

文章编号: 1000-8152(2001)02-0293-05

## 典型 T-S 模糊系统是通用逼近器\*

曾珂 张乃尧 徐文立

(清华大学自动化系·北京, 100084)

**摘要:** 研究的多输入单输出 T-S 模糊系统采用输入变量的线性函数作为规则后件, 称为典型 T-S 模糊系统, 在每个输入变量的模糊子集满足一致性以及隶属函数连续且分段可微的条件下, 证明了典型 T-S 模糊系统是通用逼近器. 以此为基础, 提出当典型 T-S 模糊系统采用 BP 算法进行在线学习时, 可以仅调节规则后件的参数, 而同时仍然能够确保通用逼近性.

**关键词:** 典型 T-S 模糊系统; 通用逼近性; 在线学习

**文献标识码:** A

## Typical T-S Fuzzy Systems Are Universal Approximators

ZENG Ke, ZHANG Naiyao and XU Wenli

(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, P. R. China)

**Abstract:** The multi-input single-output T-S fuzzy systems investigated in this paper, named as typical T-S fuzzy systems, use linear functions of input variables as rule consequents. On the condition that fuzzy sets of each input variable are consistent and all the membership functions are continuous and piecewise differentiable, we proved that typical T-S fuzzy systems are universal approximators. Based on the proof, we further pointed out that it's feasible to modify only the rule consequent parameters of typical T-S fuzzy systems when it carries out online learning, however the universal approximation capability is still ensured.

**Key words:** typical T-S fuzzy systems; universal approximation; online learning

### 1 引言(Introduction)

模糊系统的通用逼近性是要回答这样的问题: 模糊系统是否能够以任意精度逼近紧致集上的任意连续实函数? 对这一问题的回答无论在理论上还是应用上都有极为重要的意义. 这是因为从数学上看, 模糊系统实现的是从输入论域到输出论域的函数映射. 当模糊系统用作系统辨识时, 通用逼近性决定了它是否能够逼近任意连续的非线性动态模型; 当模糊系统用作控制时, 通用逼近性决定了它是否能够对任意非线性动态对象逼近任意连续的非线性控制曲线, 以实现所要求的闭环系统动态品质. 可以说, 模糊系统所有的理论研究和实际应用都是建立在模糊系统通用逼近性的基础之上的.

常用的模糊系统可以分为两大类: Mamdani 模糊系统和 T-S 模糊系统. 这两类模糊系统的主要区别在于它们的规则后件. Mamdani 模糊系统采用模糊集作为规则后件, 而 T-S 模糊系统采用输入变量的线性或非线性的函数作为规则后件<sup>[1]</sup>. 对模糊系统通用逼近性的研究已经取得了很大的进展<sup>[2~14]</sup>, 但

是目前大多数成果研究的都是 Mamdani 模糊系统<sup>[2~10]</sup>, 其中文<sup>[5]</sup>证明了采用高斯隶属函数的模糊系统是通用逼近器, 文<sup>[6]</sup>证明了采用伪梯形隶属函数的模糊系统是通用逼近器. 只有少数文献研究了 T-S 模糊系统<sup>[11~13]</sup>, 其中文<sup>[11]</sup>在用线性解模糊代替常用的重心法解模糊的条件下得到了两输入一输出 T-S 模糊系统是通用逼近器的结论; 文<sup>[12]</sup>和<sup>[13]</sup>证明了规则后件是一种简化的成比例线性函数的 T-S 模糊系统是通用逼近器. 显然这些成果均是在对 T-S 模型进行某种简化和限制的条件下得到的. 值得一提的是文<sup>[14]</sup>给出了一种用简单的两输入一输出、采用全交叠三角形隶属函数的 T-S 模糊系统构造的多级模糊系统, 并证明了该多级模糊系统的通用逼近性.

本文研究采用输入变量的线性函数作为规则后件的多输入单输出(MISO) T-S 模糊系统, 我们称它为典型 T-S 模糊系统, 这是因为现有的绝大多数文献中研究的 T-S 模糊系统均属于此类. 我们的研究中没有对典型 T-S 模糊系统进行任何简化, 即它可

\* 基金项目: 国家自然科学基金(69774015)和清华大学基础研究基金资助项目.  
收稿日期: 1999-07-15; 收修改稿日期: 2000-02-14.

