

文章编号: 1000-8152(2001)02-0217-07

## 鲁棒变结构模型参考自适应控制器的分析与设计(II)\*

林 岩 毛剑琴

(北京航空航天大学第七研究室·北京, 100083)

**摘要:** 对含未建模动态且建模部分相对阶大于 1 ( $n^* > 1$ ) 的 SISO 定常线性系统提出了一种控制增益可切换的变结构模型参考自适应控制方案. 主要结果是: 得到了系统跟踪误差与辅助误差间关系的明确表达式, 进而证明, 对各辅助子系统(均为相对阶为 1 的子系统), 只要按相对阶为 1 时所提出的变结构律进行设计, 使它们满足预先给定的性能指标, 就可保证系统跟踪误差在预先给定的过渡过程时间内收敛到一个残集内; 研究结果还表明, 当  $n^* > 1$  时, 平均值滤波器对系统的影响相当于一个未建模动态对系统的影响.

**关键词:** 自适应控制; 变结构控制; 鲁棒控制

**文献标识码:** A

## Analysis and Design of a Robust VS-MRAC: Part II

LIN Yan and MAO Jianqin

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics·Beijing, 100083, P. R. China)

**Abstract:** This paper considers the variable structure model reference adaptive control (VS-MRAC) for a class of plants with modeled part being relative degree greater than one. By establishment the relationship between the tracking error and those auxiliary errors, it is shown that as long as the performance indexes are guaranteed for the auxiliary errors, each of which is in dynamics a sub-system with relative degree one, the tracking error will converge to a small residual set in a pre-specified transient time. Furthermore, the influence of the averaging filters on the system is analyzed and shows that it can be considered as, in a sense, an unmodeled dynamics.

**Key words:** adaptive control; variable structure control; robust control

### 1 引言(Introduction)

在文[1]中, 我们已讨论了对对象建模部分相对阶  $n^* = 1$  时的变结构模型参考自适应控制(VS-MRAC)问题. 本文将进一步讨论  $n^* > 1$  时的变结构模型参考自适应控制律设计. 在此, 仍采用文[2]在 Monopoli 增广误差<sup>[3]</sup>基础上提出的控制结构来处理  $n^* > 1$  时的问题. 以此为基础, 本文的工作是: 首先得到了系统跟踪误差与辅助误差间关系的明确表达式, 进而证明, 存在一个  $\mu^* > 0$ , 使得只要  $\mu \in [0, \mu^*]$ , 则对各辅助子系统(均为相对阶为 1 的子系统), 当按文[4]所提出的变结构律进行设计, 使它们各自满足预先给定的性能指标时, 就可保证系统跟踪误差在预先给定的过渡过程时间  $T$ (当然, 各辅助子系统的过渡时间应选得  $\leq T$ ) 内收敛到一个残差集中; 此外, 分析还进一步揭示出:  $n^* > 1$  时平均值滤波器对系统的影响相当于一个未建模动态对系统的影响, 因此, 其时间常数的大小对系统的稳定性是有影响的.

### 2 问题描述(Problem formulation)

#### 2.1 数学模型与基本假设(System model and basic assumptions)

对象与理想模型.

对象:

$$\begin{aligned} y(t) &= G(s)[u(t) + d(y, t)] = \\ G_p(s)(1 + \mu\Delta G(s))[u(t) + d(y, t)] &= \\ k_p[n_p(s)/d_p(s)](1 + \mu\Delta G(s))[u(t) + d(y, t)]; \end{aligned} \quad (2.1)$$

模型:

$$y_M(t) = M(s)r(t) = k_M[n_M(s)/d_M(s)]r(t), \quad (2.2)$$

其中, 各符号的定义与文[1]相同. 对系统(2.1)及参考模型系统(2.2), 令其满足假设: 1) 仅对象输入信号  $u(t)$  和输出  $y(t)$  是可测量的; 2)  $G_p(s)$  为相对阶  $n^* > 1$  的最小相位系统, 其高频增益  $k_p$  之上界  $k_u$  已知,  $k_p$  的符号已知, 不失一般性, 设  $k_p > 0$ ; 此外,

\* 基金项目: 国家自然科学基金(69874002)资助项目.

收稿日期: 1998-08-14; 收修改稿日期: 2000-09-20.

$n_p(s), d_p(s)$ 之系数未知但恒有  $n_p(s), d_p(s)$  互质;  
 3) 扰动项  $d(y, t)$  未知,但在  $[0, +\infty)$  上分段连续且有界; 4)  $k_M > 0; n_M(s), d_M(s)$  为首一互质 Hurwitz 多项式并与  $G_p(s)$  有相同的阶与相对阶;  $r(t)$  在  $[0, +\infty)$  分段连续且有界; 5)  $\Delta G(s)$  为一稳定的正则传递函数,且已知  $\gamma_0 > 0$ ,使得  $\Delta G(s - \gamma_0)$  仍然是稳定的.

当  $n^* > 1$  时,显然有多项式

$$\alpha(s) = \prod_{i=1}^{n^*-1} \alpha_i(s) = \prod_{i=1}^{n^*-1} (s + p_i), \quad p_i > 0, \quad (2.3)$$

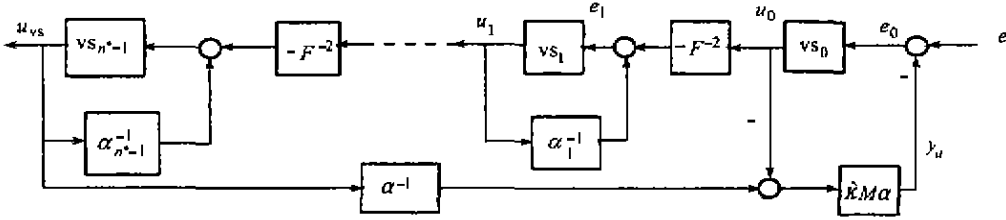


图1 子块“Aux”  
 Fig. 1 Sub-block “Aux”

### 3 主要结果(Main results)

与文[1]相同,  $n^* > 1$  时容易得到系统误差表达式为:

$$e(t) = M(s)\alpha(s)\kappa^* \{ \bar{\theta}^T \omega(t) / \alpha(s) + (1 - d_1(s) / \bar{n}(s)) [d(y, t) + \mu \Delta G(s) d(y, t) + \mu \Delta G(s) (\bar{\theta}^T \omega(t) + u_{vs}(t))] / \alpha(s) + \vartheta(t) + u_{vs}(t) / \alpha(s) \}, \quad (3.1)$$

