文章编号：1000-8152(2001)04-0473-05

非线性控制系统的输入-状态稳定性及有关问题*

范子彦 韩正之
(上海交通大学智能工程研究所·上海,200030)

摘要：输入-状态稳定性是80年代末对非线性控制系统提出的一个有用的概念，由于其具有广泛的应用背景，而得到普遍的重视．本文介绍进入90年代以来对这种稳定性以及由此派生出来的其他稳定性研究的主要成果，讨论了相关的镇定问题，同时给出作者的评注．

关键词：非线性控制系统；输入；状态；稳定性

文献标识码：A

Input-to-State Stability of Nonlinear Systems and Correlative Problems

FAN Ziyan and HAN Zhengzhi
(Institute of Intelligence Engineering, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, P.R.China)

Abstract: Input-to-state stability is a useful notion, which was proposed in the end of 1980's and has obtained prevalent recognition because of its comprehensive practical background. This paper introduces main development on the stability and other derivative stability, and discusses correlative stabilization problems. It also provides authors' comments to these conclusions and problems.

Key words: nonlinear systems; input; state; stability

1 引言(Introduction)

在控制系统的分析与设计中，稳定性无疑是系统的一个重要性质．常用的稳定性有系统的输入-输出的稳定性和Lyapunov稳定性．对于线性控制系统来说，这两种稳定性没有多大的区别，所以人们常常主要地研究系统的Lyapunov稳定性．但是对于非线性控制系统，它们之间差别就变得很大，尤其是考虑系统的全局性质的时候．在80年代末，Sontag[1]提出了非线性控制系统的输入-状态稳定性概念，并在以后的一段时间内对之进行了系统、深入的研究．他的工作受到许多同行的关注，从而成为非线性控制系统稳定性研究的一项重要内容．

简单地说，输入-状态稳定是指当输入是有界的时候，系统的状态也是有界的．这个要求与系统的有界输入-有界输出稳定性十分相象，因而这个概念的重要性和应用性是十分显然的．在提出这个概念的初期，研究主要地集中在寻找判别这种稳定性的条件，Lyapunov方法被引进到这种研究中．以后人们发现输入-状态稳定性与系统的其它重要性质有关，提出一系列新的稳定性概念，并且用于系统设计．

本文的安排如下：第2节给出输入-状态稳定(input-state stable，简称ISS)的定义和必要的记号；第3节介绍有关ISS概念研究的主要成果；第4节介绍ISS概念在系统镇定中的应用．

2 ISS的定义(Definition of ISS)

考虑一般非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x,u),\ y = h(x), \tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是状态变量，$u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是输入向量，$y(t)\in\mathbb{R}^p$ 是输出向量．映射 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 对变量 x 局部地满足Lipschitz条件，并且 $f(0,0)=0$．假定输入 u 是本性有界的可测函数，即 $u:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}^m$，且 $\|u\|_\infty = \operatorname{ess}\sup_{t\geqslant 0}|u(t)| < \infty$（其中 $|\cdot|$ 表示向量的Euclidean范数），用 $L^m_{\infty,e}$ 表示由这样的函数 u 构成的集合．对每一对 $(x_0,u)\in\mathbb{R}^n\times L^m_{\infty,e}$，用 $x(t,x_0,u)$ 表示系统(1)在 $x(0)=x_0$ 和输入 u 的作用下的解（在不会引起误解的前提下简记为 $x(t)$），用 $(0,T_{x_0,u})$ 表示该解存在的最大区间，其中 $T_{x_0,u}\leqslant\infty$．

函数 $\gamma:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 称为是 K 函数，如果它是连续、严格递增的且 $\gamma(0)=0$．特别地，如果它进一步满足 $\lim_{s\to\infty}\gamma(s)=\infty$，则函数 γ 称为 K_∞ 类函数，记 $\gamma(s)\in K_\infty$．函数 $\beta:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 称为是 KL 类函数，如果对于每个固定的 t，函数 $\beta(\cdot,t)$ 是 K 类的；而对于每个固定的 s，函数 $\beta(s,\cdot)$ 是严格递减的，并 $\lim_{t\to\infty}\beta(s,t)=0$．

定义1[1] 系统(1)称为是ISS，如果存在 $\beta\in KL$ 和 $\gamma\in K_\infty$，使得 $\forall t\geqslant 0$，$\forall x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $\forall u\in L^m_{\infty,e}$ 成立

$$|x(t,x_0,u)|\leqslant\beta(|x_0|,t)+\gamma(\|u_t\|), \tag{2}$$

* 基金项目：国家自然科学基金(69874025)资助项目．
收稿日期：1999-04-28；收修改稿日期：2000-03-02．

其中 u_t 是 u 在 t 时刻的截断函数.

