第 18 卷第 2 期
2001 年 4 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.18, No.2
Apr., 2001

文章编号：1000-8152(2001)02-0181-04

离散变结构输出反馈控制 *

王 江 乔 宇 王先来
（天津大学电力自动化与能源工程学院·天津，300072）

摘要：讨论了离散系统的变结构输出反馈控制，采用输出反馈控制不需状态完全可测；本文给出了输出反馈变结构控制系统的滑模平面设计方法；利用趋近律的思想设计控制律，证明了系统的准滑模稳定性.

关键词：输出反馈；变结构；稳定性
文献标识码：A

Variable Structure Output Feedback Control of Discrete Systems

WANG Jiang, QIAO Yu and WANG Xianlai
(College of Electrical Automation and Energy Engineering, Tianjin University·Tianjin, 300072, P. R. China)

Abstract: This paper discusses variable structure output-feedback control of discrete systems. The output feedback control doesn't need full observability. The paper presents a design method of discrete sliding surface, proves the stability of sliding mode for systems.

Key words: output feedback; variable structure; stability

1 引言(Introduction)

滑模变结构控制被广泛研究[1~4]，变结构控制的实现大多采用计算机来完成[5]. 在实际系统实现控制时，遇到两个问题：一是状态观测问题，另一个是离散化问题. 当状态不可测时，可以采用输出反馈和状态观测器来解决；离散变结构控制的研究已经有若干研究成果[6~9]，而采用输出反馈的离散变结构控制研究结果很少. 本文研究了采用输出反馈方法实现离散变结构控制，得出了有益的结论. 本文第二节给出一些离散滑模定义，第三节给出开关平面的设计方法，第四、五节给出控制器的设计和系统稳定性证明.

2 离散变结构控制(Variable structure control of discrete system)

2.1 准滑模 QSM 的定义(Definition of QSM: quasi-sliding mode)

我们研究如下线性系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \tag{1}$$

式中 k 是离散时间 $k = 0,1,2,\cdots,\infty$. $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, A, B, C 有相应维数矩阵. 对于上述系统建立变结构控制(variable structure control, VSC)，它需要完成与连续系统的同样设计.

离散 VSC 有两种滑模轨迹，一是理想滑模，另一是实际滑模. 离散滑模轨迹分三部分：到达滑模、准滑动模式和稳态模式，对离散滑模有如下定义：

定义 1 离散 VSC 的吱咯-吱嘎(Zig-Zag)[3]类型运动，每一步都穿越滑模平面. 这时，系统到达的不是滑模平面而是滑模区域：

$$s_\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\Delta < s(x) < \Delta\}. \tag{2}$$

这种滑模叫做实际准滑模(real quasi-sliding mode, RQSM)，s_Δ 称为滑模带.

定义 2 准滑模(QSM)有两种运动形式，一是设计滑模，这种滑模能准确到达开关平面 $s(x(k)) = 0$；另一种称为实际滑模，如定义 1.

2.2 准实际滑动模态(Quasi-sliding mode)

1) 实际滑动模态.

对于系统(1)，状态从任意时刻出发运动，可能于某时刻($k > N$, N 为某采样时刻)到达切换面：

$$s(k) = Sx(k) = 0,\ S \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{3}$$

在等效控制下，运动将在滑动平面上

$$Sx(k+1) = 0,\ k = 1,2,\cdots. \tag{4}$$

根据 $s(k+1) = Sx(k+1) = Sx(k)$ 求出等效控制 $u_{eq}(k)$：

* 基金项目：国家自然科学基金(59675014)资助项目.
收稿日期：1997-07-16；收修改稿日期：2000-05-15.

$$u_{eq}(k) = -[B(SB)^{-1}SA]x(k). \tag{5}$$

这时系统运动方程为:

$$x(k+1) = [A - B(SB)^{-1}SA]x(k). \tag{6}$$

设

$$A_{eq} = [A - B(SB)^{-1}SA], \tag{7}$$

式(6)变为

$$x(k+1) = A_{eq}x(k). \tag{8}$$

由于等效控制存在，$x(k+1)$，$x(k)$ 均在停留切换面上.

从任意初始状态出发的系统运动，由于不理想因素的存在，一般不会恰好落在切换面上，而是在切换面两侧不断穿行，形成抖振[6].