以有任意个数的输入变量、每个输入变量可以有任意个数和任意形状隶属函数的模糊子集.采用普遍使用的重心法解模糊.在每个输入变量的模糊子集满足一致性以及隶属函数连续且分段可微的条件下,我们将分两步证明典型 T-S 模糊系统是通用逼近器,首先我们证明典型 T-S 模糊系统能够一致逼近任意多元多项式函数,然后再利用 Weierstrass 逼近定理证明典型 T-S 模糊系统能够以任意精度一致逼近紧致集上的任意连续实函数.

本文是这样安排的:第二节是数学准备;第三节证明典型 T-S 模糊系统是通用逼近器;第四节在前面证明过程的基础上,提出了既能保证通用逼近性又能极大地提高典型 T-S 模糊系统参数在线学习速度的方法,并给出仿真实例;第五节总结本文的工作.

### 2 数学准备(Mathematical preliminaries)

T-S 模糊系统一般定义为<sup>[1]</sup>

$R_j$ : IF  $x_1$  is  $A_1^j$  and  $x_2$  is  $A_2^j$  and  $\dots$  and  $x_n$  is  $A_n^j$ ,

THEN  $y = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

其中  $x_i$  为输入变量,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $A_i^j$  为模糊子集,  $f_j(\cdot)$  为线性或非线性函数,  $M$  为模糊规则总数.  $f_j(\cdot)$  通常取为输入变量的线性函数,即

$R_j$ : IF  $x_1$  is  $A_1^j$  and  $x_2$  is  $A_2^j$  and  $\dots$  and  $x_n$  is  $A_n^j$ ,

THEN  $y = p_{j0} + p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 + \dots + p_{jn}x_n =$

$$p_{j0} + \sum_{i=1}^n p_{ji}x_i, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

我们称由(1)式定义的 T-S 模糊系统为典型 T-S 模糊系统.如果  $f_j(\cdot)$  采用非线性函数,例如高次多项式函数或更复杂的非线性函数,选择它的函数结构和参数是极为困难的,而且将给从数学上分析 T-S 模糊系统带来许多不利,因此在大量的理论研究和实际应用中,都采用典型 T-S 模糊系统.在这样的背景下,本文的工作就是研究典型 T-S 模糊系统的通用逼近性.

对典型 T-S 模糊系统,不失一般性,我们设  $0 \leq x_i \leq 1$ (这是因为可以用简单的线性变换将  $x \in [a, b]$  映射到  $[0, 1]$ ).对每一个输入变量  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  定义  $n_i$  个模糊子集,从而规则总数为  $M = \prod_{i=1}^n n_i$ .(1)式所给出的第  $j$  条模糊规则的激活度为

$\mu_j(x) = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)$ .容易求得,典型 T-S 模糊系统的输出为

$$f_{TS}(x) = \frac{\sum_{j=1}^M [\mu_j(x) (\sum_{i=0}^n p_{ji}x_i)]}{\sum_{j=1}^M \mu_j(x)}, \quad (2)$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,并且令  $x_0 \equiv 1$ .

设输入变量  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的第  $k_i$  个模糊子集的中心点位于  $C_{k_i}^i, k_i = 1, \dots, n_i$ ,并且有  $0 \leq C_1^i < C_2^i < \dots < C_{n_i}^i \leq 1$ .不失一般性,我们设每个中心点处的隶属度为 1.对每一个输入变量  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  定义模糊分割间距

$$D_{k_i}^i = C_{k_i}^i - C_{k_i-1}^i, \quad k_i = 1, 2, \dots, n_i + 1,$$

其中  $C_0^i \equiv 0, C_{n_i+1}^i \equiv 1$ .在此基础上可以对每一个输入变量  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  定义最大模糊分割间距

$$D_{\max}^i = \max_{k_i=1}^{n_i+1} D_{k_i}^i. \quad (3)$$

在  $C^n[0, 1]$  上定义的  $q$  次  $n$  元多项式函数可以写为

$$P_q(x) = \sum_{d_1=0}^{m_1} \sum_{d_2=0}^{m_2} \dots \sum_{d_n=0}^{m_n} \beta_{d_1 d_2 \dots d_n} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n},$$

其中  $\sum_{i=1}^n m_i = q, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

定义 一致(consistent)<sup>[6]</sup>:称论域  $U$  上的一组模糊集  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是一致的,如果对某些  $x_0 \in U$  存在  $A_k (k \in \{1, 2, \dots, n\})$  使得  $\mu_{A_k}(x_0) = 1$ ,且对任意  $j = 1, 2, \dots, n$ , 以及  $j \neq k$ , 都有  $\mu_{A_j}(x_0) = 0$ .

