

文章编号: 1000 - 8152(2001)02 - 0224 - 04

基于模糊动态模型的二级倒立摆系统的分析和设计

姚宏伟 梅晓榕 杨振强 庄显义

(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨, 150001)

摘要: 首先给出了一种离散系统模糊动态模型的辨识方法, 提出了一个衡量聚类有效性的函数, 以确定模糊规则的数目, 并给出一个保证模糊系统全局稳定的充分条件, 在此基础上给出了模糊控制系统的设计方法, 并对二级倒立摆系统进行了控制, 取得了较好的效果.

关键词: 模糊动态模型; 模糊聚类; 稳定性; 二级倒立摆

文献标识码: A

Analysis and Design of a Double Inverted Pendulum Based on the Dynamic Fuzzy Model

YAO Hongwei, MEI Xiaorong, YANG Zhenqiang and ZHUANG Xianyi

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, P. R. China)

Abstract: Firstly, a method of fuzzy dynamic model identification for discrete-time system is proposed. A function for measuring clustering validity is defined with which the number of fuzzy rules can be determined. A sufficient criterion that guarantees the global stability of the fuzzy system is presented. Based on this, we develop a design way of the fuzzy control system. This method is proved to have better effect through a double inverted pendulum by experiments.

Key words: dynamic fuzzy model; fuzzy clustering; stability; double inverted pendulum

1 引言 (Introduction)

二级倒立摆为典型的快速、多变量、复杂非线性、绝对不稳定系统. 对二级倒立摆控制系统的研究可归结为非线性多变量绝对不稳定系统的研究. 模糊控制和模糊辨识方法虽然已被广泛地应用于很多实际问题, 但其缺乏严格的理论分析. Cao 和 Rees 提出了一种模糊动态模型的辨识方法, 并在此基础上给出了一种基于极限系统稳定性理论的模糊控制器的设计方法^[1,2]. 但其控制输出可能是不连续的, 进而导致系统输出的不平滑. 本文在 Cao 和 Rees 的工作基础上, 给出了一种基于模糊动态聚类算法的离散系统模糊动态模型的辨识方法, 提出了一个衡量聚类有效性的函数, 并给出了一种基于稳定性分析的模糊控制器的设计方法, 使用该方法控制二级倒立摆获得了良好的效果.

2 模糊动态模型的辨识 (Identification of the dynamic fuzzy model)

对于离散控制对象, 可以用下列由 Cao 和 Rees

提出的模糊动态局部线性模型^[3]来描述:

$R^{(l)}$: 如果 z_1 为 F_1^l, \dots , 且 z_n 为 F_n^l ,

则 $y(t+1) = G_l(q^{-1})y(t) + H_l(q^{-1})u(t)$,

(1)

$$\begin{cases} G_l(q^{-1}) = G_1^l + G_2^l q^{-1} + \dots + G_n^l q^{-n+1}, \\ G_k^l = [g_{kj}^l]_{p \times p}, \\ H_l(q^{-1}) = H_1^l + H_2^l q^{-1} + \dots + H_n^l q^{-n+1}, \\ H_k^l = [h_{kj}^l]_{p \times s}, \\ l = 1, 2, \dots, m, \bar{n} = p \times n + s \times n. \end{cases} \quad (2)$$

这里 $R^{(l)}$ 表示第 l 条模糊规则, 系统的输入 $u(t) \in \mathbb{R}^s$, 系统的输出 $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $q^{-1}y(t) = y(t-1)$, $z(t) = (y(t)^T, y(t-1)^T, \dots, y(t-n+1)^T, u(t-1)^T, \dots, u(t-n+1)^T)^T$, 令 $\mu_l(z(t)) = \mu_l(z)$ 则

$$\mu_l(z) = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(z_i) / \sum_{l=1}^m \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(z_i), \quad \sum_{l=1}^m \mu_l = 1. \quad (3)$$

