文章编号: 1000-8152(2001)01-0109-04

时滞不确定系统 DMC 约束控制的鲁棒性条件*

李阳春　张卫东　许晓鸣　杨煜普
(上海交通大学自动化系·上海,200030)

摘要: 讨论具有控制变量约束的时滞线性不确定系统 DMC 算法的鲁棒稳定性充要条件.共有两个部分:1)线性时滞 DMC 约束控制算法,通过在预测模型中引进模型误差补偿量 $\varepsilon_1(k)$ 和干扰修正量 $\varepsilon_2(k)$ 来补偿预测输出,减小预测误差;2)给出闭环系统鲁棒稳定的充要条件,得出了保证系统鲁棒性的模型误差、干扰、预测误差、跟踪误差以及期望输出各量之间的定量关系.

关键词: 时滞 DMC; 预测误差; 跟踪误差; 鲁棒性
文献标识码: A

Robust Stability Conditions for DMC Algorithm of Constrained Delay Uncertain System

LI Yangchun, ZHANG Weidong, XU Xiaoming and YANG Yupu
(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University·Shanghai, 200030, P.R.China)

Abstract: Sufficient and necessary conditions for delay linear uncertain systems(DLUS) with constrained control variable are discussed in this paper. There are two contributions: first, the new DMC control algorithm is given, in which compensations $\varepsilon_1(k)$ for model error and $\varepsilon_2(k)$ for disturbance are introduced to decrease predictive error; second, the sufficient and necessary conditions for robust stability of the closed loop system are given and the relations between model error, disturbance, predictive error and expected output that assure robust stability of the system are investigated.

Key words: delay DMC algorithm; predictive error; tracking error; robust stability

1 引言(Introduction)

预测控制是一种有效的过程控制技术,许多算法存在相当的非线性,导致系统性能分析尤其是鲁棒性分析的困难[1].已经有一些文献讨论了这一问题.如文[2]通过调节预测时域和控制时域,以及目标函数中各权值实现闭环鲁棒性.文[3]通过鲁棒化调节器增强闭环鲁棒性,同时保持闭环跟踪性能.但是这些方法没有揭示闭环鲁棒性与模型误差间的定量关系.为达到这个目的,本文采用 z 变换方法得到闭环系统中期望输出到预测误差、跟踪误差及闭环输入的传递函数,进一步确定鲁棒性与模型误差之间的定量关系.

2 控制算法(Control algorithm)

设建立了系统标称模型:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{s} p_i u(k-l-i+1). \tag{1}$$

对象描述:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} (p_i + \Delta p_i) u(k-l-i+1) + d(k). \tag{2}$$

其中 l 为时滞数, $d(k)$ 为干扰,当 $i > s$ 时 $p_i = 0$. 若记系统的阶跃响应序列为 $\{a_i\}_1^{\infty}$, 其中 $a_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$. 则可以根据标称模型构造系统预测模型:

$$y(k+l+i \mid k) = \sum_{j=0}^{\min(M-1,i)} a_{i-j+1}\Delta u(k+j) + a_{i+2}u(k-1) + \sum_{j=i+3}^{s} p_j u(k+i-j+1) + \varepsilon_1(k+l+i) + \varepsilon_2(k+l+i),\ i = 0,1,\cdots,P-1. \tag{3}$$

其中 P, M 分别为预测时域和控制时域,并且 $P \geqslant M$、$P \geqslant l$. ε_1 和 ε_2 是对模型误差的预测补偿,对干扰的修正.记

$$Y(k+l) = (y(k+l \mid k)\ y(k+l+1 \mid k) \cdots$$

* 基金项目:国家自然科学基金(69804007)和上海科技启明星计划(99QD14012)资助项目.
收稿日期:1998-05-13; 收修改稿日期:1999-10-18.

$y(k+l+P-1 \mid k))^{\mathrm{T}}$,

$\Delta U(k) = (\Delta u(k)\ \Delta u(k+1) \cdots \Delta u(k+M-1))^{\mathrm{T}}$,

$U(k) = (u(k-1)\ u(k-2) \cdots u(k-s+1))^{\mathrm{T}}$,

$\bar{\varepsilon}_1(k+l) = (\varepsilon_1(k+l)\ \varepsilon_1(k+l+1) \cdots \varepsilon_1(k+l+P-1 \mid k))^{\mathrm{T}}$,

$\bar{\varepsilon}_2(k+l) = (\varepsilon_2(k+l)\ \varepsilon_2(k+l+1) \cdots \varepsilon_2(k+l+P-1 \mid k))^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha_M & \alpha_{M-1} & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_{M+1} & \alpha_M & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_P & \alpha_{P-1} & \cdots & \alpha_{P-M+1} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_2 & P_3 & \cdots & \cdots & \cdots & P_s \\ \alpha_3 & P_4 & \cdots & \cdots & P_s & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{P+1} & P_{P+2} & \cdots & P_s & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

