文章编号：1000-8152(2001)01-0131-04

多变量线性系统鲁棒非奇异自适应控制的改进*

赵晓晖　　王书强　张广成
（长春邮电学院信息科学研究中心·长春，130012）（吉林工业大学信息科学与工程学院·长春，130025）

摘要：为解决多变量线性系统间接自适应控制的奇异性或不可控性问题，在文[1]的基础上提出了一种新的修正模型辨识参数方法，该参数修正策略使系统辨识模型在适应过程中保持能控性.此修正算法较文[1]计算量大为减少，进一步提高了控制算法的实时性.

关键词：多变量自适应控制；非奇异性；鲁棒性；全局渐近稳定性

文献标识码：A

Improvement of Robust Singularity-Free Adaptive Control of Multivariable Linear Systems

ZHAO Xiaohui
(Research Center of Information Science, Changchun Institute of Posts and Telecommunications·Changchun, 130012, P.R.China)
WANG Shuqiang　and　ZHANG Guangcheng
(College of Information Science and Engineering, Jilin University of Technology·Changchun, 130025, P.R.China)

Abstract: In order to solve singularity problems or problems of losing controllability in the indirect adaptive control of multivariable linear systems, a novel modified parameter estimation procedure is proposed on the basis of [1]. The method can guarantee system controllabiliy for the estimated models and it is much less complicated than that given in [1] in calculation, which improves the implementation possibility in real time control circumstances.

Key words: multivariable adaptive control; singularity-free; robustness; globally asymptotically stability

1　引言(Introduction)

间接自适应控制的奇异性问题是近年来自适应控制理论研究的重点之一.对这个问题的研究方法也是多种多样，其中一种重要的研究方法就是辨识参数修正法.但是这种方法计算量大，缺乏自适应控制系统要所要求的实时性.文[1]将文[2]的结果推广到多变量线性时不变系统中，因此存在相同的弱点.在文[1]的基础上，本文提出一种估计参数修正策略.这种算法大大减少了原算法的计算量，提高了新方法的实时性.

2　参数辨识(Parameter identification)

考虑多变量线性离散时不变系统

$$A(D)y(t)=B(D)u(t)+v(t). \tag{1}$$

其中

$$y(t)=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_q(t)]^{\mathrm T},$$
$$u(t)=[u_1(t),u_2(t),\cdots,u_p(t)]^{\mathrm T},$$
$$v(t)=[v_1(t),v_2(t),\cdots,v_q(t)]^{\mathrm T}.$$

$A(D)$ 和 $B(D)$ 分别是 $q\times q$ 和 $q\times p$ 维后移算子 D 的左互质多项式矩阵，结构见文[1].$A(D)$ 是行既约的，记 $\Gamma_r[A(D)]$ 为 $A(D)$ 的最高次项系数矩阵，不失一般性，令该矩阵为对角线元素为 1 的下三角矩阵，$u(t)$ 和 $y(t)$ 分别是系统的 p 维输入向量和 q 维输出向量，$v(t)$ 是如下定义的恒定扰动和未建模动态向量，其元素满足 $|v_i(t)|\leqslant \eta_i+\mu_i\|\varphi_i(t-1)\|_2$，$\eta_i,\mu_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,q$，其中 η_i 为第 i 个外界恒定扰动，$\mu_i\|\varphi_i(t-1)\|_2$ 代表未建模动态误差，$v_i(t)$ 是包含前两者之和的扰动.(1)式还可以写成如下分量形式

$$y_i(t)=\theta_i^{*\mathrm T}\varphi_i(t-1)+v_i(t),\ i=1,2,\cdots,q. \tag{2}$$

其中 $\varphi_i(t-1)$ 和 θ_i^* 的定义见文[1]，θ_i^* 是系统未知参数真值.本文对系统(1)作如下假设：1) 系统(1)能控且其能观性指数 $v_j(j=1,2,\cdots,q)$ 和能控性指数的上界 μ 已知；2) 扰动上界 μ_i 和 η_i 已知.

* 基金项目：国家自然科学基金(69574005)资助项目.
收稿日期：1999-02-09；收修改稿日期：1999-12-27.