设 M 是满足上述隶属函数的集合. 由中心平均解模糊公式, 可得如下全局模糊模型:

$$\begin{cases} y(t+1) = G(q^{-1}, \mu(z))y(t) + H(q^{-1}, \mu(z))u(t), \\ G(q^{-1}, \mu(z)) = \sum_{l=1}^m \mu_l(z) G_l(q^{-1}), \\ H(q^{-1}, \mu(z)) = \sum_{l=1}^m \mu_l(z) H_l(q^{-1}), \\ \mu(z) = (\mu_1(z), \mu_2(z), \dots, \mu_m(z)). \end{cases} \quad (4)$$

由全局模糊模型(4), 可以得到模糊系统动态模型的状态空间描述:

$$\begin{cases} x(t+1) = A(\mu(x))x(t) + B(\mu(x))u(t), \\ A(\mu(x)) = \sum_{l=1}^m \mu_l(x) A_l, B(\mu(x)) = \sum_{l=1}^m \mu_l(x) B_l, \\ \mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x)). \end{cases} \quad (5)$$

本文使用模糊动态聚类算法来辨识模糊规则的前件, 其后件的辨识采用 Cao 和 Rees 提出的方法^[3].

模糊聚类算法的目的是将目标函数(6)最小化. 其约束条件为式(3)

$$J = w_1 \left[\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \mu_l(t) \|z(t) - v_l\|^2 \right] + w_2 \left[\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \mu_l(t) e_l(t)^2 \right], \quad (6)$$

$$e_l(t) = y(t)^T - \varphi(t-1)^T \alpha^l, \quad (7)$$

$$\varphi(t-1)^T = ((1, 1, \dots), y(t-1)^T, \dots, y(t-n)^T, u(t-1)^T, \dots, u(t-n)^T),$$

$$\alpha^l = [a_1^l \ a_2^l \ \dots \ a_p^l], \alpha_j^l = [\alpha_{j1}^l \ \dots \ \alpha_{j\bar{n}}^l],$$

$$\bar{n} = p + p \times n + g \times n.$$

给定 w_1, w_2 则最小化(6)的必要条件是:

$$\begin{cases} v_l = \frac{\sum_{i=1}^N (\mu_l(t))^2 z(t)}{\sum_{i=1}^N (\mu_l(t))^2}, \\ \alpha_l = [\Phi^T D_l \Phi]^{-1} \Phi^T D_l Y, \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} \Phi = [\varphi(1) \ \varphi(2) \ \dots \ \varphi(N)]^T, \\ Y = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]^T, \\ D_l = \text{diag}[\mu_l(t)]_{N \times N}, \\ \mu_l(t) = \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{[w_1 \|z(t) - v_j\|^2 + w_2 e_j(t)^2]^2}{[w_1 \|z(t) - v_j\|^2 + w_2 e_j(t)^2]^2} \right\}^{-1}. \end{cases} \quad (8b)$$

本文使用下列 S 函数来确定模糊规则的数目:

$$S = w_1 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \delta_{ij} \frac{\|z(t) - v_i\|^2}{\mu_i^m V_{ij}} \right) / \left(n \min_{l,i} \left\{ \frac{\|v_l - v_i\|^2}{\sigma_l^2 + \sigma_i^2} \right\} \right) + w_2 \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \mu_j(t)^2 [e_j(t)^2 - \bar{e}^2] \right\}, \quad (9)$$

这里

$$\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|y(t)^T - \varphi(t-1)^T \alpha\|,$$

$$\alpha = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y,$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \mu_j > \mu_i, j \neq i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\sigma_l = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_{li} \mu_i \|z(t) - v_l\|^2}{\sum_{i=1}^N \delta_{li} \mu_i},$$

$$v_i = \frac{1}{1 + \frac{\|z(t) - v_i\|^2}{\sigma_i}}.$$

模糊动态模型的模糊规则前件的辨识步骤如下:

- 1) 确定初始聚类数目 $m = 2$;
- 2) 设置初始模糊分类矩阵 $U^{(0)} = (\mu_i^{(0)})$, $\sum_{i=1}^m \mu_i^{(0)} = 1$;
- 3) 令步骤 $b = 0, 1, \dots$;
- 4) 在 $U^{(b)}$ 情况下, 计算 m 个聚类中心 $\{v_i^{(b)}\}$;
- 5) 如 $I_b = 0$, 按(8)式更新 $U^{(b)}$, 否则 $\mu_i^{(b+1)}(t) = 0, \forall i \in I_b, \sum_{i \in I_b} \mu_i^{(b+1)}(t) = 1$.