注 1 我们以人的身高为例来分析一致性的物理意义.定义三个模糊集“高”、“中等”和“矮”,这三个模糊集是一致的意味着当人的身高对其中某一个模糊集隶属度为 1 时,对其余模糊集的隶属度都为 0.例如当身高对“矮”的隶属度为 1 时,对“高”和“中等”的隶属度均为零.从物理意义上看,一致的要求是非常合理的,并且容易通过适当选取隶属函数来实现.

假设 1 本文研究的典型 T-S 模糊系统的每一个输入变量的模糊子集都是一致的.

假设 2 本文研究的典型 T-S 模糊系统采用的隶属函数都是连续且分段可微的.

注 2 事实上,已知的几乎所有理论研究和实际应用中所选取的隶属函数都是连续且分段可微的.

### 3 典型 T-S 模糊系统具有通用逼近性(Universal approximation of typical T-S fuzzy systems)

以基本假设为前提,我们将证明典型 T-S 模糊系统具有通用逼近性.

引理 典型 T-S 模糊系统能够以任意精度一致

逼近  $C^n[0,1]$  上的  $q$  次  $n$  元多项式函数  $P_q(x)$ , 即  $\forall \epsilon > 0$ , 存在典型 T-S 模糊系统使得

$$\|f_{TS}(x) - P_q(x)\|_{\infty} < \epsilon,$$

其中无穷范数  $\|*\|_{\infty}$  的定义为: 对任意定义在紧致集  $U \subset \mathbb{R}^n$  上的函数  $a(x)$ ,  $\|a(x)\|_{\infty} = \sup_{x \in U} |a(x)|$ .

证 ① 考察典型 T-S 模糊系统的每一条模糊规则  $R_j, j = 1, 2, \dots, M$ , 它决定了一个特殊输入向量  $x_j = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 其中每一个分量  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的取值恰好等于对应的模糊子集  $A_i^j$  的中心点, 即  $x_i = C_{k_i}^j$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, n, k_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$ .

显然, 全部这样的特殊输入向量共有  $M$  个, 并且与模糊规则有一一对应的关系. 记它们的集合为

$$S = \{x_j = (C_{j_1}^1, C_{j_2}^2, \dots, C_{j_n}^n) /$$

$$j = 1, 2, \dots, M, 1 \leq j_i \leq n_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

我们首先证明存在一组  $p_{\bar{i}} (j = 1, 2, \dots, M; i = 0, 1, \dots, n)$ , 使得典型 T-S 模糊系统在这  $M$  个点上的输出与  $q$  次  $n$  元多项式函数相等, 即

$$\forall x_j \in S (j = 1, 2, \dots, M),$$

有  $f_{TS}(x_j) = P_q(x_j)$ .

注意到在假设 1 的保证下, 对任意  $x_j \in S (j = 1, 2, \dots, M)$ , 有  $\mu_j(x_j) = 1$ , 而对任意  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ , 且  $k \neq j$ , 都有  $\mu_k(x_j) = 0$ . 从而由(2)式得

$$f_{TS}(x_j) = \sum_{i=0}^n C_i^j p_{\bar{i}} = P_q(x_j),$$

其中  $C_0^j \equiv 1$ .

显然, 上式定义了一个关于未知数  $p_{\bar{i}}$  的  $(n+1)$  元一次方程,  $j = 1, 2, \dots, M$ . 注意到该线性方程有无穷组解, 并且将全部  $M$  个这样的方程联立正好可以求得所有的  $p_{\bar{i}}$ , 从而存在一组  $p_{\bar{i}} (j = 1, 2, \dots, M; i = 0, 1, \dots, n)$ , 使得典型 T-S 模糊系统满足

$$\forall x_j \in S (j = 1, 2, \dots, M),$$

有  $f_{TS}(x_j) = P_q(x_j)$ .

② 以此为基础, 我们考察典型 T-S 模糊系统在任意输入  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  时的通用逼近性.