对(3)式正则化处理

$$\bar{\varphi}_i(t-1)=\frac{\varphi_i(t-1)}{1+\|\varphi_i(t-1)\|_2},$$

$$\bar{y}_i(t-1)=\frac{y_i(t)}{1+\|\varphi_i(t-1)\|_2},$$

$$\bar{v}_i(t)=\frac{v_i(t)}{1+\|\varphi_i(t-1)\|_2},$$

于是最小二乘递推算法

$$\theta_i(t)=\theta_i(t-1)+\lambda_i(t)F_i(t)\bar{\varphi}_i(t-1)e_i(t), \tag{3}$$

$$F_i(t)=F_i(t-1)-\frac{F_i(t-1)\bar{\varphi}_i(t-1)\bar{\varphi}_i^{\mathrm{T}}(t-1)F_i(t-1)}{1+\lambda_i(t)\bar{\varphi}_i^{\mathrm{T}}(t-1)F_i(t-1)\bar{\varphi}_i(t-1)}. \tag{4}$$

(3)式中的辨识参数估计预报误差为 $e_i(t)=\bar{y}_i(t)-\theta_i^{\mathrm{T}}(t-1)\bar{\varphi}_i(t-1)$，$\theta_i(t)$ 是未知参数 θ_i^* 的估计值，

$$\lambda_i(t)=\begin{cases}0, \text{ 如果 } \omega_i^2(t)<\dfrac{\alpha_1\delta_i^2(t)}{1-\alpha_{2i}},\\ 1, \text{ 否则}; \end{cases} \tag{5}$$

式中 $\omega_i(t)$ 和其上界 $\delta_i(t)$ 分别定义为 $\omega_i(t-1)=[e_i^2(t)+\bar{\varphi}_i^{\mathrm{T}}(t-1)F_i^2(t-1)\bar{\varphi}_i(t-1)]^{1/2}$，$\alpha_{1i}=1+\mathrm{tr}F_i(0)$，$\alpha_{2i}$ 是任选小正常数，$|\bar{v}_i(t)|\leqslant\mu_i+\dfrac{\eta_i}{1+\|\varphi_i(t-1)\|_2}=\delta_i(t)$. 上述估计算法的收敛特性见下面：

由(2)式～(5)式给出的最小二乘递推辨识估计算法具有下列特性：

1) $F_i(t)$ 和 $\theta_i(t)$ 均有界收敛；

2) 当 $\lambda_i(t)=1$ 时，$\sum_{t=1}^{\infty}(\lambda_i(t)\omega_i(t))^2<\infty$，当 $\lambda_i(t)=0$ 时，$\omega_i(t)$ 有界.

证明详见文[3].

3 主要结果(Main results)

考虑文[1]和文[2]中定义的参数辨识修正公式 $\bar{\theta}_i(t)=\theta_i(t)+F_i(t)\beta_i(t)$，其中 $\beta_i(t)$ 为有界收敛向量. 记

$$\Theta^*=[\theta_1^*,\theta_2^*,\cdots,\theta_q^*],$$

$$\bar{\Theta}_t=[\bar{\theta}_1(t),\bar{\theta}_2(t),\cdots,\bar{\theta}_q(t)],$$

$$\Theta_t=[\theta_1(t),\theta_2(t),\cdots,\theta_q(t)].$$

适当选取 $\beta_i(t)$ 以保证由 $\bar{\Theta}_t$ 产生的广义 Sylvester 结式矩阵 $S(\bar{\Theta}_t)$ 非奇异[2]，令 Ω 为具有内部封闭性的 l_i 维向量空间 $\mathbb{R}^{l_i}$ 上的紧子集，$l_i=n+pv_i$，Ω 取单位立方域 $\{X_i(t)=(x_1,x_2,\cdots,x_{l_i})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{l_i};0\leqslant x_k\leqslant 1;0\leqslant k\leqslant l\}$，记

$$\beta_t=[\beta_1^{\mathrm{T}}(t),\beta_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\beta_q^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}=[x_1,x_2,\cdots,x_l]^{\mathrm{T}}.$$

其中 $l=\sum_{i=1}^{q}(n+pv_i)$，$\{X_i(t)\}$，$i=1,2,\cdots,q$ 是在 Ω 上一致分布的 l_i 维向量序列. 为保证广义 Sylvester 结式矩阵非奇异，$\beta_i(t)$ 在 Ω 中切换. 为使它收敛，引入一与滞环常数 γ，$1\geqslant 2\gamma+\gamma^2$[4].

定义

$$Z(X_t)=\det[S(\bar{\Theta}_t)S^{\mathrm{T}}(\bar{\Theta}_t)] \tag{7}$$

为系统 $\bar{\Theta}_t$ 的一种可控度[1]. $\beta_i(t)$ 在 $\{X_i(t)\}$ 中选取.

$$X_t=\begin{cases}\eta_t, & Z_t(\eta_t)\geqslant(1+\gamma)Z_t(X_{t-1}),\\ X_{t-1}, & Z_t(\eta_t)<(1+\gamma)Z_t(X_{t-1}).\end{cases} \tag{8}$$

其中初始条件为 $X_0=\eta_0$(对所有 $t\geqslant 1$)，η_t 是 $\{X_t(t)\}$ 一随机向量. 这里 X_t 是通过基于最优的随机搜索法来选取的，这种方法的优点在于每步只需计算比较两个矩阵的大小即可[4].