这里

$$I_b = \{i \mid 1 \leq i \leq m, w_1 \|z(t) - v_i\|^2 + w_2 e_i(t)^2 = 0\},$$

$$I_b = \{1, 2, \dots, m\} - I_b.$$

如果 $|\mu_i^{(b+1)} - \mu_i^{(b)}| \leq \epsilon, \epsilon$ 为收敛阈值, 则迭代结束, 若不满足, 则令 $b = b + 1$, 转向第4)步.

6) 如果式(9)达到最小值, 聚类过程结束, 否则, 聚类数 $m = m + 1$, 然后转向第4)步, 即取 S 随 m 增加而成为最小点的值作为聚类数.

3 模糊动态模型的稳定性分析 (Stability analysis of the dynamic fuzzy model)

对于模糊系统(5)的状态空间模型, 若令 $u(t) = 0$, 可得如下离散非线性系统模型:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^m \mu_i(x, t) A_i x(t). \quad (10)$$

非线性系统(10)也可以表示成一个具有非线性时变扰动的线性系统:

$$x(t+1) = A_0 x(t) + E(x, t)x(t), \quad (11)$$

这里

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m A_i, \quad E(x, t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(x, t) E_i,$$

$$\sum_{i=1}^m \mu_i(x, t) = 1, \quad E_i = A_i - A_0, \quad i = 1, \dots, m.$$

系统(11)的名义系统为:

$$x(t+1) = A_0 x(t). \quad (12)$$

由此可以将模糊系统看作是一个具有非线性时变扰动的线性系统,由鲁棒稳定性理论,有如下定理:

定理 1 非线性系统(11)为大范围一致渐近稳定的充分条件是

1) 名义系统(12)一致渐近稳定;且 $\rho(A_0) < \rho_0$, 这里 $0 < \rho_0 \leq 1$, $\rho(\cdot)$ 为矩阵 (\cdot) 的谱半径;

2) 对于满足方程

$$\rho_0^{-2} A_0^T P A_0 - P = -Q \quad (13)$$

一致正定实对称矩阵 P , 有下式成立:

$$2 \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_{\max}([E_i^T P A_0]_H) + \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} 2^{(1-\delta_y)} \lambda_{\max}([E_i^T P E_j]_H) < \rho_0^2 \lambda_{\min}(Q), \quad (14)$$

这里 $Q > 0$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示对称矩阵 (\cdot) 最大特征值, δ_y 为 Kronecker 符号, $[\cdot]_H$ 表示矩阵 (\cdot) 的 Hermitian

部分.

4 模糊控制器的设计 (Design of the fuzzy controller)

如果模糊状态反馈控制律为:

$R^{(j)}$: 如果 $x_1 F_1^j$, 且 \dots , 且 x_n 为 F_n^j ,

$$\text{则 } u_j(t) = -k_j x(t), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

则可得整个系统的控制律为:

$$u(t) = - \sum_{j=1}^m \mu_j(x, t) k_j x(t). \quad (16)$$

这样可得整个闭环系统为:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i(x, t) \mu_j(x, t) (A_i - B k_j). \quad (17)$$

对于闭环系统(17),可以用定理 1 来分析其稳定性.

由此可知模糊控制器的设计步骤为:

1) 使用模糊动态聚类等算法来辨识出被控对象的离散模糊动态模型,从而得到该离散模糊动态模型的状态空间描述;

2) 基于被控对象的离散模糊动态模型的状态空间描述,设计控制律(16),使矩阵 $A_i - B k_i$ 的特征值满足期望的条件,然后检查闭环系统的稳定性.如果不满足,可使矩阵 $A_i - B k_i$ 的特征值选得更小.然后据此设计模糊系统的控制律.