在滑模平面上的运动称为理想滑模运动，它的研究与非理想准滑模完全不同.

取如下变结构控制:

$$u_1 = \begin{cases} u_i^+(x(k)), & s_i(x(k)) > 0, \\ u_i^-(x(k)), & s_i(x(k)) < 0. \end{cases} \tag{9}$$

在变结构控制作用下，系统运动方程为:

$$x(k+1) = \begin{cases} Ax(k) + Bu^+(k), & s(x(k)) > 0, \\ Ax(k) + Bu^-(k), & s(x(k)) < 0, \end{cases} \tag{10}$$

式中 $u^{\pm}(k) = [u_1^{\pm}(k), \cdots, u_m^{\pm}(k)]^{\mathrm{T}}$.

与连续系统相同，它的切换是在一个带内，带宽用 2Δ 表示，即

$$s_{\Delta} = \{s(k) \mid \|s\| = \|Sx(k)\| \leqslant 2\Delta\}. \tag{11}$$

2) 到达条件.

对于到达条件的要求就是系统状态在有限时间趋近切换平面. 采用文[8,10]的到达条件都不充分，因为它们不能在有限时间到达滑模平面.

文[6]提出一种趋近律形式的到达条件，这些条件可以推广到离散情况，那么我们可以对离散系统(1)采用指数趋近律:

$$s(k+1) - s(k) = -T\varepsilon\,\mathrm{sgn}(s(k)) - T\delta s(k), \tag{12}$$

式中，$\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$，$\delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_m)$. 其中 $\varepsilon_i > 0$，$\delta_i > 0$. 整理式(12)可得

$$s(k+1) = -(T\delta - I)s(k) - \varepsilon T\,\mathrm{sgn}(s(k)). \tag{13}$$

根据式(13)可以求出控制律，并且所得控制律简单唯一.

3 开关平面的设计(Design of switching surface)

采用输出反馈变结构控制，取切换面 $s(k)$ 为:

$$s(k) = Fy(k) = FCx(k). \tag{14}$$

假设 1 (A, B) 是可控的；(A, C) 是可观的，并且 B，C 有全秩；

假设 2 $p \geqslant m$，并且 $\mathrm{rank}(CB) = m$.

3.1 状态反馈开关平面设计(Design of state feedback switching surface)

我们讨论输出反馈开关平面的设计之前，先讨论状态反馈开关平面的设计. 下面的设计与文[11]类似，文[11]讨论连续系统的输出反馈变结构控制.

定理 1 当系统(1)满足假设 1,2 时，存在一个矩阵 S，使得:

1) 系统 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ 在滑模平面 $Sx(k) = 0$ 上运动时，有 $n - m$ 不同实根在单位圆内.

2) SB 非奇异. 当且仅当存在一个全秩矩阵

$$W \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)},\quad W^g \in \mathbb{R}^{(n-m)\times n},$$

使得:

3) $$W^gW = I_{n-m},\quad W^gB = 0,$$
$$W^gAW = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-m}).$$

证 必要性. 根据假设 1,2，系统在 $s(x(k)) = 0$ 上运动时，系统方程变为:

$$x(k+1) = [I - B(SB)^{-1}S]Ax(k). \tag{15}$$

设 $J = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-m}\}$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-m}$ 是当系统在滑模平面 $Sx(k) = 0$ 上运动时不同特征根，那么存在全秩矩阵 W 使得:

$$[I - B(SB)^{-1}S]AW = 0. \tag{16}$$

那么

$$SWJ = S[I_n - B(SB)^{-1}S]AW = 0. \tag{17}$$

因为，$\lambda_i \neq 0$，J 非奇异，所以

$$SW = 0. \tag{18}$$

由上可知，W 是 S 的右消去矩阵，根据 SB 非奇异，有:

$$\mathrm{range}B \cap \mathrm{range}W = \{0\}. \tag{19}$$

又因为根据 B，W 有全秩和式(19)，那么 $[B \mid W]$ 可逆，并且逆阵为:

$$\begin{bmatrix} B^g \\ W^g \end{bmatrix}. \tag{20}$$

这里，$B^gB = I_m$，$B^gW = 0$，$W^gB = 0$，$W^gW = I_{n-m}$. 明显 $W^gAW = J$.