定理 1 考虑满足假设 1)和假设 2)的多变量系统(1)式，参数辨识算法如上节，辨识修正策略由(6)～(8)式给出，则此修正策略具有性质：

1) $X_i(t)$，$i=1,2,\cdots,q$ 收敛；

2) 系统 $\bar{\Theta}_t$ 的可控度有下界

$$\det[S(\bar{\Theta}_t)S^{\mathrm{T}}(\bar{\Theta}_t)]\geqslant\frac{\varepsilon_0\sqrt{Q}}{(1+\gamma)l^{1/2}\prod_{i=1}^{q}h_i^{(m_i-1)(n+pv_i)}M}.$$

其中 ε_0 是系统可控度的一个下界，即

$$0<\varepsilon_0\leqslant\det[S(\Theta^*)S^{\mathrm{T}}(\Theta^*)],$$

$$h_i=\max(1,h_{i0}),\ h_{i0}=V_0,$$

V_0 的定义参见文[3]，

$$Q=\prod_{i=1}^{q}|\det\alpha_i|^{\Delta_i},\Delta_i=n_im_i^{n_i-1}\prod_{k=1,k\neq i}^{q}m_k^{n_k},$$

$$n_i=n_{i-1}+(n+pv_i),n_0=0,m_i=2(\mu+v_i),$$

$$M=\sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_q=1}^{m_q}\left(\frac{1}{2k_1-1}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{1}{2k_q-1}\right)^{n_q}.$$

证 由于 $\det[S(\bar{\Theta}_t)S^{\mathrm{T}}(\bar{\Theta}_t)]$ 是所有 $\beta_i(t)$ 的多元多项式，由文[1]可知 $\det[S(\bar{\Theta}_t)S^{\mathrm{T}}(\bar{\Theta}_t)]$ 可以表示为

$$\det[S(\bar{\Theta}_t)S^{\mathrm{T}}(\bar{\Theta}_t)]=g_i^{\mathrm{T}}v(\beta_t). \tag{9}$$

其中 $v^{\mathrm{T}}(\beta_t)=e_{n_q}^{\mathrm{T}}=(e_{n_q-1}^{\mathrm{T}},\beta_{n_q}e_{n_q-1}^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_{n_q}^{m_q-1}e_{n_q-1}^{\mathrm{T}})$. 为了考虑由集合 Ω 中所有元素形成的

$\det[S(\bar{\Theta}_t)S^{\mathrm{T}}(\bar{\Theta}_t)]$，定义

$$V(X_t) = e_{n_q}^{\mathrm{T}} = (e_{n_q-1}^{\mathrm{T}}, x_{n_q}e_{n_q-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{n_q}^{m_q-1}e_{n_q-1}^{\mathrm{T}}).$$

再估计由这些元素构成的向量

$$P_t^{\mathrm{T}} = [g_t^{\mathrm{T}}v(X_1(t)), g_t^{\mathrm{T}}v(X_2(t)), \cdots, g_t^{\mathrm{T}}v(X_\infty(t))] = g_t^{\mathrm{T}}N. \tag{10}$$

其中 N 为 $l\times\infty$ 维矩阵.为获取 P_t 范数的一个下界，令

$$\|P_t\|^2 = P_t^{\mathrm{T}}P_t = g_t^{\mathrm{T}}NN^{\mathrm{T}}g_t = \frac{1}{\sigma}g_t^{\mathrm{T}}NN^{\mathrm{T}}\sigma g_t. \tag{11}$$

其中 $\sigma = x_i - x_{i-1}$，由一般积分的定义 $\lim\limits_{\sigma\to 0}\sum\limits_{i=1}^{\infty}f(x_i)\sigma = \int f(x)\mathrm{d}x$ 推广至多元函数的重积分，可得矩阵 $NN^{\mathrm{T}}\sigma$ 取极限后的行列式值

$$\det NN^{\mathrm{T}}\sigma = \prod_{i=1}^{q}|\det a_i|^{n_i m_i^{n_i-1}}\prod_{k=1,k\neq i}^{q}m_k^{n_k}. \tag{12}$$