于是预测模型有向量形式

$$Y(k+l) = A\Delta U(k) + FU(k) + \varepsilon_1(k+l) + \varepsilon_2(k+l). \tag{4}$$

设系统的期望输出序列为有界序列 $\{\omega_i\}_0^\infty$,作向量

$$W(k+l) = (\omega(k+l)\ \omega(k+l+1) \cdots \omega(k+l+P-1))^{\mathrm{T}}.$$

系统目标函数取为

$$J(k) = (W(k+l) - Y(k+l))^{\mathrm{T}} \Lambda (W(k+l) - Y(k+l)) + \Delta U^{\mathrm{T}}(k) \Gamma \Delta U(k). \tag{5}$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_0 \cdots \lambda_{P-1})$, $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_0 \cdots \gamma_{M-1})$ 是目标函数中的加权矩阵.由目标函数可解得控制律

$$\Delta U(k) = (A^{\mathrm{T}}\Lambda A + \Gamma)^{-1} A^{\mathrm{T}} \Lambda ((W(k+l) - FU(k) - \bar{\varepsilon}_1(k+l) - \bar{\varepsilon}_2(k+l)). \tag{6}$$

若以 $y(k)$ 表示系统真实输出,且 $Y_R(k+l) = (y(k+l) \cdots y(k+l+P-1))^{\mathrm{T}}$,则

$$Y_R(k+l) = (A+\Delta A)\Delta U(k) + (F+\Delta F)U(k) + \Delta G_l(k+l) + D(k+l), \tag{7}$$

其中 $\Delta G_l(k+l)$ 表示对象相对于标称模型的截尾误差向量,$D(k+l)$ 为干扰向量.

前面给出了控制变量有约束时的时滞系统DMC算法.下面将讨论在上面控制律作用下闭环系统的鲁棒性.

3 鲁棒性分析(Analysis of robustness)

设 e 和 ε 分别表示系统跟踪误差和预测误差,且 $e(k) = \omega(k) - y(k)$, $\varepsilon(k) = y(k) - y(k \mid k-l)$.

定理1 对于时滞线性系统,采用上述算法,则闭环系统的频域结构如下:

$$u(z) = \frac{A_\omega(z)}{A_u(z)}(\omega(z) - \varepsilon_1(z) - \varepsilon_2(z)), \tag{8}$$

$$\varepsilon(z) = [1 + z^{-l}\Delta G(z^{-1})\frac{A_\omega(z)}{A_u(z)}](\omega(z) - \varepsilon_1(z) - \varepsilon_2(z)) + d(z) - \omega(z), \tag{9}$$

$$e(z) = \left\{ -[z^{-l}\Delta G(z^{-1})\frac{A_\omega(z)}{A_u(z)} + 1] + \alpha^{\mathrm{T}}[\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{P-1} \end{pmatrix} - z^{-l}F\begin{pmatrix} z^{-l} \\ \vdots \\ z^{-(s-1)} \end{pmatrix}\frac{A_\omega(z)}{A_u(z)}] \right\}(\omega(z) - \varepsilon_1(z) - \varepsilon_2(z)) + d(z) - \omega(z). \tag{10}$$

其中

$$A_\omega(z) = z^l \beta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{P-1} \end{pmatrix},$$

$$A_u(z) = 1 - z^{-1} + \beta^{\mathrm{T}} F \begin{pmatrix} z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(s-1)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\alpha^{\mathrm{T}} = (1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)(I + A\Gamma^{-1}A^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1},$$

$$\beta^{\mathrm{T}} = (1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)(A^{\mathrm{T}}\Lambda A + \Gamma)^{-1}A^{\mathrm{T}}\Lambda.$$

证 由 $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$ 得

$$u(k) = u(k-1) + \beta^{\mathrm{T}}[(W(k+l) - FU(k) - \bar{\varepsilon}_1(k+l) - \bar{\varepsilon}_2(k+l))]. \tag{12}$$

考虑到

$$\varepsilon(k+l) = \Delta G(q^{-1})u(k) - \varepsilon_1(k+l) - \varepsilon_2(k+l) + d(k+l), \tag{13}$$

其中 q^{-1} 为后向算子.所以

$$\omega(k+l) - y(k+l) = y(k+l \mid k) - y(k+l) + \alpha^{\mathrm{T}}[(W(k+l) - FU(k) - \bar{\varepsilon}_1(k+l) - \bar{\varepsilon}_2(k+l)],$$

$$e(k+l) = -\varepsilon(k+l) + \alpha^{\mathrm{T}}[(W(k+l) - FU(k) - \bar{\varepsilon}_1(k+l) - \bar{\varepsilon}_2(k+l)]. \tag{14}$$