充分性. 假设3) 成立，设 $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是 W 的全秩左消去阵，当且仅当 $z \in \mathrm{range}W$，有 $Sz = 0$. 我们首先证明 SB 是非奇异.

假设 $x_2 \in \mathbb{R}^m$，$SBx_2 = 0$，那么根据 S 的定义，那么存在 $y \in \mathbb{R}^{n-m}$，使得 $Bx_2 = Wx_1$，所以

$x_1 = W^gWx_1 = W^gBx = 0$,于是 $Bx_2 = 0$.

根据假设 $\mathrm{rank}(B) = m$, $x_2 = 0$,所以 SB 非奇异.

在开关平面 $S(x(k)) = 0$ 上系统矩阵是 $[I - B(SB)^{-1}S]A$,根据条件3及 $SW = 0$, 有

$$\mathrm{range}\{[I - B(SB)^{-1}S]AW - WJ\} \subset \ker S \cap \ker W^g. \tag{21}$$

由前所述, $x_2 \in \ker S$ 意味着 $x_2 = Wx_1$. 那么,如果 $x_2 \in \ker S = \ker W^g$,则有: $W^gx_2 = W^gWx_1 = x_1 = 0$. 由 $x_2 = 0$, 有

$$\begin{cases}\ker S \cap \ker W^g = \{0\},\\ [I - B(SB)^{-1}S]AW = WJ.\end{cases} \tag{22}$$

式(22)等效于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-m}$ 是系统在 $Sx(k) = 0$ 上的根,也就是 $[I - B(SB)^{-1}S]A$ 的特征根.

定理2 设 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times(m-n)}$ 有如下条件等效:

1) $\mathrm{range}B \cap \mathrm{range}W = \{0\}$,
$\mathrm{range}(AW - WJ) \subset \mathrm{range}B$.

2) 存在一个全秩矩阵 W^g 使得 $W^gW = I_{n-m}$, $W^gB = 0$, $W^gAW = J$.

证 与文[11]类似.

3.2 输出反馈开关平面设计(Design of output feedback switching surface)

由上可知,根据上述条件我们可以设计离散系统的开关平面 $Sx(k) = 0$. 很清楚,如果 $Sx(k) = 0$ 和 $FC = S$,那么 $Fy = FCx = Sx = 0$,根据输出变量 y 定义滑模平面 $Fy(k) = 0$,要使输出反馈存在,必使 $FC = S$ 有解.

定理3 设 $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$ 是全秩矩阵, $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是 W 的左消去矩阵,那么存在 $F \in \mathbb{R}^{m\times p}$ 使 $S = FC$,当且仅当 $\mathrm{rank}(W) = p - m$.

证 根据 $n \geqslant p \geqslant m$,假设 S 有全秩, $S = FC$,那么 F 必有全秩,由于 $F(CW) = SW = 0$,那么 $\mathrm{rank}(CW) \leqslant \dim(\ker F) = p - m$. 另一方面

$$\mathrm{rank}(CW) \geqslant \mathrm{rank}C + \mathrm{rank}W - n = p + n - m - n = p - m.$$

所以 $\mathrm{rank}(CW) = p - m$.

相反, $\mathrm{rank}(CW) = p - m$,设 $\bar{F} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ 是 CW 的全秩左消去矩阵,那么 $\mathrm{rank}(\bar{F}C) \leqslant m$,因为 $\bar{F}C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是 CW 的左全秩消去矩阵和 $\mathrm{rank}(CW) = p - m$,我们有 $\mathrm{rank}(\bar{F}) = m$,根据假设 $\mathrm{rank}C = p$ 有:

$$\mathrm{rank}(\bar{F}C) \geqslant \mathrm{rank}\bar{F} + \mathrm{rank}C - p = m + p - p = m.$$

由于 S 也是 W 的全秩左消去矩阵,所以 $\mathrm{rank}(\bar{F}C) = m$ 和 $\bar{F}C$ 是 W 的全秩左消去矩阵. 证毕.