粗略地说,ISS 系统具有这样的特征:不管系统的初始状态如何,只要输入量是小的,那么状态最终必然是小的.从式(2)可以看出 ISS 系统(1)具有这样一些性质:1) 系统是 GAS (globally asymptotic stable);2) 系统是 BIBS (bounded-input bounded-state stable);3) 系统是 CICS (converged-input converged-state stable).

3 ISS 概念的拓展(Development on the definition of ISS)

事实上,ISS 概念可以看作是 GAS 概念的自然推广.因为,如果系统(1)是 ISS,那么,当 $u\equiv 0$ 时,(2) 式就成为 $|x(t,x_0)|\leqslant\beta(|x_0|,t),\forall t\geqslant 0,\forall x_0\in\mathbb{R}^n$,这是与 GAS 等价的定义[2].既然 ISS 是 GAS 的自然推广,那么自然地想到用 Lyapunov 函数去研究 ISS.

定义 2[3] $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 称为是系统(1)的 ISS-Lyapunov 函数,如果它是 C^1 类的和是正定、径向无穷大的(也就是存在 $\alpha_1\in K_\infty$ 和 $\alpha_2\in K_\infty$ 使得 $\alpha_1(|x|)\leqslant V(x)\leqslant\alpha_2(|x|)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$),而且存在 $\alpha_3,\sigma\in K_\infty$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}^n,\forall u\in L^m_{\infty,e}$, $\nabla V(x)f(x,u)\leqslant-\alpha_3(|x|)+\sigma(|u|)$.

下面的定义在正实性和干扰抑制的研究中是基本的.

定义 3[3] $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 称为是系统(1)的储能函数,如果它是 C^0 类的和是正定、径向无穷大的,而且存在 $\alpha_3\in K_\infty$ 和 $\sigma\in K_\infty$ 使得沿(1)的解 $x(t)$ 成立耗散不等式

$$V(x(t))-V(x_0)\leqslant\int_0^t(\sigma(|u(s)|)-\alpha_3(|x(s)|))\mathrm{d}s,$$

$$\forall t\geqslant 0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}^n,\ \forall u\in L^m_{\infty,e}.$$

定义 4[3] 系统(1)称为是鲁棒稳定的,如果存在 $\rho\in K_\infty$,使得当 $|k(x,t)|\leqslant\rho(|x|)$ 时,闭环系统 $\dot{x}=f(x,k(x,t))$ 是 GAS

下面的定理 1 是 ISS 研究中的一项重要成果,其意义不仅在于给出了 ISS 的 Lyapunov 型条件,而且将 ISS 与非线性控制系统的设计问题联系起来了.

定理 1[3] 考虑系统(1),下列性质是等价的:

1) 系统是 ISS;2) 系统存在 ISS-Lyapunov 函数;3) 系统存在储能函数;4) 系统是鲁棒稳定的.

定理的证明要用到比较原理和如下陈述的逆 Lyapunov 定理[4]:假设系统(1)中的输入 $u(t)$ 在紧集 D 中取值,则系统关于集合 D 鲁棒全局渐近稳定等价于存在 $\alpha\in K_\infty$ 和正定、径向无穷的函数 V 使得 $\forall x\in\mathbb{R}^n,\forall u\in D$ 成立

$$\nabla V(x)f(x,u)\leqslant-\alpha(|x|).$$

下面简要地叙述一下 2)$\Rightarrow$1)的证明过程.首先集合

$$S=\{x\mid V(x)\leqslant\alpha_2\alpha_3^{-1}(2\sigma(\|u\|))\}$$

是系统轨迹 $x(t)$ 的不变集;其次设轨迹 $x(t)$ 在 t_1 时刻第一次进入集合 S,则

$$|x(t)|\leqslant\alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}(2\sigma(\|u\|)),$$