5 二级倒立摆的分析与设计 (Analysis and design of the double inverted pendulum)

由动力学理论可知二级倒立摆的动力学方程如下:

$$M(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + F(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = G(u, \theta_1, \theta_2), \quad (18)$$

式中

$$M(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} M_0 + M_1 + M_2 & (M_1 l_1 + M_2 L_1) \cos \theta_1 & M_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (M_1 l_1 + M_2 L_1) \cos \theta_1 & J_1 + M_1 l_1^2 + M_2 L_1^2 & M_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ M_2 l_2 \cos \theta_2 & M_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & J_2 + l_2^2 M_2 \end{bmatrix};$$

$$G(u, \theta_1, \theta_2) = [G_0 u \quad (M_1 l_1 + M_2 L_1) g \sin \theta_1 \quad M_2 l_2 g \sin \theta_2]^T;$$

$$F(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \begin{bmatrix} F_0 & -(M_1 l_1 + M_2 L_1) g \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -M_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & F_1 + F_2 & -M_2 l_2 L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2 - F_2 \\ 0 & M_2 l_2 L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 - F_2 & F_2 \end{bmatrix};$$

式(18)中, $r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2$ 分别为小车的位置、速度、加速度,下摆和上摆与铅垂线的角度、角

速度、角加速度. g 为重力加速度.其参数标称值见表 1.

表 1 各参数的意义及其标称值

Table 1 Value and meaning of each nominal parameter

| 参数 | 参数值 | 意义 | 参数 | 参数值 | 意义 |
|-------|-------------|--------------|-------|---------------|--------------|
| M_0 | 1.600kg | 小车及驱动系统的等效质量 | l_2 | 0.245m | 上摆质心至轴心的距离 |
| M_1 | 0.185kg | 下摆质量 | L_1 | 0.483m | 下摆轴心至上摆轴心的距离 |
| M_2 | 0.2kg | 上摆质量 | F_0 | 11.8519N·s/m | 小车系统的摩擦系数 |
| J_1 | 0.00547kg·m | 下摆转动惯量 | F_1 | 0.006415N·m·s | 下摆摩擦阻力系数 |
| J_2 | 0.00549kg·m | 上摆转动惯量 | F_2 | 0.006717N·m·s | 上摆摩擦阻力系数 |
| l_1 | 0.283m | 下摆质心至轴心的距离 | G_0 | 0.006717N/V | 力与控制电压之比 |

对二级倒立摆系统进行辨识,采样时间为 0.05 秒,可得离散模糊动态模型的状态空间描述:

$$R_1: \text{ if } x(t) \text{ is } \mu_1 \text{ then } x(t+1) = A_1x(t) + B_1u(t), \quad (19)$$

$$R_2: \text{ if } x(t) \text{ is } \mu_2 \text{ then } x(t+1) = A_2x(t) + B_2u(t), \quad (20)$$

$$R_3: \text{ if } x(t) \text{ is } \mu_3 \text{ then } x(t+1) = A_3x(t) + B_3u(t), \quad (21)$$

$$R_4: \text{ if } x(t) \text{ is } \mu_4 \text{ then } x(t+1) = A_4x(t) + B_4u(t), \quad (22)$$

其中

$$x(t) = [r \quad \theta_1 \quad \theta_2 - \theta_1 \quad \dot{r} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1]^T.$$

聚类中心为

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0154 & -0.0142 & 0.0075 & 0.3820 & -0.4970 & 0.3650 \\ 0.0314 & -0.0156 & 0.0038 & 0.1179 & -0.1648 & 0.1303 \\ -0.0125 & 0.0228 & -0.0083 & -0.1618 & 0.2349 & -0.1915 \\ -0.0153 & 0.0099 & -0.0084 & -0.3505 & 0.4239 & 0.2977 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