其中,  $\bar{\theta}, \bar{\theta}, \vartheta, u_{vs}(t), \omega(t)$  以及  $\kappa^*, d_1(s), \bar{n}(s)$  等的定义均与文[1]相同; 选  $\bar{n}(s)$ , 使  $\bar{n}(s - \gamma_0)$  仍为 Hurwitz 多项式. 由图 1 立即可得

增广信号:

$$y_a(t) = M(s)\alpha(s)\hat{\kappa} [u_{vs}(t) / \alpha(s) - u_0(t)]. \quad (3.2)$$

辅助误差信号:

$$e_0(t) = e(t) - y_a(t), \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} e_i(t) = -[u_{i-1}(t)]_{av} + \alpha_i^{-1}(s)u_i(t), \\ [i = 1, 2, \dots, (n^* - 1), u_{n^*-1}(t) := u_{vs}(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

其中,  $\hat{\kappa} := k_u / k_M, k_u$  的定义参见假设 A2),  $\alpha_i^{-1}(s) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$  之定义参见(2.3)式,  $u_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$  是欲设计的变结构律,  $[u_i(t)]_{av} := F^{-2}(s)u_i(t) = [1/(\tau s + 1)^2]u_i(t),$

$F^{-2}(s) = [1/(\tau s + 1)^2]$  即是“平均值”滤波器<sup>[2]</sup>,  $\tau$  是一个较小的正数,其作用将在后面讨论.

使  $M(s)\alpha(s)$  仍为相对阶为 1、稳定的最小相位系统,但本文不要求  $M(s)\alpha(s)$  为 SPR 函数.

### 2.2 系统结构及变结构律设计的目的 (System structure and control objective)

$n^* > 1$  时, VS-MRAC 系统结构图与文[1]之图 1 相同,但在信号  $e(t)$  与  $u_{vs}(t)$  之间增加了一个子块“Aux”<sup>[2]</sup>, 详细结构由图 1 给出,其作用将在后面讨论. 本文的目的是要设计变结构律  $u_{vs}(t)$ , 使系统跟踪误差  $e(t) = y(t) - y_M(t)$  能够在预先给定的时间内收敛到一个残差集中.

我们将首先建立起  $u_{vs}(t)$  和  $u_0(t)$  间的关系以及跟踪误差  $e(t)$  和各辅助误差信号  $e_i(t), u_{vs}(t)$  之间的关系.

引理 3.1 设辅助误差信号  $e_0(t)$  和  $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$  分别由(3.3)和(3.4)定义, 则

$$1) \quad u_{vs}(t) \text{ 和 } u_0(t) \text{ 之间满足如下关系:}$$

$$u_{vs}(t) / \alpha(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} [\Omega_{(i-1)}^{-1}(s) F^{-2(n^*-1-i)}(s) e_i(t)] + F^{-2(n^*-1)}(s) u_0(t); \quad (3.6)$$

2) 跟踪误差  $e(t)$  和各辅助误差信号  $e_i(t), u_0(t)$  之间满足如下关系:

$$e(t) = e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} \hat{\kappa} [M(s)\alpha(s)\Omega_{(i-1)}^{-1}(s) F^{-2(n^*-1-i)}(s) e_i(t)] + \hat{\kappa} M(s)\alpha(s) [(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)u_0(t)]. \quad (3.7)$$

这里,  $\Omega_{(n^*-1)}^{-1}(s) := \prod_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{-1}(s), \Omega_0^{-1}(s) := 1, \alpha_j^{-1}(s)$  的定义参见(2.3)式(证明参见附录).

以引理 3.1 为基础, 可得如下重要结论:

引理 3.2 存在一个  $\mu_1^* > 0$ , 使得对于每一个给定的  $\mu \in [0, \mu_1^*]$ , 辅助误差  $e_0(t)$  可表示为如下“一阶”微分方程的形式:

$$e_0(t) = P_0(e_0, \dots, e_{n^*-1}, \omega_{\Delta e}, d, \mu, \tau, \vartheta)(t) + (k_p - k_u) F^{-2(n^*-1)}(s) u_0(t) + \tau \{ k_p [\mu G(s, \mu) \Delta G(s) (1 -$$

$$d_1(s)/\bar{n}(s) + \bar{G}(s, \mu)]/\alpha(s) | u_0(t) + \mu k_p \Delta G(s) F^{-2(n^*-1)}(s)(1-d_1(s)/\bar{n}(s))u_0(t) + k_u u_0(t). \quad (3.8)$$

其中

$$\begin{aligned} P_0(e_0, \dots, e_{n^*-1}, \omega_{\Delta e}, d, \mu, \tau, \vartheta)(t) &:= \\ &- p e_0(t) + k_p q_{\Delta 1}(\omega_{\Delta e}, d, \mu, \vartheta)/\alpha(s) - \\ &[\rho(s)/(k_p n_M(s)\alpha(s))]e_0(t) + \\ &\{(k_p - k_u) + \mu k_p \Delta G(s)(1 - d_1(s)/\bar{n}(s))\} \cdot \\ &\left\{ \sum_{i=1}^{n^*-1} [\Omega_{i-1}^{-1}(s) F^{-2(n^*-1-i)}(s) e_i(t)] \right\}, \\ q_{\Delta 1}(\omega, d, \mu, \vartheta) &:= \\ &\bar{\theta}^T \omega(t) + (1 - d_1(s)/\bar{n}(s)) [d(y, t) + \\ &\mu \Delta G(s) d(y, t) + \mu \Delta G(s) \bar{\theta}^T \omega(t)] + \vartheta(t), \\ \begin{cases} \omega_{\Delta e}(t) := [r(t), y_e(t), v_{1\Delta e}^T(t), v_{2e}^T(t)]^T, \\ y_e(t) := e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} \{M(s)\alpha(s)\hat{\kappa}[\Omega_{i-1}^{-1}(s) \cdot \\ F^{-2(n^*-1-i)}(s)]e_i(t)\} + \gamma_M(t), \\ v_{1\Delta e}(t) := (Is - \Lambda)^{-1} g [G_p(s)(1 + \\ \mu \Delta G(s))]^{-1} y_e(t) - d(y, t), \\ v_{2e}(t) := (Is - \Lambda)^{-1} g y_e(t), \end{cases} \\ \bar{G}(s, \mu) &:= [\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1^T (Is - \Lambda)^{-1} g [G_p(s)(1 + \\ \mu \Delta G(s))]^{-1} + \bar{\theta}_2^T (Is - \Lambda)^{-1} g] \bar{G}(s), \\ \hat{G}(s, \mu) &:= [\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1^T (Is - \Lambda)^{-1} g [G_p(s)(1 + \\ \mu \Delta G(s))]^{-1} + \hat{\theta}_2^T (Is - \Lambda)^{-1} g] \bar{G}(s), \\ \bar{G}(s) &:= [\hat{\kappa} M(s)\alpha(s)(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)/\tau], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$\rho(s)$  ( $\deg(\rho(s)) < \deg(n_M(s)\alpha(s))$ ): 多项式  $\rho(s)$  之定义参见文[6](证明参见附录).