4 控制器设计(Design of the controller)

由于采用趋近律的到达条件,使变结构控制律变得简单,采用输出反馈变结构方法,根据滑动平面式(14)则有:

$$\begin{cases} s(k+1) = Fy(k+1) = FCx(k+1),\\ \Delta s(k+1) = s(k+1) - s(k) = -T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k) - T\delta s(k).\end{cases} \tag{23}$$

所以

$$s(k+1) = -T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k) - (T\delta - I)s(k). \tag{24}$$

式中 $\varepsilon = \mathrm{diag}[\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n]$, $\delta = \mathrm{diag}[\delta_1, \cdots, \delta_m]$.

根据上式即可求出控制 $u(k)$

$$FC[Ax(k) + Bu(k)] = -T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k) - (T\delta - I)s(k),$$

$$u(k) = -(FCB)^{-1}[FCAx(k) - T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k) - (T\delta - I)s(k)]. \tag{25}$$

5 准滑模稳定性分析(Stability analysis of quasi-sliding mode)

与连续系统一样,离散滑模变结构控制的目的是保证系统的稳定性. 滑模运动有两种稳定性,即 1) 状态在滑模平面上则保持; 2) 在状态空间的任意位置的状态朝向滑模平面.

在第3部分中所讨论的开关平面设计中,当满足 $s(k) = 0$ 时,已知系统稳定,即等效控制系统的特征根都在单位圆内.

由于采用趋近律控制方法,需要证明利用此方法控制的准滑模是渐近稳定的.

根据定理3对系统进行变换,则 $s(k) = Fy(k) = FCx(k)$ 变为

$$s(k) = FC[x_1(k)x_2(k)] = [FC_1]x_1(k) + [FC_2]x_2(k).$$

设 $\mathrm{rank}[FC_2] = m$, $x_2(k) \in \mathbb{R}^m$, 则在滑模平面上有

$$x_2(k) = [FC_2]^{-1}(FC_1)x_1(k). \tag{26}$$

对于系统(1)进行如下变换:

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix},\ TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

式中 $\mathrm{rank}B_2 = m$, 则系统(1)变为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}u(k). \tag{27}$$

$$\begin{aligned} s(k+1) &= FC_1x_1(k+1) + FC_2x_2(k+1) = \\ &FC_1[A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k)] + \\ &FC_2[A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u(k)]. \end{aligned}$$

从上式求 u,则 $u(k)$ 变为:

$$u(k) = -(FC_2B_2)^{-1}[FC_1(A_{11}x_1(k) +$$

$$A_{12}x_2(k)) + FC_2(A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k)) + (T\delta - I)s(k) + T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k)]. \tag{28}$$

对式(28)进行如下变换:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ s(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ FC_1 & FC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}.$$

则式(27)变为:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = [A_{11} - A_{12}(FC_2)^{-1}(FC_1)]x_1(k) + (FC_2)^{-1}A_{12}s(k), \\ s(k+1) = -(T\delta - I)s(k) - T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k). \end{cases} \tag{29}$$

为了方便,设 $FC_2 = I$, 则式(29)变为:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = [A_{11} - A_{12}(FC_1)]x_1(k) + A_{12}s(k), \\ s(k+1) = -(T\delta - I)s(k) - T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k). \end{cases} \tag{30}$$

定理 4　对所研究系统采用式(28)所示控制时,当满足 $\|T\delta\| < 1$ 条件,系统是渐近稳定到 s_Δ,并且 $s_\Delta \leqslant \dfrac{\|T\varepsilon\|}{2\|I - T\delta\|}$.

证　取如下李氏函数

$$V(k) = s^{\mathrm{T}}(k)s(k). \tag{31}$$

则

$$\begin{aligned} &\Delta V(k+1) = \\ &V(k+1) - V(k) = \\ &s^{\mathrm{T}}(k+1)s(k+1) - s^{\mathrm{T}}(k)s(k) = \\ &[(I - T\delta)s(k) - T\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,s(k))]^{\mathrm{T}} \cdot \\ &[(I - T\delta)s(k) - T\varepsilon\,\mathrm{sgn}(s(k))] - s^{\mathrm{T}}(k)s(k) = \\ &s^{\mathrm{T}}(k)[(I - T\delta)^2 - I]s(k) - \\ &s^{\mathrm{T}}(k)(I - T\delta)T\varepsilon\,\mathrm{sgn}(s(k)) - \\ &\mathrm{sgn}^{\mathrm{T}}(s(k))T\varepsilon(I - T\delta)s(k) + \\ &\mathrm{sgn}^{\mathrm{T}}(s(k))T^2\varepsilon^2\mathrm{sgn}(s(k)) = \\ &s^{\mathrm{T}}(k)[(I - T\delta)^2 - I]s(k) - \\ &2s^{\mathrm{T}}(k)(I - T\delta)T\varepsilon\,\mathrm{sgn}(s(k) + \\ &\mathrm{sgn}^{\mathrm{T}}(s(k))T^2\varepsilon^2\mathrm{sgn}(s(k)), \end{aligned}$$

