的,即可观测性矩阵 $Q[x,u_{[n-1]}]$ 满秩.根据定理1,可按式(7)设计系统(1)的状态观测器.由式(9)知,当 $k\geqslant n-1$ 时,由观测器(7)估计的状态收敛到系统(1)的真实状态,于是当 $k\geqslant n-1$ 时,有

$$u(k)=\gamma(\hat{x}(k),-KT(\hat{x}(k)))=\gamma(x(k),-KT(x(k))). \tag{21}$$

即闭环系统渐近稳定.定理2证毕.

## 4 仿真(Simulation)

为了说明本文设计方法的有效性,考虑下列非线性离散系统

$$\begin{cases}x_1(k+1)=x_1^2(k)+x_2(k),\\ x_2(k+1)=x_2(k)\cos x_1(k)+u(k),\\ y(k)=x_1(k).\end{cases} \tag{22}$$

由定理2可设计系统(22)的稳定控制器为

$$u(k)=-x_2(k)\cos x_1(k)-(x_1^2(k)+x_2(k))^2-k_1x_1(k)-k_2(x_1^2(k)+x_2(k)). \tag{23}$$

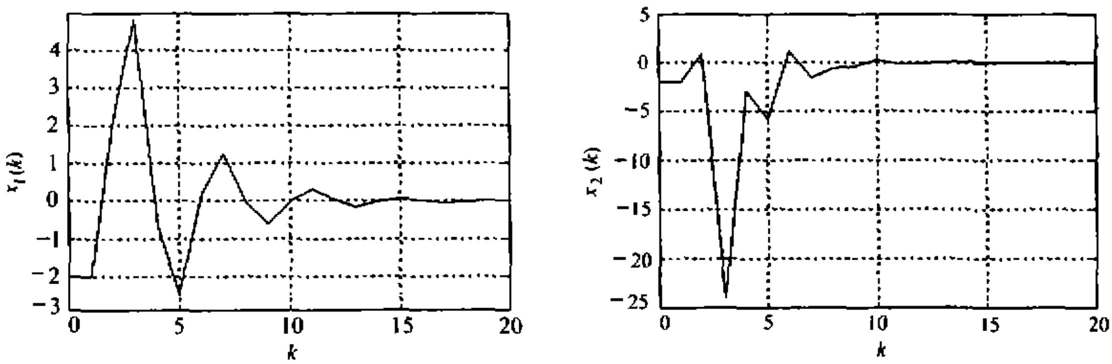
其中状态 $x_1(k),x_2(k)$ 可由下列观测器得到

$$\begin{cases}\hat{x}_1(k)=\omega_1^2(k)+\omega_2(k),\\ \hat{x}_2(k)=\omega_2(k)\cos\omega_1(k)+u(k-1).\end{cases} \tag{24}$$

式中

$$\begin{cases}\omega_2(k)=y(k)-y^2(k-1),\\ \omega_1(k)=y(k-1).\end{cases}$$

取系统状态初值 $x_1(0)=-2,x_2(0)=-2$,观测器状态初值为 $\hat{x}_1(0)=0,\hat{x}_2(0)=0$,控制器增益阵 $K=(-0.5,0.06)$,得系统(23)基于观测器的闭环系统状态曲线如图1所示.




(a) (b)

图1 闭环系统状态

Fig. 1 States of closed-loop system

## 5 结论(Conclusion)

本文针对一类非线性离散系统,首先设计了该系统的状态观测器,所设计的观测器具有算法简单、易于实现等优点.由于它直接利用了系统的输入值 $u(k-1),\cdots,u(k-n+1)$ 和输出值 $y(k),\cdots,y(k-n+1)$ 来构成系统的状态,克服了文[4]所附加的不必要的限制条件.其次给出了系统基于观测器的输出反馈控制器,并证明了闭环系统的渐近稳定性.最后通过仿真研究说明了本设计方法的有效性和可行性.

## 参考文献(References)


[1] Jing Y W, Yan X G and Zhang S Y. Stabilization and design of a class of nonlinear systems based on state observers [J]. Control and Decision, 1996, 11(1): 28 – 33 (in Chinese)

[2] Nicosia S, Tomei P and Tornambe A. Observer-based control for a class of nonlinear systems[J]. Int. J. Control, 1990, 50(6): 553 – 566

[3] Yan X G, Lu X Y and Zhang S Y. Stabilization for a class of similar composite large-scale systems based on state observers [J]. Acta Automatica Sinica, 1997, 23(5): 584 – 590 (in Chinese)

[4] Ciccarella G, Dalla M M and Germani A. Observers for discrete-time nonlinear systems[J]. Systems & Control Letters, 1993, 20(5): 373 – 382

[5] Kurtz M J and Henson M A. Feedback linearizing control of discrete-time nonlinear systems with input constraints [J]. Int. J. Control, 1998, 70(4): 603 – 616


### 本文作者简介


**向峥嵘** 1969年生.1998年在南京理工大学获博士学位,现在该校自动化系任教.目前已发表论文30余篇.研究兴趣为非线性系统,鲁棒控制及神经网络在控制中的应用等.

**陈庆伟** 1963年生.高级工程师.1988年在南京理工大学自动化系获工学硕士学位.目前主要研究方向为智能控制理论及应用、计算机控制系统等.

**胡维礼** 1941年生.教授,博士生导师.1965年毕业于清华大学自动控制系,1981年在南京理工大学获工学硕士学位.目前主要研究方向为非线性系统,自适应控制,智能控制理论及其应用等.