**注1** 注意到  $(Is - \Lambda)^{-1}g$  的各分量严格正则, 故容易验证  $\bar{G}(s, \mu)/\alpha(s)$ ,  $\hat{G}(s, \mu)/\alpha(s)$  均是严格正则且稳定的.

下面讨论(3.8)、(3.4)中各变结构律  $u_i(t)$  的设计. 由于假设  $n^* > 1$  时对象高频增益符号是已知的, 故我们在此定义控制信号  $u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n^*-1}(t) = u_{n^*}(t)$  分别为

$$\begin{cases} u_0(t) = -[f_0(k_0(t)) + g_0 m(t)] \text{sgn}(e_0(t)), \\ f_0(k_0(t_1)) > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

及

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -f_i(k_i(t)) \text{sgn}(e_i(t)), \\ f(k_i(t_1)) &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中,  $t_1 = 0, g_0 > 0$  是一个常数,  $m(t)$  是由文献[5]定义的正则信号(normalizing signal)

$$\dot{m}(t) = -\lambda_0 m(t) + \lambda_1 [|u_0(t)| + 1] \quad (3.12)$$

产生, 满足如下初始条件:

$$\begin{cases} \lambda_1/\lambda_0 < m(0) \leq \lambda_1[f_0(k_0(t_1)) + 1]/[\lambda_0 - g_0\lambda_1], \\ \lambda_0 - g_0\lambda_1 > 0, \quad t_1 = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

其中

$$\lambda_0 + \lambda_2 < \min\{\gamma_0, 1/\tau\} \quad (3.14)$$

对某个  $\lambda_2 > 0$  成立. 上式中,  $\gamma_0, \tau$  之定义分别参见假设5)、(3.5)、(3.10)、(3.11)式中,  $f_i(k_i(t))$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1$ ) 为在  $[0, +\infty)$  上逐段常值且为单调递增的跳跃函数, 满足

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} f_i(k_i(t)) = +\infty, \quad i = 0, 1, \dots, n^* - 1, \quad (3.15)$$

其中,  $k_i(t)$  的定义与文[1] $k(t)$  的定义相同, 切换时间  $t_{k_{i+1}}$  的定义及切换阶段也与文[1]相同, 即:

**第一阶段** 切换的目的是使系统在  $u_i(t)$  的作用下满足给定的过渡过程性能指标  $X(T_i, \epsilon_i, S(\delta_i))$  (性能指标的定义与文[1]之定义1相同), 并且, 为使在下一阶段能始终保持  $|e_i(t)| < \epsilon_i$ , 还进一步要求在第一阶段结束时, 有  $\bar{t}_j \leq T_i$ , 使  $|e_i(\bar{t}_j)| \leq \epsilon_i/2$ .

切换规律: 文[1](3.12)式.

**第二阶段** 切换的目的是使系统在  $u_i(t)$  的作用下保持  $|e_i(t)| < \epsilon, \forall t \geq T_i$ .

切换规律: 文[1](3.14)式.

以下引理在证明本文主要结论时是有用的:

**引理 3.3** 设  $m(t), f_0(k_0(t))$  分别由(3.12)、(3.10)式定义. 令  $g_0 > 0$ , 使  $\lambda_0 - g_0\lambda_1 > 0$ . 若  $f_0(k_0(t))$  在  $[0, +\infty)$  上仅进行了有限次切换, 那么, 当(3.13)成立时,  $m(t)$  在  $[0, +\infty)$  是单调不减的.

证 对切换次数用归纳法即可证明, 因篇幅所限, 详细证明过程在此略去.

下面介绍本文的主要结论:

**定理 1** 设变结构自适应系统满足假设1) ~ 5) 且  $G_p(s)$  之相对阶  $n^* > 1$ ; 同时, 设  $T > 0$  为预先给出的、跟踪误差  $e(t)$  的过渡过程时间. 那么, 必存在  $\mu^* > 0$  和  $\tau^* > 0$ , 使得对任一给定的  $\mu \in [0, \mu^*)$  和  $\tau \in (0, \tau^*)$ , 当  $e_i(t)$  的性能指标为  $X(T_i, \epsilon_i, S(\delta_i))$  且  $T_i \leq T$  ( $i = 0, 1, \dots, n^* - 1$ ), 而相应的变结构律  $u_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1$ ) 分别由(3.10)、(3.11)式定义,  $f_i(k_i(t))$  依文[1]所述规律切换时, 每个  $f_i(k_i(t))$  经至多有限次切换之后  $e_i(t)$  必满足性能指标  $X(T_i, \epsilon_i, S(\delta_i))$ , 跟踪误差  $e(t)$  将在时间  $T$  内收敛到残差集  $D_\epsilon^1 := \{e: |e(t)| \leq \epsilon_0 +$

$\sum_{i=1}^{n^*-1} \epsilon_i \|G_i(s)\|_1 + \tau |u_0(t)| \|\bar{G}(s)\| + \Psi(t), \forall t \geq T$  之中;特别,若每一个  $e_i(t) (i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1)$  均在有限时间内收敛到零,那么,必存在一个有限的时间  $t_M$ ,使得  $e(t)$  在  $t_M$  内收敛到残差集  $D_2^2 = \{e: |e(t)| \leq \tau |u_0(t)| \|\bar{G}(t)\|_1 + \Psi(t), \forall t \geq t_M\}$  之中.这里  $\Psi(t)$  是一个以指数速度收敛为零的项, $\bar{G}(s)$  由(3.9)式定义, $G_i(s) = \hat{\kappa}M(s)\alpha(s)\Omega_{(i-1)}^{-1}(s)F^{-2(n^*-1-i)}(s), i = 1, 2, \dots, n^* - 1$  (证明参见附录).