$\forall t\geqslant t_1$;然后不难看出 $x\notin S$ 意味着 $|x|\geqslant\alpha_3^{-1}(2\sigma(|u|))$,所以 $\dot{V}(x(t))\leqslant-\frac{1}{2}\alpha_3\alpha_2^{-1}(V(x(t))),\forall 0\leqslant t<t_1$.按比较原理[4]就有

$$V(x(t))\leqslant\bar{\beta}(V(x(t)),t).$$

这样就得到了(2)式,其中取 $\beta(s,t)=\alpha_1^{-1}\bar{\beta}(\alpha_2(s),t)$, $\gamma(s)=\alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_3^{-1}(2\sigma(s))$.

有关 ISS 的进一步结论,读者可以参考文[3,5~7].

在线性系统理论中,如果 u 是无界的,但 $\int_0^\infty|u(s)|^2\mathrm{d}s<\infty$,这时可以研究系统在 L^2 范数意义上的稳定性.出于同样的目的,文[8]提出了 IISS (integral ISS)概念

定义 5[8] 系统(1)称为是 IISS,如果存在 $\beta\in KL$ 和 $\alpha,\gamma\in K_\infty$,使得

$$\alpha(|x(t)|)\leqslant\beta(|x_0|,t)+\int_0^t\gamma(|u(s)|)\mathrm{d}s,$$

$$\forall t\geqslant 0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}^n,\ \forall u\in L^m_{\infty,e}.$$

定义 6[9] $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 称为是系统(1)的 IISS-Lyapunov 函数,如果它是 C^1 类的和是正定、径向无穷大的,而且存在 $\alpha_3\in$ K 和 $\sigma\in K_\infty$ 使得

$$\nabla V(x)f(x,u)\leqslant-\alpha_3(|x|)+\sigma(|u|),$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall u\in L^m_{\infty,e}.$$

定理 2[9] 系统(1)是 IISS 当且仅当系统(1)存在 IISS-Lyapunov 函数.

需要指出的是,IISS-Lyapunov 函数和 ISS-Lyapunov 函数的差别在于前者不要求 α_3 具有径向无穷大性质.$V(x)=x\arctan x$ 是系统 $\dot{x}=-\arctan x+u$ 的 IISS 函数,其中 $\alpha_3(r)=(\arctan r)^2$ 是 K 类函数,但因为该系统不是 ISS,所以 $V(x)$ 不可能是它的 ISS 函数.由该反例,结合定义 2、6 和定理 1、2 易知,如果系统是 ISS,则它也是 IISS 的,但反之并不成立.这一点也可以从上述例子看出.

定理 3[8] 如果系统(1)是 IISS 的,且输入 u 满足 $\int_0^t\gamma(|u(s)|)\mathrm{d}s<\infty$,则 $\forall x_0\in\mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,x_0,u)=0$.

关于 IISS 的其它结论,有兴趣的读者可以参考文[8~10].

IOSS(input/output to state stable)概念是 ISS 的另一个推广.

考虑带有输出的非线性系统

$$\dot{x}=f(x,u),\ y=h(x),\tag{3}$$

其中 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 是连续可微的,$h(0)=0$.并记 $y(t,x_0,u)=h(x(t,x_0,u))$.

定义 7[11] 系统(3)称为是 IOSS,如果存在 $\beta\in KL$ 和 $\gamma_1,\gamma_2\in K_\infty$,使得

$$|x(t,x_0,u)|\leqslant\max\{\beta(|x_0|,t),\gamma_1(\|u_t\|),\gamma_2(\|y(t,x_0,u)\|)\},$$

$$\forall t\geqslant 0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}^n,\ \forall u\in L^m_{\infty,e}.$$

IOSS 反映了从系统的外部信号来了解系统状态的能力.定义 7 意味着,对于 IOSS 系统,如果输入和输出都是有界的,那么状态也是有界的.

定义 8[11] $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 称为是系统(3)的 IOSS-Lyapunov 函数,如果它是 C^1 类的和是正定、径向无穷大的,而且存在 $\alpha_3,\sigma_1,\sigma_2\in K_\infty$ 使得 $\forall x\in\mathbb{R}^n,\forall u\in L^m_{\infty,e}$ 成立

$$\nabla V(x)f(x,u)\leqslant-\alpha_3(|x|)+\sigma_1(|u|)+\sigma_2(|y(t,x_0,u)|).\tag{4}$$

应用比较原理，容易证明如果系统(3)存在IOSS-Lyapunov函数，那末它是IOSS. 但其必要性至今还是悬案. 文[11]猜测，必要性也是成立的，但它没能给出证明.