将每个子系统 $A_i - B_iK_i$ 的期望特征值设为:

$$[0.8502 \pm 0.0363i, 0.98040 \pm 0.0095i, 0.9965 \pm 0.0040i],$$

则应用极点配置方法,可得控制律的反馈值如下:

$$K_1 = [4.494 \quad 69.851 \quad 228.067 \quad 5.926 \quad 31.045 \quad 29.614],$$

$$K_2 = [4.492 \quad 69.837 \quad 227.717 \quad 5.924 \quad 30.999 \quad 29.563],$$

$$K_3 = [5.662 \quad 75.954 \quad 224.361 \quad 6.427 \quad 34.083 \quad 32.933],$$

$$K_4 = [5.779 \quad 73.200 \quad 233.478 \quad 6.230 \quad 32.043 \quad 30.245].$$

这里 $Q = I$. 使用定理 1 可知整个模糊系统稳定.其实时控制的特性如图 1:

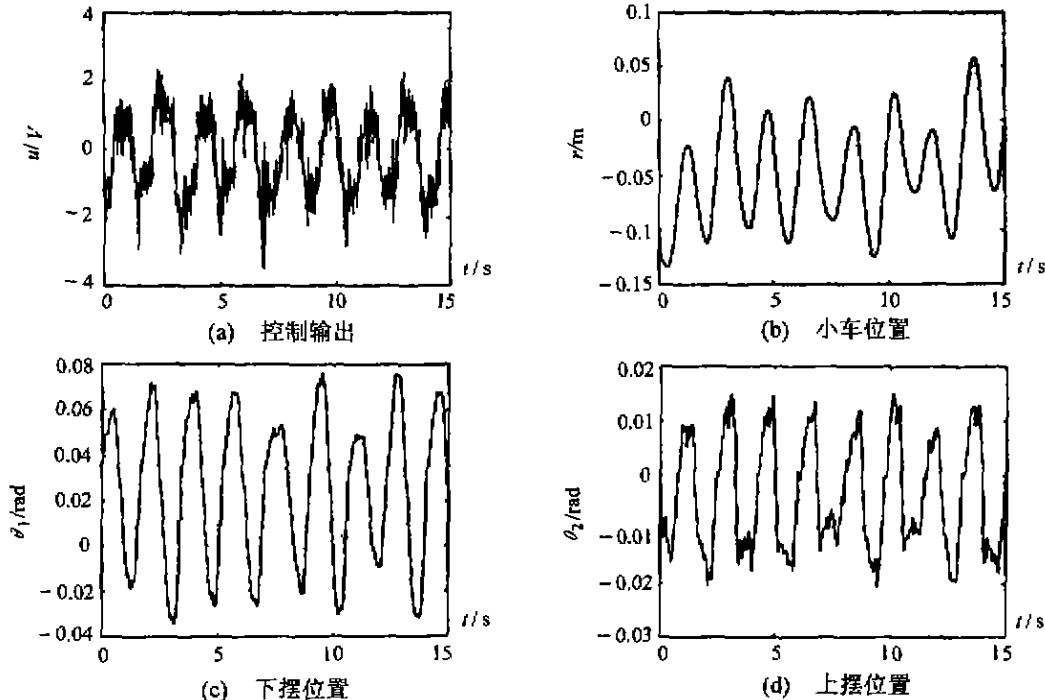


图 1 二级倒立摆的控制曲线

Fig. 1 Control curve of a double inverted pendulum

程计算机控制系统来说,保代价采样控制是一种新的有效可行的控制方案.

参考文献(References)