4 数值仿真结果(Simulation results)

例 1 设被控对象为:

$$G(s) = G_p(s)(1 + \mu\Delta G(s)) = -[4/(s^2 + 5s - 3)][1 + \mu(s^2 - 2s + 1)/(s + 6)^2], \mu = 0.1. \quad (4.1)$$

对象建模部分的初始条件为  $x(0) = [0.5, 0.5]^T$ , 这里,  $x(t)$  为建模部分的状态变量.本例的目的是设计变结构律  $u_{vs}(t)$ ,使系统跟踪误差  $e(t)$  在  $T = 0.5$  秒内收敛到残集  $D_1^1$  中.因  $G_p(s)$  相对阶  $n^* = 2$ ,故在(2.3)式中取  $\alpha^{-1}(s) = 1/(s + 5)$ .设理想模型为  $M(s) = 1/(s^2 + s + 2)$ .按假设,  $G_p(s)$  的系数除  $k_p$  之上界  $k_u$  (本例取  $k_u = 6$ ) 均是未知的,若取  $G_p(s)$  的名义系统为  $\hat{G}_p(s) = 1/(s^2 - 7)$ ,可得  $\theta^*$  的一个估计值  $\hat{\theta} = [\hat{k}, \hat{\theta}_0, (\hat{\theta}_1)^T, (\hat{\theta}_2)^T]^T = [1, -14, -1, 18]^T$ .因要使系统跟踪误差  $e(t)$  在  $T = 0.5$  秒内收敛到残集  $D_1^1$  中,为此,对辅助子系统(3.8)式,令其性能指标为  $X(T_0, \epsilon_0, S(\delta_0)) = X(0.5, 0.2, S(0.5))$ ,其控制增益函数(参见(3.10)式)定义为

$$f_0(k_0(t)) = \begin{cases} 0.9k(t_1), & t_1 = 0, \\ 0.9k(t_1) + 0.3k(t), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k = 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (4.2)$$

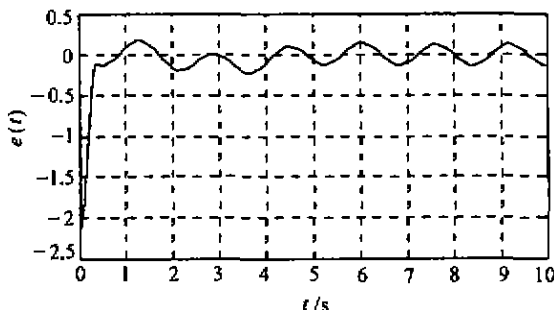


图 2(a) 例1跟踪误差  $e(t)$

Fig. 2(a) The tracking error of example 1

并在其切换律之一(参见文[1]之(3.10)式)中令  $\chi = \beta = 1.2$ ;滤波器(参见(3.5)式)为  $1/(0.05s + 1)^2$ ;而对辅助子系统(3.4)式(取  $i = 1$ ),令其性能指标  $X(T_1, \epsilon_1, S(\delta_1)) = X(0.5, 0.5, S(0.5))$ ,它的控制增益函数(参见(3.15)式)定义为

$$f_1(k_1(t)) = \begin{cases} 2k(t_1), & t_1 = 0, \\ 2k(t_1) + k(t), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k = 2, 3, \dots. \end{cases} \quad (4.3)$$

同样,在其切换律之一(参见文[1]之(3.10)式)中令  $\chi = \beta = 1.2$ .此外,在(3.12)式中取  $\dot{m}(t) = -0.5m(t) + 0.1[|u_0(t)| + 1], m(0) = 0.3$ .可验证,当取  $g_0 = 2$  时,  $m(t)$  满足(3.13)式.在输入信号  $r(t)$  为幅值2、频率4Hz的正弦波,以及干扰  $d(y, t) = \sin(20t)$  时系统跟踪误差  $e(t)$ , 辅助误差信号  $e_0(t), e_1(t)$ , 相应的变结构律  $u_0(t), u_{vs}(t) = u_1(t)$  之增益波形图见图2.由图2可清楚地看出,  $e_0(t), e_1(t)$  在0.5秒左右都已收敛到零(即辅助误差系统  $e_0(t), e_1(t)$  此时已进入滑动模态),因此跟踪误差  $e(t)$  在0.5秒前事实上已收敛到了残集  $D_2^2$  中.

例 2 令  $G(s) = G_p(s)(1 + \mu\Delta G(s)) = -[4/(s^2 + 25s - 13)][1 + \mu(s^2 - 2s + 1)/(s + 6)^2]$ , 并令过渡过程时间为  $T = 1$  秒,相应地,辅助误差  $e_0(t), e_1(t)$  的性能指标分别为  $X(T_0, \epsilon_0, S(\delta_0)) = X(1, 0.2, S(0.5))$  及  $X(T_1, \epsilon_1, S(\delta_1)) = X(1, 0.5, S(0.5))$ ,其余条件与例1完全相同.  $e_0(t), e_1(t), |u_0(t)|, |u_{vs}(t)| = |u_1(t)|$  之增益以及跟踪误差  $e(t)$  的波形图见图3.由图3可以清楚地看出,即使对象参数有相当大的变化时,  $e_0(t), e_1(t)$  在1秒之前都已收敛到零,因此跟踪误差  $e(t)$  在1秒之前事实上已收敛到残集  $D_2^2$  中.