不难看出IOSS系统总是零状态可检测的(zero-detectable). 对比线性系统中的结论：系统同时具有状态反馈可镇定性和零状态可检测性等价于系统是可以通过动态输出反馈镇定的，Sontag[12]证明了对于解析的映射 f，如果系统(3)是IOSS和状态反馈可镇定的，那么该系统是可以通过动态输出反馈镇定的. 由此可看出IOSS在输出反馈镇定问题中是有应用前景的.

除以上介绍的稳定性概念外，还提出了IOS[13](input to output stable)概念——输出以"渐近稳定"方式依赖于输入且同时状态保持有界、OSS[11](output to state stable)概念——不管初始状态如何，只要输出是小的，那么状态最终必然是小的(ISS的对偶概念)、IIOSS[9](integral IOSS)和IIOS[9](integral IOS)——都类似于IISS和ISS的关系.

4 ISS和系统的可镇定性(ISS and stabilization of systems)

ISS概念在系统镇定的研究中有许多重要的应用，本节分四个部分给予介绍.

4.1 仿射系统的镇定(Stabilization of affine systems)

考虑对于输入是仿射的非线性系统：

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \tag{5}$$

其中 f 和 g_i 是光滑映射，且 $f(0) = 0$.

定理 4[1] 如果(5)是GAS，那么存在光滑的控制律 $u = k(x) + v$ 使系统是ISS的(关于输入 v)，特别可以取

$$k(x) = -\frac{a(x)}{2m}(b_1(x), b_2(x), \cdots, b_m(x))^{\mathrm{T}},$$

其中 $a(x) = -\nabla V(x)f(x)$，$b_i(x) = \nabla V(x)g_i(x)$，$V$ 是系统 $\dot{x} = f(x)$ 的光滑Lyapunov函数.

定理中的 V，其存在性是由逆Lyapunov定理保证的，该定理的成立是容易验证的. 事实上定理中的 V 就是所需要的ISS-Lyapunov函数.

定理4陈述了这样一个事实：可全局镇定的系统(5)，一定是关于 v 可ISS-镇定的、其中 v 可视为执行机构干扰. 一个相关的问题是，可全局镇定的系统(5)，是否一定存在映射 k，使系统是关于测量干扰 v ISS的，其中 $u = k(x + v)$. 对此，Freeman[14]构造了一个反例.

考虑带有扰动的仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + G_1(x)d + G_2(x)u, \tag{6}$$

其中 f 和 G_i 是光滑映射，$f(0) = 0$.

定义 9[15] V 称为是系统(6)的输入-状态稳定的控制Lyapunov函数(ISS-CLF)，如果 $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是 C^1 类的和是正定、径向无穷大的，而且存在 $\sigma \in K_\infty$，使得对于 $\forall x \neq 0, \forall d \in \mathbb{R}^l$，只要 $|x| \geq \sigma(|d|)$，就成立

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m}\{L_f V(x) + L_{G_1}V(x)d + L_{G_2}V(x)u\} < 0.$$

ISS-CLF是控制Lyapunov函数(CLF)的推广. CLF概念，可能最早源于Artstein的论文[16]，近来有较高的出现频率. 基于系统的CLF，文[17]构造了一个除 $x = 0$ 外连续的镇定控制律. 类似地，基于系统的ISS-CLF，Krstic[15]建立了如下定理，并做了逆优化研究，找到了控制所对应的价值函数.

定理 5[15] 如果 V 是系统(6)的ISS-CLF，那么控制律

$$u = \begin{cases} -\dfrac{\omega(x) + \sqrt{\omega(x)^2 + ((L_{G_2}V(x))(L_{G_2}V(x))^{\mathrm{T}})^2}}{2(L_{G_2}V(x))(L_{G_2}V(x))^{\mathrm{T}}} \times \\ (L_{G_2}V(x))^{\mathrm{T}}, \ (L_{G_2}V(x))^{\mathrm{T}} \neq 0, \\ 0, \qquad (L_{g_2}V(x))^{\mathrm{T}} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

使系统关于干扰 d 是ISS，其中 $\omega(x) = L_f V(x) + |L_{G_1}V(x)|\sigma^{-1}(|x|)$.