注意到对  $x$  的任意分量  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 总可以找到下标  $k_i \in \{1, 2, \dots, n_i + 1\}$ , 使得  $C_{k_i-1}^i \leq x_i \leq C_{k_i}^i$ , 从而存在

$$x_j = (C_{j_1}^1, C_{j_2}^2, \dots, C_{j_n}^n) \in S (j = 1, 2, \dots, M),$$

使得

$$|x_i - C_{j_i}^i| \leq D_{\max}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

根据假设 2, 由(2)式易知函数  $f_{TS}(x)$  连续且分段可微, 注意到  $f_{TS}(x_j) = P_q(x_j)$ , 利用多元泰勒公式有

$$\begin{aligned} & |f_{TS}(x) - P_q(x)| = \\ & |f_{TS}(x) - f_{TS}(x_j) + P_q(x_j) - P_q(x)| \leq \\ & |f_{TS}(x) - f_{TS}(x_j)| + |P_q(x_j) - P_q(x)| = \\ & |\nabla f_{TS}|_{x=\eta}(x - x_j)| + |\nabla P_q|_{x=\Psi}(x - x_j)| \leq \\ & \sum_{i=1}^n \left( \left\| \frac{\partial f_{TS}}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right) \cdot |x_i - C_{j_i}^i| \leq \\ & \sum_{i=1}^n \left( \left\| \frac{\partial f_{TS}}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right) \cdot D_{\max}^i \leq \\ & \max_{i=1}^n D_{\max}^i \cdot \sum_{i=1}^n \left( \left\| \frac{\partial f_{TS}}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

其中,  $\nabla f_{TS}|_{x=\eta}$  为  $f_{TS}(x)$  在  $\eta$  点处梯度的转置,  $\nabla P_q|_{x=\Psi}$  同理. 而  $\eta$  和  $\Psi$  均位于包含  $x$  和  $x_j$  的最小邻域内.

显然  $\left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$  是有限的数, 另一方面注意到函数  $f_{TS}(x)$  连续且分段可微, 因此  $\left\| \frac{\partial f_{TS}}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$  也是有限

的数. 从而  $\forall \epsilon > 0$ , 当  $\max_{i=1}^n D_{\max}^i$  充分小时, 有

$$\begin{aligned} & |f_{TS}(x) - P_q(x)| \leq \\ & \max_{i=1}^n D_{\max}^i \cdot \sum_{i=1}^n \left( \left\| \frac{\partial f_{TS}}{\partial x_i} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial P_q}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \right) < \epsilon, \end{aligned}$$

即  $\forall \epsilon > 0$ , 存在典型 T-S 模糊系统使得  $\|f_{TS}(x) - P_q(x)\|_{\infty} < \epsilon$ . 证毕.

注 3 考察典型 T-S 模糊系统的任意第  $j$  条模糊规则,  $j = 1, 2, \dots, M$ , 根据假设 2, 典型 T-S 模糊系统采用的隶属函数都是连续且分段可微的, 因此第  $j$  条模糊规则的激活度  $\mu_j(x) = \prod_{i=1}^n \mu_{k_i}^i(x_i)$  为连续且分段可微函数. 当采用重心法解模糊时, 对任意输入向量  $x$ , 都有  $\sum_{j=1}^M \mu_j(x) > 0$ , 因此(2)式所给出的  $f_{TS}(\cdot)$  也是连续且分段可微函数.

注 4 由于  $f_{TS}(\cdot)$  是连续且分段可微函数, 因此在  $f_{TS}(\cdot)$  的所有不可微点上,  $f_{TS}(\cdot)$  的偏导数的上确界存在且有界.

注 5 要求  $\max_{i=1}^n D_{\max}^i$  充分小, 意味着要求每一个  $D_{\max}^i$  充分小, 根据(3)式, 易得

$$D_{\max}^i \geq \frac{1}{n_i + 1},$$

其中等号当且仅当  $x_i$  采用均匀分布的模糊子集,且  $0 < C_1^i < C_2^i < \dots < C_{n_i}^i < 1$  时成立. 从而  $\prod_{i=1}^n n_i$  充分大, 即每个输入变量的模糊分割数充分多, 是  $\max_{i=1}^n D_{max}^i$  充分小的必要条件.

**定理** 典型 T-S 模糊系统能够以任意精度一致逼近紧致集  $U \subset \mathbb{R}^n$  上的任意连续实函数  $g(x)$ , 即  $\forall \epsilon > 0$ , 存在典型 T-S 模糊系统使得

$$\|f_{TS}(x) - g(x)\|_{\infty} < \epsilon,$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 无穷范数  $\|*\|_{\infty}$  的定义同上.