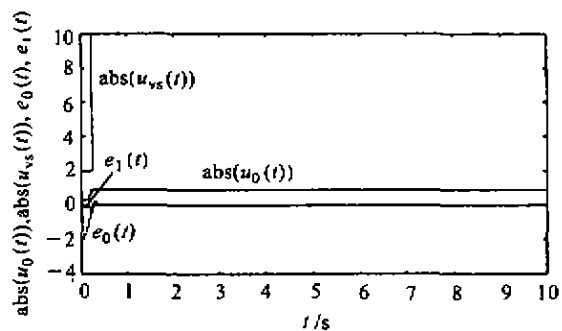


图 2(b) 例 1 误差  $e(t), e_1(t)$  及  $|u_0(t)|, |u_{vs}(t)|$

Fig. 2(b)  $e(t), e_1(t), |u_0(t)|$  and  $|u_{vs}(t)|$  of example 1

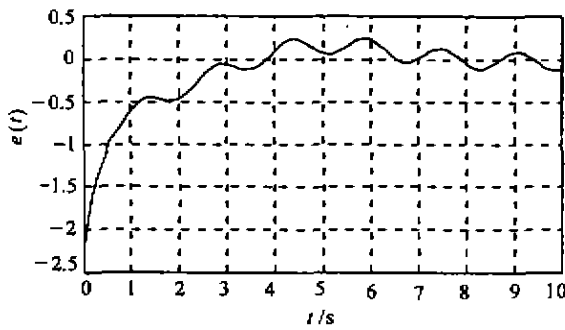


图 3(a) 例2跟踪误差  $e(t)$

Fig. 3(a) The tracking error of example 2

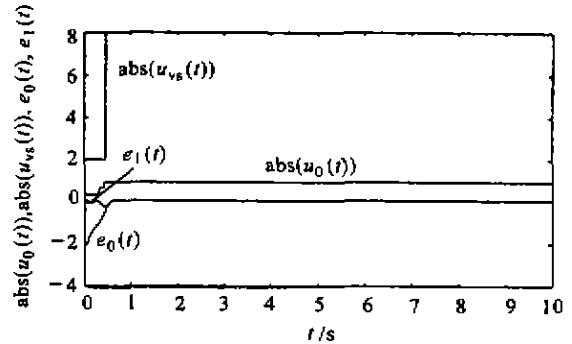


图 3(b) 例 1 误差  $e(t)$ ,  $e_1(t)$  及  $|u_0(t)|$ ,  $|u_{vs}(t)|$

Fig. 3(b)  $e(t)$ ,  $e_1(t)$  and  $|u_0(t)|$ ,  $|u_{vs}(t)|$  of example 2

### 5 结论(Conclusion)

本文证明,当对象建模部分  $n^* > 1$  时,如果对跟踪误差  $e(t)$  预先给定一个过渡过程时间  $T$ ,则只要按照文[1,4]所提出的方法,对每一个辅助误差设计变结构律,使之满足给定的性能指标  $X(T_i, \epsilon_i, S(\delta_i))(T_i \leq T)$ ,就可以保证  $e(t)$  在时间  $T$  内收敛到一个残差集之中. 研究结果还进一步揭示出,平均值滤波器对系统的影响相当于未建模动态对系统的影响. 从工程应用的角度,需要进一步研究的则是  $\mu^*$  和  $\tau^*$  的上界如何确定的问题.

### 参考文献(References)

- [1] Lin Yan and Mao Jianqin. Analysis and design of robust VS-MRAC controller: Part I [J]. Control Theory & Applications, 2000,17(4): 513-518 (in Chinese)
- [2] Hsu L, Araujo A D D and Costo R R. Analysis and design of L/O based variable adaptive control [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994,39(1):4-21
- [3] Monopoli R V. Model reference adaptive control with an augmented error signal [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1974,19(4):474-484
- [4] Lin Yan and Mao Jianqin. A robust variable structure MRAC with expected transient and steady performance [J]. Acta Automatica Sinica, 1999,25(2):191-198 (in Chinese)
- [5] Ioannou P A and Tsakalis K S. A robust direct adaptive controller [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1986,31(11):1003-1043
- [6] Lin Yan, Jie Z and Mao J Q. Variable structure robust adaptive control with unmodelled dynamics [A]. 36th IEEE Conf. Decision & Control [C], San Diego, 1997,3243-3249
- [7] Filippov A F. Differential equations with discontinuous right-hand side [J]. American Mathematical Society Translations, 1964,42(2): 199-231
- [8] Desoer C A and Vidyasagar M. Feedback System: Input-Output Properties [M]. New York: Academic Press, 1975

### 附录(Appendix)

引理 3.1 的证明 1) 在(3.4)式中取  $i = n^* - 1$ , 并将(3.5)式代入,可得

$$\alpha_n^{-1}(s)u_n(t) = e_{n-1}(t) + F^{-2}(s)u_{n-2}(t). \quad (A1)$$

用  $\alpha_n^{-1}(s)$  乘以上式两边并令(3.4)式取  $i = n^* - 2$ , 就有

$$\begin{aligned} \alpha_n^{-1}(s)\alpha_{n-2}^{-1}(s)u_n(t) &= \\ \alpha_{n-2}^{-1}(s)e_{n-1}(t) + F^{-2}(s)\alpha_{n-2}^{-1}(s)u_{n-2}(t) &= \\ \alpha_{n-2}^{-1}(s)e_{n-1}(t) + F^{-2}(s)e_{n-2}(t) + F^{-4}(s)u_{n-3}(t). \end{aligned} \quad (A2)$$

依此类推就可得(3.6)式.

2) 由(3.2)、(3.3)式可得

$$\begin{aligned} e(t) = e_0(t) + \gamma_a(t) = \\ e_0(t) + \hat{M}(s)\alpha(s)[\alpha^{-1}(s)u_n(t) - u_0(t)]. \end{aligned} \quad (A3)$$

将(3.6)式代入上式就得到(3.7)式.