- [1] Bamieh B and Pearson I B. The H_2 problem for sampled-data systems [J]. *Syst. & Contr. Lett.*, 1992, 19(1): 1 - 12
- [2] Chen T and Francis B A. H_2 -optimal sampled-data control [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, 36: 387 - 397
- [3] Chen T and Francis B A. *Optimal Sampled-Data Control Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1995
- [4] Bamieh B and Pearson I B. A general framework for linear periodic systems with application to H_∞ sampled-data control [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, 37(4): 418 - 435
- [5] Sun W, Nagpal K M and Khargonekar P P. H_∞ control and filtering for sampled-data systems [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1993, 38(8): 1162 - 1175
- [6] Toivonen H T. A mixed H_2/H_∞ control problem for sampled-data systems [J]. *Int. J. Control*, 1998, 70: 579 - 602
- [7] Toivonen H T and Saffors M F. The sampled-data H_∞ problem: a unified framework for discretization based methods and Riccati-equation solution [J]. *Int. J. Control*, 1997, 66: 289 - 309
- [8] Bernstein D S and Hollot C V. Robust stability for sampled-data control systems [J]. *Syst. & Contr. Lett.*, 1989, 13: 217 - 226
- [9] Dullerud G and Glover K. Robust stabilization of sampled-data systems to structured LTI perturbations [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1993, 38(10): 1497 - 1508
- [10] Sivashanker N and Khargonekar P P. Robust stability and perfor-

mance analysis of sampled data systems [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1993, 38(1): 58 - 69

- [11] Shi P. Filtering on sampled-data systems with parametric uncertainty [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1998, 43: 1022 - 1027
- [12] Pi Daoying. The research and application of multimodel control [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1995
- [13] Chang S S L and Peng T K L. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1972, 17(4): 474 - 483
- [14] Yu Li, Wang Jingcheng and Chu Jian, et al. Guaranteed cost control of uncertain linear discrete-time systems [A]. Proc. of 1997 American Control Conference [C], 1997
- [15] Petersen I R and McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems [J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1994, 39(9): 1971 - 1977
- [16] Xue Anke. Theory and application of robust quadratic optimal control of uncertain linear systems [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1997
- [17] Shi P, de Souza C E and Xie L. Bounded real lemma for linear systems with finite discrete jumps [J]. *Int. J. Control*, 1997, 66(2): 145 - 159

本文作者简介

吕应权 1973年生, 1997年毕业于燕山大学工业自动化专业, 获硕士学位, 现为浙江大学工业控制技术研究所博士生. 研究方向为采样系统, 鲁棒控制等.

薛安克 见本刊2001年第1期第90页.

孙优贤 见本刊2001年第1期第54页.

(上接第227页)

6 结束语(Conclusion)

本文将模糊动态聚类等算法应用于离散系统模糊动态模型的辨识中, 并提出了一个衡量聚类有效性的函数, 从而提出了一种模糊动态模型的辨识方法. 因为模糊系统可以看作是一个具有非线性时变扰动的线性系统, 从而基于鲁棒稳定性理论, 给出了闭环模糊系统稳定的充分条件. 在此基础上将模糊思想和线性控制器的设计方法相结合, 提出了一种模糊控制器的设计方法. 该方法结合二级倒立摆系统进行了实验研究. 实时控制结果表明该方法是有用的.

参考文献(References)

- [1] Cao S G, Rees N W and Feng G, et al. Analysis and design for a class of complex control systems, part I: fuzzy modeling and identification [J]. *Automatica*, 1997, 33(6): 1017 - 1028

- [2] Cao S G, Rees N W and Feng G, et al. Analysis and design for a class of complex control systems, part II: fuzzy control design [J]. *Automatica*, 1997, 33(6): 1029 - 1039

- [3] Cao S G and Rees N W. Identification of dynamic fuzzy models [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, 74: 307 - 320

本文作者简介

姚宏伟 1971年生, 1997年硕士研究生毕业, 现为哈尔滨工业大学控制工程系控制理论及应用专业博士研究生. 研究领域为模糊控制, 神经网络等.

梅晓榕 1946年生, 1969年毕业于吉林工业大学机械工程系, 长期从事控制理论和伺服技术的教学和科研工作, 现为哈尔滨工业大学控制工程系副教授.

梅耀强 1963年生, 1996年硕士研究生毕业, 现为哈尔滨工业大学控制工程系控制理论及应用专业博士研究生. 研究领域为模糊控制, 神经网络等.

庄显义 1935年生, 1961年毕业于哈尔滨工业大学自动控制系统, 长期从事控制理论和伺服技术的教学和科研工作. 现为哈尔滨工业大学控制工程系教授, 博士生导师.