(7)式给出的控制，除 $x = 0$ 外是连续的，通常称这样的控制为松驰控制. 为了保证 $x = 0$ 处，u 也是连续的，需要附加假设 V 具有如文[17]定义的小控制性质.

下面的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \varphi_i(x_1, \cdots, x_i)^{\mathrm{T}}d, & i = 1, \cdots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + \varphi_n(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}d, \end{cases} \tag{8}$$

被称为具有严格反馈结构(strict feedback structure)，其中 d 可以是已知的向量，也可以是定常的或时变的不确定参数. 控制目标是将 x_1 调节到零值.

Kokotovic[18]提出的反传(backstepping)方法特别适合解决此类问题. 可以从ISS的角度对反传思想进行解释：串联系统 $\dot{x} = f(x, z)$，$\dot{z} = g(z, u)$，如果 $z = k(x) + v$ 使 x-子系统关于 v 是ISS，则使 $z \to k(x)$ 的 u 就会把 x 驱到零值. 取决于系统(8)的特殊结构，文[19]用反传方法对该类系统进行了广泛而深入的研究，开发出2个设计途径，一个是直接用反传方法完成设计，另一个是用反传方法递推出CLF或ISS-CLF后，再基于CLF或ISS-CLF完成设计. 通常可以得到关于参考输入鲁棒的控制，在镇定问题中就是使对象是ISS的控制；另外，不要求对象的非线性满足增长性限制，在这一点上超越了以前的设计方法. Krstic[20,21]在后一种设计途径中，实现了控制器和参数更新律的分离设计，这在非线性系统的自适应控制中通常是做不到的. 针对另一种特殊结构的系统，严格前馈结构(strict feed-forward structure)，文[22]提出了积分器前传(integrator forwarding)方法，并利用这种方法得到了ISS状态反馈律，并做了逆优化研究. 文[10]还提出了I-ISS-CLF的概念，其作用与ISS-CLF相似.

4.2 一般非线性系统的镇定(Stabilization of common systems)

同定理4类似，对非线性系统(1)，Sontag给出了下面的定理.

定理 6[23] 如果系统(1)是GAS，那么可以找到形如 $u = \Gamma(x)v$ 的控制律，使系统是ISS(关于输入 v)，而且 $\Gamma(x)$ 是处处可逆的方阵且每个元素都是光滑函数.

文[23]在证明过程中给出了由式(1)的Lyapunov函数 V 构造 $\Gamma(x)$ 的方法，具体从略. 与此类似地，对含有参数 μ 的系统——$\dot{x} = f(x, u, \mu)$，其中 $f(0,0,\mu) = 0$，有下述定理：

定理 7[24] 如果对全体 $\mu \in \mathbb{R}^l$ 系统都是 GAS,那么对 $\mathbb{R}^l$ 的任一紧子集 Ω,可以找到形如 $u = \Gamma(x)v$ 的控制,使对 $\forall \mu \in \Omega$ 系统是 ISS(关于输入 v),而且 $\Gamma(x)$ 是处处可逆的方阵且每个元素都是光滑函数.

4.3 关联系统的镇定(Stabilization of interconnected systems)

众所周知,在串联系统 $\dot{x} = f(x,z)$,$\dot{z} = g(z,u)$ 中,视 z,u 分别 x- 子系统和 z- 子系统的输入,即使这两个子系统都是 GAS,仍不足以保证复合系统是 GAS.但依据 ISS 术语,明显存在下面的性质:

定理 8[5] 如果 x、z 子系统分别是 ISS 和 GAS,那么复合系统是 GAS;如果 z 子系统进一步是 ISS,则复合系统也是 ISS.

结合定理 8 和定理 7,就可以得到使串联系统 $x = f(x,z)$,$\dot{z} = u$(其中 x 子系统是 GAS)全局镇定的状态反馈[25]

相对于线性系统的常数稳态增益,在非线性控制系统中可以称式(2)中的 γ 为系统(1)的增益函数.