引理 3.2 的证明 由于

$$\begin{aligned} 1 - F^{2(n^*-1)}(s) &= 1 - (\tau s + 1)^{2(n^*-1)} = \\ &= -\tau s [\tau^{2(n^*-3)}s^{2(n^*-3)} + \dots + \tau C_{2(n^*-1)}^2 s^2 + C_{2(n^*-1)}^1] := \\ &= -\tau s \bar{F}(s, \tau), \end{aligned} \quad (A4)$$

因此,若令  $\bar{G}(s)$  如(3.9)式所定义,则根据(3.9)式关于  $\gamma_c(t)$  的定义,有

$$\begin{aligned} \gamma(t) = e(t) + \gamma_M(t) = \\ e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} [M(s)\alpha(s)\hat{\omega}\Omega_{i-1}^{-1}(s)F^{-2(n^*-1-i)}(s)]e_i(t) + \\ \gamma_M(t) + M(s)\alpha(s)\hat{\omega}(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)u_0(t) = \\ \gamma_c(t) + \tau\bar{G}(s)u_0(t). \end{aligned} \quad (A5)$$

另一方面,由于  $G_p(s)$  是最小相位的,且不难看出存在一个  $\mu_1^* > 0$ ,使得对所有  $\mu \in [0, \mu_1^*]$ ,  $[(1 + \mu\Delta G(s))^{-1}]$  仍然是稳定的.因此,从(2.1)式可解出

$$\begin{aligned} u(t) = [G_p(s)(1 + \mu\Delta G(s))^{-1}\gamma(t) - \\ d(\gamma, t), \mu \in [0, \mu_1^*]. \end{aligned} \quad (A6)$$

这样,由文[1]关于  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $\bar{\theta}$  的定义(参见文[1](2.5)、(3.1)式)以及(A6)式可得

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^T v_1(t) &= \bar{\theta}^T (Is - \Delta)^{-1} g u(t) = \\ \bar{\theta}^T (Is - \Delta)^{-1} g \{ [G_p(s)(1 + \mu\Delta G(s))^{-1}\gamma(t) - d(\gamma, t)] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\theta}_1^T (Is - \Delta) g [G_p(s)(1 + \mu \Delta G(s))]^{-1} \gamma_e(t) - d(\gamma, t) + \\ & \bar{\tau} \bar{\theta}_1^T (Is - \Delta) g [G_p(s)(1 + \mu \Delta G(s))]^{-1} \bar{G}(s) u_0(t) = \\ & \bar{\theta}_1^T v_{1\Delta e}(t) + \bar{\tau} \bar{\theta}_1^T (Is - \Delta)^{-1} g [G_p(s)(1 + \mu \Delta G(s))]^{-1} \bar{G}(s) u_0(t), \end{aligned} \quad (A7)$$

这里,  $v_{1\Delta e}(t)$  由(3.9)式定义. 类似地, 我们有

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_2^T v_2(t) &= \bar{\theta}_2^T (Is - \Delta)^{-1} g \gamma_e(t) = \\ \bar{\theta}_2^T (Is - \Delta)^{-1} g [\gamma_e(t) + \tau \bar{G}(s) u_0(t)] &= \\ \bar{\theta}_2^T v_{2e}(t) + \tau \bar{\theta}_2^T (Is - \Delta)^{-1} g \bar{G}(s) u_0(t). \end{aligned} \quad (A8)$$

其中,  $v_{2e}(t)$  之定义参见(3.9)式. 易见, 若令  $\bar{G}(s, \mu)$  如(3.9)式所定义, 从(3.9)式立即可得

$$\bar{\theta}^T \omega(t) = \bar{\theta}^T \omega_{\Delta e}(t) + \tau \bar{G}(s, \mu) u_0(t). \quad (A9)$$

同理, 用证明(A9)式相同的方法并注意到(3.9)式关于  $\hat{G}(s, \mu)$  的定义, 有

$$\hat{\theta}^T \omega(t) = \hat{\theta}^T \omega_{\Delta e}(t) + \tau \hat{G}(s, \mu) u_0(t). \quad (A10)$$

现将(3.1)、(3.2)代入(3.3)式, 则易于得到一个关于  $e_0(t)$  的表达式; 然后, 将引理3.1之(3.6)式代入该表达式, 并利用文[6]的结果, 可得如下“一阶”微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= \\ & - p e_0(t) + k_p q_{\Delta 1}(\omega, d, \mu, \vartheta) / \alpha(s) - \\ & [\rho(s) / (k_p n_M(s) \alpha(s))] e_0(t) + [(k_p - k_v) + \\ & \mu k_p \Delta G(s)(1 - d_1(s)) / \bar{n}(s)] \times \\ & \left[ \sum_{i=1}^{n^* - 1} (\Omega_{\bar{r}_{i-1}}(s) F^{-2(n^* - 1 - i)}(s) e_i(t)) + \right. \\ & \left. F^{-2(n^* - 1)}(s) u_0(t) \right] + k_v g a u_0(t). \end{aligned} \quad (A11)$$

将(A9)、(A10)代入上式之  $q_{\Delta 1}(\omega, d, \mu, \vartheta)(t)$  中就得到(3.8)式.

**定理1的证明** 分以下步骤证明:

1) 根据 Filippov 定理<sup>[7]</sup>, (3.8)、(3.4)所描述的系统  $e_i(t) (i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1)$  均是  $t$  的绝对连续函数.

2) 从(3.4)、(3.8)、(3.10)、(3.11)及切换律(参见文[1])知, 对每一个  $e_i(t)$ , 其连续性使得当  $|e_i(t)| < |e_i(0)| + \delta_i$  及  $|e_i(t)| < \epsilon_i$  时,  $k_i(t)$  只能有有限次的切换. 考虑到(3.8)式  $P_0(e_0, \dots, e_{n^* - 1}, \omega_{\Delta e}, d, \mu, \tau, \vartheta)(t)$  中所有传递函数均严格正则且稳定以及  $\omega_{\Delta e}(t) / \alpha(s)$  为  $e_i(t) (i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1)$  的函数的事实(参见(3.9)式), 可知对  $k_i(t) (i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1)$  的任意有限次切换, 必存在常数  $C > 0$ , 满足

$$|P_0(e_0, \dots, e_{n^* - 1}, \omega_{\Delta e}, d, \mu, \tau, \vartheta)(t)| \leq C. \quad (A12)$$

3) 对辅助误差  $e_i(t), i = 1, 2, \dots, n^* - 1$ , 从(3.4)、(3.5)式知, 若  $u_0(t)$  在  $[0, +\infty)$  上有界, 因每个  $e_i(t)$  均是相对阶为1的子系统, 则利用文[4]定理1,  $u_1(t)$  之增益  $f_1(k_1(t))$  经至多有限次切换后  $e_1(t)$  必满足性能指标  $X(T_1, \epsilon_1, S(\delta_1))$ ; 进而, 由于  $u_1(t)$  的有界性(因  $f_1(k_1(t))$  只经过有限次切换), 从(3.4)式又可推出  $u_2(t)$  之增益经至多有限次切换后  $e_2(t)$  必满足性能指标  $X(T_2, \epsilon_2, S(\delta_2))$ , 依此类推, 可知所有  $u_i(t) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$  之增益  $f_i(k_i(t))$  经至多有限次切换后, 相应的  $e_i(t)$  均将满足性能