上式中, $(I - T\delta)^2 - I$ 是负矩阵,所以

$$\Delta V(k+1) \leqslant -2\mathrm{sgn}^{\mathrm{T}}s((k))(I - T\delta)T\varepsilon s(k) + T^2\varepsilon^2.$$

上式取范数有

$$\Delta V(k+1) \leqslant -2\|I - T\delta\|\,\|T\varepsilon\|\,\|s(k)\| + \|T^2\varepsilon^2\|.$$

当 T 很小时,所以只要 $2\|I - T\delta\|\,\|T\varepsilon\|\,\|s(k)\| > \|T^2\varepsilon^2\|$ 时, $\Delta V(k+1) < 0$. 即当 $\|s(k)\| > \dfrac{\|T\varepsilon\|}{2\|I - T\delta\|}$ 时, $\Delta V(k+1) > 0$.　　证毕.

从定理4可以看出,对于离散系统,滑模的稳定性与采样周期有密切关系.由于采样周期存在,滑模达到的不是 $s(k) = 0$,而是 s_Δ.

6 结论(Conclusion)

采用输出反馈同样可以达到滑模状态,但需要满足文中所给的条件.离散变结构的滑模存在条件与连续情况不同,采用趋近率的滑模到达条件可适合多变量系统.对于离散系统,滑模的稳定性与采样周期有密切关系.由于采样周期存在,滑模到达的不是 $s(k) = 0$,而是 s_Δ.本文给出了输出反馈变结构控制的开关平面的设计方法,证明了系统稳定性.本文的结论将用于电力电子变换器的控制.

参考文献(References)

[1] Utkin V I. Sliding Mode in Optimization and Control [M]. New York: Springer-Verlag, 1992

[2] Gao W B. Theory and Design Method of Variable Structure Control [M]. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese)

[3] Feng C B. Analysis and Design of Nonlinear Systems [M]. Nanjing: Southeast University Press, 1990 (in Chinese)

[4] De Carlo R A, Zak S H and Mathews G P. Variable structure control of nonlinear-multivariable systems: a tutorial [J]. Proc. IEEE, 1988, 76(3): 212 - 232

[5] Utkin V I and Drakunov S V. On discrete-time sliding modes [A]. Proc. of IFAC Workshop on Nonlinear Control [C], Capri, Italy, 1989, 930 - 932

[6] Gao W B and Homaifa A. Discrete time variable structure control systems [J]. IEEE Trans. Indus. Elec., 1995, 42(2): 117 - 127

[7] Yu X H. Discrete variable structure control systems [J]. Int. J. Systems Science, 1993, 24(2): 373 - 386

[8] Sarptuk S Z, Istefanopulos Y and kaynak O. On the stability of discrete time sliding mode control systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1987, 32(10): 930 - 932

[9] Furtua K. Sliding mode control of the discrete system [J]. Systems and Control Letters, 1990, 14(2): 145 - 152

[10] Milosavijevic D. General conditions for the existance of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems [J]. Automatic Remote Control, 1985, 46(3): 307 - 314

[11] Zak S H and Hui S. On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamic systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1993, 38(10): 1509 - 1512

本文作者简介

王　江　1964年生.1996年毕业于天津大学管理学院获博士学位.现为天津大学电气自动化与能源工程学院自动化系副教授.研究方向为非线性控制,电力电子变换器控制.目前发表论文数篇.

乔　宇　1975年生.现为天津大学机械工程学院博士研究生.研究方向为机械系统的振动和非线性控制.

王先来　1946年生.现为天津大学电气自动化与能源工程学院自动化系教授.研究方向为系统辨识,自适应控制及智能控制.在国内外发表论文数十篇.