定理 9[26,5] 考虑关联系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,z,u), \\ \dot{z} = g(z,x,v), \end{cases}$$

其中 u、v 是复合系统的输入.假设:1) x- 子系统和 z- 子系统都是 ISS(分别以 (z,u) 和 (x,v) 为输入),并记它们的增益函数分别为 γ_1,γ_2; 2) 存在 $\rho \in K_\infty$ 使得 $(\gamma_1+\rho)\circ(\gamma_2+\rho)(r) \leqslant r$, $\forall r \geqslant 0$. 则复合系统是 ISS.

Jiang 以该定理为工具,研究了系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,z) + u, \\ \dot{z} = g(x,z) \end{cases} \tag{9}$$

的镇定问题,其中 $u \in \mathbb{R}$, x 是可以测量的状态,z 是不能测量的状态,f 和 g 是光滑函数.

定理 10[26] 考虑系统(9).如果子系统

$$z = g(x,z)$$

以 x 为输入是 ISS,且 $f(0,0) = 0$,$(\partial g/\partial z)(0,0)$ 的特征根均具负实部,则存在 $u = k(x)$ 使系统(9)是 GAS.

文献[27]将该结论推广到具有不确定因素的对象.除 ISS 概念外,Teel 和 Coron 等[28,29]曾经定义渐近 L_∞ 稳定(后来 Sontag[7]证明了该定义和 ISS 的定义之间的等价关系),并用于研究系统的饱和控制,取得了一些成果,本文从略.

4.4 使用状态观测器的镇定(Stabilization with state observers)

为了探索控制律设计和状态观察器设计的可分离性,Vidyasagar 建立了检测器的定义,它是一种强观察器.

定义 10[30] $z = g(z,u,y)$ 称为是系统(1)的检测器,如果存在 C^1 类的、正定且径向无穷大的标量值函数 $W(x,z)$ 和 $\alpha \in K_\infty$,使

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(x,u) + \frac{\partial W}{\partial z} g(z,u,h(x)) \leqslant -\alpha(|x - z|),$$

$$\forall (x,z), \forall u.$$

定理 11[31] 假设: 1) $u = k(x)$ 使系统(1)是 GAS,且 $x = f(x,k(x+v))$ 满足弱 ISS 条件; 2) $z = g(z,u,y)$ 是系统的一个检测器,则动态输出反馈 $\dot{z} = g(z,u,y)$, $u = k(z)$ 使闭环系统是 GAS.

定理中,所谓 $x = f(x,k(x+v))$ 满足弱 ISS 条件,就是存在正定、径向无穷大的 C^1 类映射 V,具有性质

① $\nabla V(x) f(x,k(x)) < 0, \forall x \neq 0$;

② $\exists \alpha \in K, \sigma > 0, \xi > 0$,使

$$|x| \geqslant \xi, |u| \leqslant \sigma \Rightarrow \nabla V(x) f(x,k(x)) \leqslant -\alpha(|x|).$$

文[32]也是用检测器和 ISS 工具研究输出反馈的论文.联系 ISS 和镇定性的文献还有[33~43],就不一一评述了

5 结束语(Conclusion)

应当指出的是,ISS 的许多成果是基于 Lyapunov 函数的,应用时首先要做的往往就是寻找一个 GAS/ISS-Lyapunov 函数,但是目前仍没有构造 Lyapunov 函数的一般方法.这一点有些损害 ISS 概念的实用性.但正如实践所表明的,它确实为非线性系统的控制设计及鲁棒性研究提供了一种思考方法和研究途径.

本文介绍了 ISS 的主要概念及其应用.限于篇幅,对一些结论,如奇异摄动系统的 ISS 性质[44],随机系统 ISS 概念[45],以及近来关于严格反馈结构随机系统的研究结论[46]等,都没有予以介绍.