指标  $X(T_i, \epsilon_i, S(\delta_i)) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$ . 因此, 我们只要证明存在  $\mu^* > 0, \tau^* > 0$ , 使得对任一给定的  $\mu \in [0, \mu^*], \tau \in (0, \tau^*), u_0(t)$  在  $[0, +\infty)$  上有界且  $e_0(t)$  满足  $X(T_0, \epsilon_0, S(\delta_0))$  就可以了. 为此, 在(3.8)式中注意如下事实:

$$\begin{cases} k_u u_0(t) = (k_v - k_p) u_0(t) + k_p u_0(t), \\ \|F^{-2(n^* - 1)}(s)\|_1 = 1. \end{cases} \quad (A13)$$

根据引理3.3,  $|u_0(t)|$  是单调不减的, 即  $\|u_0(t)\|_\infty = |u_0(t)|$ . 于是存在函数  $\zeta_1(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ , 使得(3.8)式中  $(k_p - k_v) F^{-2(n^* - 1)}(s) u_0(t)$  一项满足

$$\begin{aligned} (k_p - k_v) F^{-2(n^* - 1)}(s) u_0(t) + (k_v - k_p) u_0(t) &= \\ - \zeta_1(t) \operatorname{sgn}(e_0(t)). \end{aligned} \quad (A14)$$

对给定的  $\mu \in [0, \mu_1^*]$  ( $\mu_1^*$  之定义参见引理3.2), 存在一个  $\tau^* > 0$ , 使对每个给定的  $\tau \in (0, \tau^*)$ , 在(3.8)式中有常数  $\pi_1(\tau, \mu)$ , 满足

$$\tau \left\| \frac{\mu \hat{G}(s, \mu) \Delta G(s)(1 - d_1(s)) / \bar{n}(s) + \bar{G}(s, \mu) / \alpha(s)}{\alpha(s)} \right\|_1 = \pi_1(\tau, \mu) < 1. \quad (A15)$$

这里, 用到了注1的结论, (A15)式意味着对给定的  $\mu \in [0, \mu_1^*], \tau \in (0, \tau^*)$ , 存在一个函数  $\zeta_2(t, \tau, \mu) \geq 0, \forall t \geq 0$ , 使得(3.8)式中

$$\begin{aligned} \tau \{ k_p [\mu \hat{G}(s, \mu) \Delta G(s)(1 - d_1(s)) / \bar{n}(s) + \\ \bar{G}(s, \mu) / \alpha(s)] u_0(t) + k_p \pi_1(\tau, \mu) u_0(t) \} &= \\ - \zeta_2(t, \tau, \mu) \operatorname{sgn}(e_0(t)). \end{aligned} \quad (A16)$$

若  $m(t)$  满足(3.12) - (3.14)式, 那么, 根据文[5]引理3.1知, 存在一个  $\mu^* > 0$  且  $\mu^* \leq \mu_1^*$ , 使对每个给定的  $\mu \in [0, \mu_1^*]$ , 在(3.8)式中有

$$\begin{aligned} | \mu k_p \Delta G(s) F^{-2(n^* - 1)}(s)(1 - d_1(s)) / \bar{n}(s) u_0(t) | &\leq \\ k_p [1 - \pi_1(\tau, \mu)] g_0 m(t), \end{aligned} \quad (A17)$$

即对给定的  $\mu \in [0, \mu_1^*], \tau \in (0, \tau^*)$ , 有函数  $\zeta_3(t, \tau, \mu) \geq 0$ , 使

$$\begin{aligned} \mu k_p \Delta G(s) F^{-2(n^* - 1)}(s)(1 - d_1(s)) / \bar{n}(s) u_0(t) - \\ k_p [1 - \pi_1(\tau, \mu)] g_0 m(t) \operatorname{sgn}(e_0(t)) &= \\ - \zeta_3(t, \tau, \mu) \operatorname{sgn}(e_0(t)). \end{aligned} \quad (A18)$$

综上, 若记  $k_v u_0(t) = (k_v - k_p) u_0(t) + k_p u_0(t)$  及  $k_p u_0(t) = k_p \pi_1(\tau, \mu) u_0(t) - k_p (1 - \pi_1(\tau, \mu)) [f_0(k_0(t)) + g_0 m(t)] \times \operatorname{sgn}(e_0(t))$  (参见(3.10)式), 则对(3.8)式, 利用(A14) - (A18), 对给定的  $\mu \in [0, \mu_1^*], \tau \in (0, \tau^*)$ , 我们有

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= \\ P_0(e_0, \dots, e_{n^* - 1}, \omega_{\Delta e}, d, \mu, \tau, \vartheta)(t) &+ \\ [(k_p - k_v) F^{-2(n^* - 1)}(s) u_0(t)] + (k_v - k_p) u_0(t) &+ \\ \tau k_p [(\mu \hat{G}(s, \mu) \Delta G(s)(1 - d_1(s)) / \bar{n}(s)) + \\ \bar{G}(s, \mu) / \alpha(s) + \pi_1(\tau, \mu)] u_0(t) &+ \\ [\mu k_p \Delta G(s) F^{-2(n^* - 1)}(s)(1 - d_1(s)) / \bar{n}(s) u_0(t) - \\ k_p (1 - \pi_1(\tau, \mu)) g_0 m(t) \operatorname{sgn}(e_0(t))] - \\ (1 - \pi_1(\tau, \mu)) k_p f_0(k_0(t)) \operatorname{sgn}(e_0(t)) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_0(e_0, \dots, e_{n^* - 1}, \omega_e, d, \mu, \tau, \vartheta)(t) - \\
& \{ [\zeta_1(t) + \zeta_2(t, \tau, \mu) + \\
& \zeta_3(t, \tau, \mu)] / f_0(k_0(t)) | f_0(k_0(t)) \operatorname{sgn}(e_0(t)) - \\
& (1 - \pi_1(\tau, \mu)) k_p f_0(k_0(t)) \operatorname{sgn}(e_0(t)) \} = \\
& P_0(e_0, \dots, e_{n^* - 1}, \omega_e, d, \mu, \tau, \vartheta)(t) - \\
& \bar{k}_p(t, \tau, \mu) f_0(k_0(t)) \operatorname{sgn}(e_0(t)), \quad (A19)
\end{aligned}$$