其中

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i-1} & a_{i-1}/2 & \cdots & a_{i-1}/m_1 \\ a_{i-1}/2 & a_{i-1}/3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1}/m_1 & \cdots & \cdots & a_{i-1}/(2m_1-1) \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/m_1 \\ 1/2 & 1/3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/m_1 & \cdots & \cdots & 1/(2m_1-1) \end{bmatrix}.$$

利用标准矩阵行列式的性质[5]，可以得到

$$\det NN^{\mathrm{T}}\sigma = \lambda_{\min}NN^{\mathrm{T}}\sigma\,\mathrm{tr}(NN^{\mathrm{T}}\sigma)^{l-1}. \tag{13}$$

由(11)式可知

$$\|P_t\|^2 \geqslant \frac{1}{\sigma}\|g_t\|^2\lambda_{\min}NN^{\mathrm{T}}\sigma. \tag{14}$$

综合(13)式和(14)式可得

$$\|P_t\| \geqslant \sqrt{\frac{1}{\sigma}}\|g_t\|\frac{\sqrt{\det NN^{\mathrm{T}}\sigma}}{\mathrm{tr}(NN^{\mathrm{T}}\sigma)^{l-1}}. \tag{15}$$

由矩阵(12)式可知

$$\mathrm{tr}(NN^{\mathrm{T}}\sigma) = \sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_q=1}^{m_q}\left(\frac{1}{2k_1-1}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{1}{2k_q-1}\right)^{n_q}. \tag{16}$$

由于原始系统(1)式可控，用 ε_0 表示能控性的一个测度，则由下式可求出向量 g_t 的一个下界

$$0<\varepsilon_0\leqslant|\det S(\theta^*)S^{\mathrm{T}}(\theta^*)| = |g_t^{\mathrm{T}}v(X_t^*)|\leqslant\|g_t\|\,\|v(X_t^*)\|. \tag{17}$$

由文[3]定理1的证明可知 $\|X_t^*(t)\|\leqslant V_0 = h_{i0}$，取 $h_i = \max(1, h_{i0})$，由 $V(X_t)$ 的定义，可以得出

$$|V(X_t^*)|\leqslant l^{1/2}\prod_{i=1}^{q}h_i^{(m_i-1)(n+pv_i)}. \tag{18}$$

综合(17)式和(18)式可得

$$\|g_t\| \geqslant \varepsilon_0/l^{1/2}\prod_{i=1}^{q}h_i^{(m_i-1)(n+pv_i)}. \tag{19}$$

将(19)式代入(15)式可得

$$\|P_t\| \geqslant \sqrt{\frac{1}{\sigma}}\frac{\varepsilon_0\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{q}|\det a_i|^{n_i m_i^{n_i-1}}\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{q}m_k^{n_k}}}{l^{1/2}\prod\limits_{i=1}^{q}h_i^{(m_i-1)(n+pv_i)}\sum\limits_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum\limits_{k_q=1}^{m_q}\left(\frac{1}{2k_1-1}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{1}{2k_q-1}\right)^{n_q}}. \tag{20}$$

定义 $Z_{\max}(t) = \max\limits_{X\in D}Z_i(X)$，于是由(9)式和(10)式可知

$$\|P_t\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(Z_{\max}^i(t))^2} = \sqrt{\int_{X\in D}(Z_{\max}^i(t))^2\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1}{\sigma}}Z_{\max}(t). \tag{21}$$

综合(20)式和(21)式可以得到如下结果

$$Z_{\max} \geqslant \frac{\varepsilon_0\sqrt{Q}}{l^{1/2}\prod\limits_{i=1}^{q}h_i^{(m_i-1)(n+pv_i)}M}. \tag{22}$$

其中

$$Q = \prod_{i=1}^{q}|\det a_i|^{\Delta i},\ \Delta_i = n_i m_i^{n_i-1}\prod_{k=1,k\neq i}^{q}m_k^{n_k},$$

$$M = \sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_q=1}^{m_q}\left(\frac{1}{2K_1-1}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{1}{2K_1-1}\right)^{n_q}.$$

引入滞环常数 λ 以确保 $\{X_t\}$ 收敛，由于在切换函数(8)式中引入滞环常数，X_t 未必使得 $Z_i(X_t) = Z_{\max}(t)$，所以有

$$Z_i(X_t) > \frac{Z_{\max}(t)}{1+\gamma}. \tag{23}$$

结合(22)式和(23)式即可完成证明.