注意到

$$W(z)=\begin{pmatrix} z^l \\ \vdots \\ z^{l+P-1}\end{pmatrix}\omega(z)U(z)=\begin{pmatrix} z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(s-1)}\end{pmatrix}u(z)\bar{\varepsilon}_1(z)=\begin{pmatrix} z^l \\ \vdots \\ z^{l+P-1}\end{pmatrix}\varepsilon_1(z)\bar{\varepsilon}_2(z)=\begin{pmatrix} z^l \\ \vdots \\ z^{l+P-1}\end{pmatrix}\varepsilon_2(z),$$

因此

$$[1-z^{-1}+\beta^{\mathrm{T}}F\begin{pmatrix} z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(s-1)}\end{pmatrix}]u(z)=z^l\beta^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{P-1}\end{pmatrix}(\omega(z)-\varepsilon_1(z)-\varepsilon_2(z)),$$

或者

$$u(z)=\frac{A_\omega(z)}{A_u(z)}(\omega(z)-\varepsilon_1(z)-\varepsilon_2(z)).\quad(15)$$

由式(13)得

$$\varepsilon(z)=z^{-l}\Delta G(z^{-1})u(z)-\varepsilon_1(z)-\varepsilon_2(z)+d(z)=[1+z^{-l}\Delta G(z^{-1})\frac{A_\omega(z)}{A_u(z)}](\omega(z)-\varepsilon_1(z)-\varepsilon_2(z))+d(z)-\omega(z).\quad(16)$$

由式(14)得

$$e(z)=-\varepsilon(z)+\alpha^{\mathrm{T}}[\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{P-1}\end{pmatrix}\omega(z)-z^{-l}F\begin{pmatrix} z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(s-1)}\end{pmatrix}u(z)-\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{P-1}\end{pmatrix}\varepsilon_1(z)-\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{P-1}\end{pmatrix}\varepsilon_2(z)].\quad(17)$$

整理后得到式(10).

由定理 1 可以得到如下推论:

推论 1　时滞线性系统采用上述算法,如果系统不受到干扰,且预测补偿 $\varepsilon_1(k+l)=\cdots=\varepsilon_1(k+l+P-1)=y(k)-y(k\mid k-l)=\varepsilon(k)$ 时,则闭环系统频域结构如下:

$$u(z)=\frac{A_\omega(z)(z^l+1)}{A_u(z)(z^l+1)+\beta_1^{\mathrm{T}}\Delta G(z^{-1})}\omega(z),\quad(18)$$

$$\varepsilon(z)=\frac{A_\omega(z)\Delta G(z^{-1})}{A_u(z)(z^l+1)+\beta_1^{\mathrm{T}}\Delta G(z^{-1})}\omega(z),\quad(19)$$

$$e(z)=\{[-1+z^{-l}\alpha^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}]\frac{A_\omega(z)\Delta G(z^{-1})}{A_u(z)(z^l+1)+\beta_1^{\mathrm{T}}\Delta G(z^{-1})}+\alpha^{\mathrm{T}}[\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{P-1}\end{pmatrix}-z^{-l}F\begin{pmatrix} z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(s-1)}\end{pmatrix}\cdot\frac{A_\omega(z)(z^l+1)}{A_u(z)(z^l+1)+\beta_1^{\mathrm{T}}\Delta G(z^{-1})}]\}\omega(z).\quad(20)$$

其中　$\beta_1^{\mathrm{T}}=\beta^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.

证　略.

前面得到闭环系统频域结构.为了保证闭环性质,需要作一般性的假设:

1) $\alpha_s\neq 0$;

2) $(1\quad 0\quad\cdots\quad 0)(A^{\mathrm{T}}\Lambda A+\Gamma)^{-1}A^{\mathrm{T}}\Lambda\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\neq 0$;

3) 干扰 $d(k)$ 有界.

由定理 1 的结论可以看到闭环系统性质与 $\omega(z)-\varepsilon_1(z)-\varepsilon_2(z)$ 有密切关系.下面先得到关于闭环性能的一个必要条件.

定理 2　当 $\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)=0$ 时,闭环系统实现静差为 $e(\infty)=\omega(\infty)-d(\infty)$ 的跟踪.

证　由式(10)和终值定理可以直接得证.