**证** 根据 Weierstrass 逼近定理<sup>[15]</sup>, 在  $U \subset \mathbb{R}^n$  上存在  $q$  次  $n$  元多项式函数  $P_q(x)$  一致逼近任意连续实函数  $g(x)$ , 即  $\forall \epsilon_1 > 0$ , 存在  $P_q(x)$  使得

$$\|P_q(x) - g(x)\|_{\infty} < \epsilon_1.$$

另一方面,  $\forall \epsilon_2 > 0$ , 根据引理, 存在典型 T-S 模糊系统, 使得

$$\|f_{TS}(x) - P_q(x)\|_{\infty} < \epsilon_2.$$

不妨设  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , 从而有

$$\begin{aligned} \|f_{TS}(x) - g(x)\|_{\infty} &= \\ \|f_{TS}(x) - P_q(x) + P_q(x) - g(x)\|_{\infty} &\leq \\ \|f_{TS}(x) - P_q(x)\|_{\infty} + \|P_q(x) - g(x)\|_{\infty} &< \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 &= \epsilon. \end{aligned}$$

证毕.

#### 4 典型 T-S 模糊系统的在线学习 (On-line learning of typical T-S fuzzy systems)

考察上一节的证明过程易见, 只要  $\max_{i=1}^n D_{max}^i$  充分小, 即当采用均匀分布的模糊子集时, 典型 T-S 模糊系统每个输入变量的模糊分割数充分多, 通过寻找一组合适的  $p_{\bar{k}}$ , 就可以保证典型 T-S 模糊系统以任意精度逼近任意连续实函数. 这一点极大地拓宽了 T-S 模糊系统的在线应用前景, 即当在线自适应调节 T-S 模糊系统的参数时, 我们只需要调节规则后件的  $p_{\bar{k}}$  参数即可. 输出误差不再需要从规则后件向规则前件反传, 由于这一过程通常是相当耗时的, 从而极大地限制了 T-S 模糊系统的在线应用. 我们的仿真实验证实了以上结论.

仿真中给定如下二维非线性函数

$$g(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2),$$

其中  $x_1 \in [-1, 1], x_2 \in [-1, 1]$ . 采用两输入一输出的典型 T-S 模糊系统, 两个输入均采用相同个数的均匀分布全交叠的三角形隶属函数. 在每个输入的值域  $[-1, 1]$  上均匀选取 40 个点, 其中奇序数的

点两两匹配得到 400 个训练输入, 偶序数的点两两匹配得到另外 400 个校验输入, 利用上面的解析式进行理论计算可以得到分别用于训练和校验的输入输出样本点对各 400 组. 取学习率 0.2, 采用 BP 算法仅调节规则后件的  $p_{\bar{k}}$  参数. 图 1 所示为典型 T-S 模糊系统估计输出一致逼近误差的学习曲线, 图 2 所示为期望的三维图形, 图 3 和图 4 所示为典型 T-S 模糊系统估计的三维图形. 绘图时所用的数据均由校验输入计算得到. 图中示出每个输入的模糊子集数分别为 5 和 15 两种情况, 显然仅调节规则后件参数  $p_{\bar{k}}$  即可保证典型 T-S 模糊系统一致逼近给定的非线性函数, 并且模糊子集数越多, 典型 T-S 模糊系统的逼近效果越好.

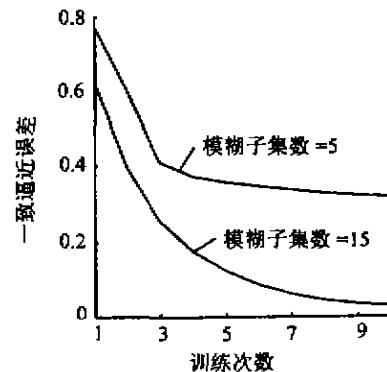


图 1 学习误差  
Fig. 1 Learning error

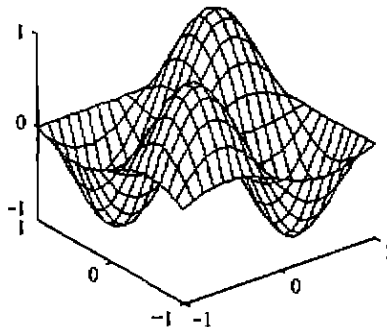


图 2 期望的三维图形  
Fig. 2 Desired 3-dimensional graph

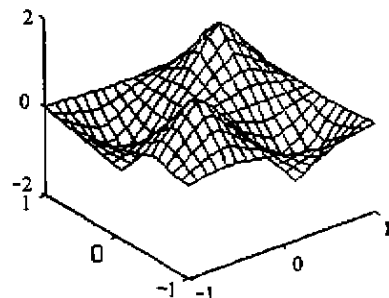


图 3 每个输入取 5 个模糊子集时估计的三维图形  
Fig. 3 Estimated 3-dimensional graph when each input has 5 fuzzy sets