4 稳定性分析(Stability analysis)

参数修正后的估计模型

$$\bar{A}(t,D)y(t) = \bar{B}(t,D)u(t) + e_n(t). \tag{24}$$

其中

$$e_a(t) = [e_{n1}(t), e_{n2}(t), \cdots, e_{aq}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$e_{ai}(t) = y_i(t) - \bar{\theta}_i(t)\varphi_i(t)$$

是第 i 个修正参数估计分量的后验辨识误差.设计控制器

$$\begin{cases} y(t) = (Q^*(D) - K(t,D))\xi(t), \\ u(t) = H(t,D)\xi(t) + Ey^*(t). \end{cases} \tag{25}$$

其中 $\xi(t)$ 是分状态，$Q^*(D)$ 是任意稳定多项式矩阵，其对角元素为首一 $\mu-1$ 次算子 D 的多项式，$y^*(t)$ 是参考的输入向量，$K(t,D)$，$H(t,D)$ 满足下面极点配置方程：

$$\bar{A}(t,D)K(t,D) + \bar{B}(t,D)H(t,D) = [\bar{A}(t,D) - A^*(t,D)]Q^*(D). \tag{26}$$

其中 $A^*(D)$ 是任意稳定多项式矩阵，$\Gamma_r(A^*(D)) = \Gamma_r(A(D))$，由(24)～(26)式可得到下面闭环方程：

$$\begin{cases} (A^*(D)Q^*(D) + \Delta)\xi(t) = \bar{B}(t,D)y^*(t) + e_a(t), \\ y(t) = (Q^*(D) - K(t,D))[A^*(D)Q^*(D) + \Delta]^{-1} \cdot \\ \qquad (\bar{B}(t,D)y^*(t) + e_a(t))], \\ u(t) = H(t,D)[(A)(D)Q^*(D) + \Delta)^{-1}(\bar{B}(t,D) \cdot \\ \qquad y^*(t) + e_a(t))] + E^*(t). \end{cases}$$

定理 2 系统(1)式的未知参数由(4)～(10)式进行估计，用定理 1 所构造的参数估计修正策略来修正估计值，则自适应极点配置控制算法保证闭环系统稳定，即存在一组 μ_i 的足够小但非零上界 $\bar{\mu}_i$，使得具有任意满足(2)式且 $\bar{\mu}_i \geqslant \mu_i = 1,2,\cdots,q$ 的系统，其输入输出均有界.

证 详见文[1].

5 结论(Conclusion)

本文研究了带有有界扰动和未建模动态误差的确定性线性时不变多变量离散系统的非奇异间接自适应控制问题.这一问题是影响自适应控制系统稳定性的关键问题，所以解决此问题具有重大的理论意义和实际价值.本文构造了一种新多变量参数估计修正策略，它确保了估计模型的一致能控性，并改进了文[1]算法复杂、计算量大、实时性不强的缺陷.

参考文献(References)

[1] Li J M, Xing K Y and Gao S P. Robust multivariable adaptive pole placement algorithm [J]. Acta Automatica Sinica, 1997, 23(5): 598 - 604(in Chinese)

[2] Lozano R and Zhao X H. Adaptive pole placement without excitation probing signals [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994, 39(1): 47 - 58

[3] Zhao X H and Feng C B. A robust model feference adaptive control [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(6): 865 - 871(in Chinese)

[4] Guo L. Self-convergence of weighted least squares with applications to stochastic adaptive control [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1996, 41(1): 79 - 89

[5] Lancaster P and Tismenetsky M. The Theory of Matrices, Second Edition [M]. New York: Academic Press, Inc., 1985

[6] Goodwin G C, Ramadge P J and Caines PE Discrete-time multivariable adaptive control [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1980, 25(6): 449 - 456

[7] Ossman K A and Kamen E D. Adaptive regulation of MIMO linear discrete-time systems without requiring a persistent excitation [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1987, 32(5): 397 - 40

[8] Goodwin G C and Sin K S. Adaptive Filtering, Prediction and Control [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984

本文作者简介

赵晓晖 1957年生，长春邮电学院信息科学研究中心教授.1993年在法国贡比涅科技大学计算机与控制系获博士学位.1996年结束在东南大学的博士后研究工作.主要研究方向为自适应控制理论，信号处理理论和移动通信理论及应用等.

王书强 1974年生.工程师.1999年在吉林工业大学信息科学与工程学院获硕士学位.现在深圳华为公司工作.主要研究方向为自适应控制理论和移动通信理论及应用等.

张广成 1938年生.1963毕业于吉林工业大学电子工程系.吉林工业大学信息科学与工程学院教授.主要研究方向为自适应控制理论和计算机控制系统等.