这里,  $\bar{k}_p(t, \tau, \mu) = \{ [\zeta_1(t) + \zeta_2(t, \tau, \mu) + \zeta_3(t, \tau, \mu)] / f_0(k_0(t)) | + (1 - \pi_1(\tau, \mu)) k_p$ . 根据(A15)式,显然有  $\inf_{t \geq 0} \bar{k}_p(t, \tau, \mu) \geq (1 - \pi_1(\tau, \mu)) k_p > 0$ . 于是,对(A19)式应用文[4]定理1的结论,  $f_0(k_0(t))$  经至多有限次切换后将终止切换并满足性能指标  $X(T_0, \varepsilon_0, S(\delta_0))$ . 下面讨论  $u_0(t)$  的有界性. 从(3.10)式可知只要  $m(t)$  有界即可. 总可以选择参数  $g_0 > 0$ , 使其满足引理3.3中  $\lambda_0 - g_0 \lambda_1 > 0$  的条件. 已证  $f_0(k_0(t))$  至多经过有限次切换, 则由(3.12)式不难推知  $m(t)$  必有界. 而前面的分析已表明, 对  $u_0(t)$  的任意有限次切换,  $u_i(t), i = 1, 2, \dots, n^* - 1$  必有界, 这说明(A12)式在  $t \in [0, +\infty)$  上成立.

4) 下面讨论跟踪误差  $e(t)$  的有界性问题, 在引理3.1之(3.7)式中, 由于  $G_i(s) (i = 1, 2, \dots, n^* - 1), \bar{G}(s)$  均稳定且严格正则(参见(3.9)式及定理1), 那么, 若令  $(A_i, b_i, c_i^T)$  及  $(A_u, b_u, c_u^T)$  分别为  $G_i(s)$  和  $\bar{G}(s)$  的一个最小实现,  $x_i(t)$  和  $x_u(t)$  为它们相应的状态向量, 则对所有  $t \geq T$ , 因  $e_i(t), i = 0, 1, 2, \dots, n^* - 1$  此时均满足其各自的性能指标, 从(3.7)式可得跟踪误差  $e(t)$  为

$$\begin{aligned}
|e(t)| = & |e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} c_i^T \exp[A_i(t-\zeta)] b_i e_i(\zeta) d\zeta + \\
& \tau \int_T^t c_u^T \exp[A_u(t-\zeta)] b_u u_u(\zeta) d\zeta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n^*-1} c_i^T \exp[A_i(t-T)] x_i(T) + \tau c_u^T \exp[A_u(t-T)] x_u(T) | \leq \\
& \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{n^*-1} \varepsilon_i \int_T^t |c_i^T \exp[A_i(t-\zeta)] b_i| d\zeta + \\
& \tau |u_0(t)| \int_T^t |c_u^T \exp[A_u(t-\zeta)] b_u| d\zeta + \Psi(t), \quad (A20)
\end{aligned}$$

这里,  $\Psi(t) = | \sum_{i=1}^{n^*-1} c_i^T \exp[A_i(t-T)] x_i(T) + \tau c_u^T \exp[A_u(t-T)] x_u(T) |$ , 它显然是以指数速度收敛到零的. 再因为  $\int_T^t | \cdot | d\zeta \leq \int_0^\infty | \cdot | d\zeta = \| \cdot \|_1$ , 则对所有  $t \geq T, |e(t)| \leq \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{n^*-1} \varepsilon_i \|G_i(s)\|_1 + \tau |u_0(t)| \| \bar{G}(s) \|_1 + \Psi(t)$ , 即  $e(t) \in D_\varepsilon^1$ ; 而若每一个  $e_i(t)$  均在有限时间  $t_{\alpha_i}$  内收敛到零, 那么, 记  $t_M = \max\{t_{\alpha_i}; i = 0, 1, \dots, n^* - 1\}$ , 则有  $|e(t)| \leq \tau |u_0(t)| \| \bar{G}(s) \|_1 + \Psi(t), \forall t \geq t_M$ , 即  $e(t) \in D_\varepsilon^2$ .

5) 最后讨论闭环系统中所有信号的有界性. 由于已证  $e(t)$  及  $e_i(t), i = 0, 1, \dots, n^* - 1; u_i(t), i = 0, 1, \dots, n^* - 1 (u_{n^*-1}(t) = u_m(t))$  的有界性, 则从文[1]图1和本文图1立即看出闭环系统中各处的信号均是有界的.

本文作者简介

林 岩 1955年生, 博士, 副教授. 主要研究领域为鲁棒和自适应控制.

毛剑琴 女, 1940年生, 博士, 教授, 博士生导师. 中国自动化学会常务理事, 副秘书长, IEEE ICSS北京分会主席. 研究领域是控制理论和控制工程, 主要是智能控制、智能辨识及其应用, 鲁棒控制、自适应控制及其应用等.

## 英文刊物 Journal of Systems Science and Complexity (《系统科学与复杂性学报》)近日在京创刊

为了推动系统科学与复杂性的研究与国际学术交流, 中国科学院系统科学研究所近日创办了《系统科学与复杂性学报》英文刊. 该刊由科学出版社和美国阿伦敦出版公司联合出版在全世界发行. 全国人大副委员长成思危教授、全国政协副主席宋健等院士共8位著名学者担任顾问, 系统科学研究所所长、国际著名控制论专家郭雷教授任主编, 30位国内外知名学者被聘为编委, 其中海外编委14人.

该学报第一期发表了中外科学家的高水平研究论文10篇, 包括中国谢惠民教授、英国 BELL 教授, 美国 WANG L Y, CHEN G R 教授、日本 TAKASHI 教授和 SUSUMU 教授等的近期研究成果. 创刊的目标之一就是为国际上系统科学与复杂性研究提供一个论坛, 同时使这个刊物尽快进入国际重要学术刊物的行列.

(李凤翎)