当 $\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)\neq 0$ 时,我们有:

定理 3　时滞线性系统采用上述算法,构成的闭环系统的鲁棒稳定的充要条件是存在 $\delta\geqslant 0$ 使得下面不等式成立

$$\frac{(\varepsilon_1(\infty)+\varepsilon_2(\infty)-d(z))\alpha_s}{\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)}-\frac{\delta\mid\alpha_s\mid}{\mid\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)\mid}\leqslant\Delta G(1)\leqslant\frac{(\varepsilon_1(\infty)+\varepsilon_2(\infty)-d(z))\alpha_s}{\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)}+\frac{\delta\mid\alpha_s\mid}{\mid\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)\mid}.\quad(21)$$

证　必要性.因为

$$u(\infty)=\frac{\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)}{\alpha_s},\quad(22)$$

$$\varepsilon(\infty)=[1+\frac{\Delta G(1)}{\alpha_s}][\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)]+d(\infty)-\omega(\infty),\quad(23)$$

$$e(\infty) = -\left[1+\frac{\Delta G(1)}{\alpha_s}\right][\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)]-d(\infty)+\omega(\infty). \tag{24}$$

由于闭环系统鲁棒性成立,故 $|e(\infty)|\leqslant\delta$ 有界,即:

$$\left|-\left[1+\frac{\Delta G(1)}{\alpha_s}\right][\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)]-d(\infty)+\omega(\infty)\right|\leqslant\delta, \tag{25}$$

稍加整理得到式(21).

充分性.由式(21)可以得到式(25).同时式(25)意味着

$$\left|1+\frac{\Delta G(1)}{\alpha_s}\right|\leqslant\frac{\delta+|\omega(\infty)-d(\infty)|}{|\omega(\infty)-\varepsilon_1(\infty)-\varepsilon_2(\infty)|}.$$

若记 $\omega(k)$ 到 $e(k)$ 的传递函数为 $\bar{G}(z^{-1})$,则上式左边为 $|\bar{G}(1)|$.由干扰有界的假设则 $|\bar{G}(1)|$ 有界.故闭环系统鲁棒稳定.

与定理3的证明相似,有以下推论:

推论 2 时滞线性不确定系统采用上述算法,在系统无干扰,预测补偿 $\varepsilon_1(k+l)=\cdots=\varepsilon_1(k+l+P-1)=y(k)-y(y\mid k-l)=\varepsilon(k)$,且 $\omega(\infty)\neq 0$ 时,闭环系统具有鲁棒性的充要条件如下:

$$\left(\frac{\delta^2}{\omega^2(\infty)}-1\right)\Delta G^2(1)+\frac{4\delta^2}{\omega^2(\infty)}\alpha_s\Delta G(1)+\frac{4\alpha_s^2\delta^2}{\omega^2(\infty)}\geqslant 0. \tag{26}$$

证 略.

采用上述算法最终保证的是预测输出很好地跟踪期望输出,而非对象真实输出很好地跟踪期望输出.为了实现这一目的,一个可行的办法是减小预测误差,使 $\varepsilon(k)\to 0, k\to\infty$.相应地,提高预测精度又对减小模型误差和抗干扰能力提出了更高要求.实现无差跟踪的系统要求无差预测.

式(21)和式(26)中的 δ 直接反映了跟踪精度.它和期望输出、模型误差及干扰的关系已经在方程中表明.限于篇幅,更详细的讨论不再给出.

4 结束语(Conclusions)

本文针对时滞线性不确定系统的DMC约束控制算法讨论了闭环系统鲁棒性的充要条件.首先针对一般时滞线性不确定系统得到关于鲁棒性判断的定理;其次类似于文[1]的反馈校正得到预测误差补偿为 $\varepsilon(k)=y(k)-y(k\mid k-l)$ 的闭环鲁棒性条件.本文对上述两种情况的结果进行了分析,对各量间的关系进行了阐述.

参考文献(References)

[1] Xi Y G. Predictive Control [M]. Beijing: Defence Publishing House, 1990

[2] Badgwell A T. Robust stability conditions for SISO model predictive control algorithm[J]. Automatica, 1997, 33(7): 1357 – 1361

[3] Nicolao G D. Robust predictive control of systems with uncertain impulse response[J]. Automatica, 1996, 32(10): 1475 – 1479

本文作者简介

李阳春 1970年生.上海交通大学博士生.研究兴趣为预测控制,鲁棒控制和LMI.

张卫东 1967年生.上海交通大学教授.1996年于浙江大学获工学博士学位,1998年博士后出站后留校任教.作为第一作者在国内外刊物和国际会议上发表论文70篇.研究方向为过程控制、最优控制和鲁棒控制理论及其应用.

许晓鸣 上海交通大学教授、博士生导师、德国洪堡奖学金获得者.长期从事电气自动化,过程控制理论、鲁棒控制理论及应用和计算机网络研究.发表学术论文300多篇,获各类科技进步奖4项.现任上海交通大学副校长.

杨煜普 1957年生.上海交通大学副教授.1994年在上海交通大学获工学博士学位.1996年博士后出站后留校任教.研究方向为非线性系统和智能控制.