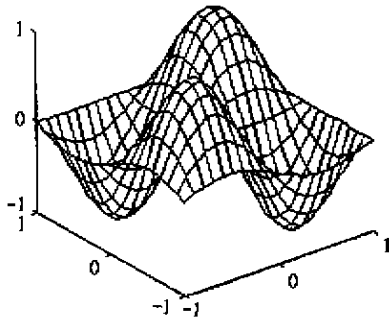


图 4 每个输入取 15 个模糊子集时估计的三维图形  
Fig. 4 Estimated 3-dimensional graph when each input has 15 fuzzy sets

## 5 结语(Conclusion)

本文研究的采用输入变量的线性函数作为规则后件的典型 T-S 模糊系统可以有任意个数的输入变量,每个输入变量可以有任意个数和任意形状隶属函数的模糊子集,采用普遍使用的重心法解模糊.在每个输入变量的模糊子集满足一致性以及隶属函数连续且分段可微的条件下,我们证明了典型 T-S 模糊系统是通用逼近器.以证明过程为基础,我们提出当典型 T-S 模糊系统在线学习时,可以仅修正规则后件的参数,从而大大提高学习速度,同时仍然能够保证典型 T-S 模糊系统的通用逼近性.

## 参考文献(References)

- [1] Takagi T and Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control [J]. *IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1):116 - 132
- [2] Castro J L and Delgado M. Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators [J]. *IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics*, 1996, 26(1):149 - 152
- [3] Koeko B. Fuzzy system as universal approximators [A]. *IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems [C]*, San Diego, CA, 1992, 1153 - 1162
- [4] Wang L X. Fuzzy systems are universal approximators [A]. *IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems [C]*, San Diego, CA, 1992, 1163 - 1170
- [5] Wang L X and Mendel J M. Fuzzy basis functions, universal approx-

imation, and orthogonal least-square learning [J]. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1992, 3(5):807 - 814

- [6] Zeng X J and Singh M G. Approximation theory of fuzzy systems-MIMO case [J]. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 1995, 3(2):219 - 235
- [7] Castro J L. Fuzzy logic controllers are universal approximators [J]. *IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics*, 1995, 25(4):629 - 635
- [8] Abe S and Lan M S. Fuzzy rules extraction directly from numerical data for function approximation [J]. *IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics*, 1995, 25(1):119 - 129
- [9] Dickerson J A and Koeko B. Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules [J]. *IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics*, 1996, 26(4):542 - 560
- [10] Nguyen H T, Kreinovich V and Sirisaengsakorn O. Fuzzy control as a universal control tool [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 80(1):71 - 86
- [11] Buckley J J. Sugeno type controllers are universal controllers [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 53(3):299 - 303
- [12] Ying H. General takagi-sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models and filters [J]. *Journal of Information Sciences*, 1998, 108(1):91 - 107
- [13] Ying H. General SISO takagi-sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators [J]. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 1998, 6(4):582 - 587
- [14] Wang L X. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 93(3):223 - 230
- [15] Bronshtein I N and Semendyayev K A. *Handbook of mathematics [Z]*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985

## 本文作者简介

曹珂 1975 年生. 1996 年毕业于清华大学自动化系, 现为清华大学自动化系博士生. 研究兴趣为模糊控制, 模糊神经网络, 智能机器人.

张乃尧 1946 年生. 1970 年毕业于清华大学电机系, 现任清华大学自动化系教授. 研究兴趣为模糊控制, 模糊神经网络, 自适应控制, CIMS 应用等.

徐文立 1947 年生. 1970 年毕业于清华大学电机系, 1990 年在美国获博士学位. 现任清华大学自动化系教授, 博士生导师. 研究兴趣为智能控制, 计算机视觉, 运动控制等.