参考文献(References)

[1] Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(4): 435 – 443

[2] Hahn W. Stability of Motion [M]. New York: Springer-Verlag, 1967

[3] Sontag E D and Wang Y. Notions equivalent to input-to-state stability [A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control [C], Lake Buena Vista, USA, 1994, 3438 – 3443

[4] Lin Y D, Sontag E D and Wang Y. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1996, 34(1): 124 – 160

[5] Sontag E D. On the input-to-state stability property [J]. European Journal of Control, 1995, 1(1): 24 – 36

[6] Sontag E D and Wang Y. On characterizations of input-to-state stability [J]. Systems & Control Letters, 1995, 24(5): 351 – 359

[7] Sontage E D and Wang Y. New characterizations of input-to-state stability [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1996, 41(9): 1283 – 1293

[8] Sontag E D. Comments on integral variants of ISS [J]. Systems & Control Letters, 1998, 34(2), 93 – 100

[9] Angeli D, Sontag E D and Wang Y. A remark on integral input to state stability [A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control [C], Tampa, USA, 1998, 2491 – 2496

[10] Liberzon D, Sontag E D and Wang Y. On integral-input-to-state stabilization [A]. In: Proceedings of the American Control Conference [C], San Diego, USA, 1999, 1598 – 1602

[11] Sontag E D and Wang Y. Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems [J]. Systems & Control Letters, 1997, 29(5): 279 – 290

[12] Sontag E D and Wang Y. Detectability of nonlinear systems [A]. In: Proceedings of the Conference on Information Sciences and Sys-

tems [C], Princeton, USA, 1996, 1031 - 1036

[13] Sontag E D and Wang Y. A notion of input to output stability [A]. In: Proceedings of the European Control Conference [C], Brussels, Belgium, 1997

[14] Freeman R A. Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, 40(12):2119 - 2122

[15] Krstic M and Li Z H. Inverese optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1998, 43(3):336 - 350

[16] Artstein Z. Stabilization with relaxed controls [J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1983, 7(11):1163 - 1173

[17] Sontag E D. A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization [J]. Systems & Control Letters, 1989, 13(2):117 - 123

[18] Kokotovic P V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive [J]. Control Systems Magazine, 1992, 6(1):7 - 17

[19] Krstic M, Kanellakopoulos I and Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design [M]. New York: Wiley, 1995

[20] Krstic M and Kokotovic P V. Adaptive nonlinear design with controllers-identifier separation and swapping [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995,40(3):426 - 440

[21] Krstic M and Kokotovic P V. Modular approach to adaptive nonlinear stabilization [J]. Automatica, 1996, 32(4):625 - 629

[22] Sepulchre R and Kokotovic P V. Integrator forwarding: a new recursive nonlinear robust design [J]. Automatica, 1997, 33(5):979 - 984

[23] Sontag E D. Further facts about input to state stabilization [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1990,35(4):473 - 446

[24] Lin Y D, Sontag E D and Wang Y. Lyapunov-function characterizations of stability and stabilization for parameterized families of systems [A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control [C], San Antonio, USA, 1993, 1978 - 1983

[25] Sontag E D. Remarks on stabilization and input-to-state stability [A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control [C], Tampa, 1989, 1376 - 1378

[26] Jiang Z P, Teel A R and Praly L. Small-gain theorem for ISS systems and application [J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1994, 7(2):95 - 120

[27] Jiang Z P and Mareels I M Y. A small-gain control method for nonlinear cascaded systems with dynamic uncertainties [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1997, 42(3):292 - 308

[28] Teel A R. A nonlinear small gain theorem for the analysis of the control systems with saturation [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1996, 41(9):1256 - 1270

[29] Coron J M, Praly L and Teel A R. Feedback stabilization of nonlinear systems: sufficient conditions and Lyapunov and input-to-output techniques [A]. In: Isidori A. Trend in Control [M]. New York: Springer-Verlag, 1995

[30] Vidyasagar M. On the stabilization of nonlinear systems using state detection [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1980, 25(3):504 - 509

[31] Tsinias J. Sontag's input to state stability condition and the global stabilization using detection [J]. Systems & Control Letters, 1993, 20(40):219 - 226

[32] Pan D J, Han Z Z and Zhang Z J. Bounded-input bounded-output stabilization of nonlinear systems using state detectors [J]. Systems & Control Letters, 1993, 21(3):189 - 198

[33] Kazakos D and Tsinias J. The input to state stability condition and global stabilization of discrete-time systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, 39(10):2111 - 2118

[34] Nesic D and Songtag E D. Input-to-state stabilization of linear systems with positive outputs [J]. Systems & Control Letters, 1998, 35(4):245 - 255

[35] Praly L and Jiang Z P. Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics [J]. Systems & Control Letters, 1993, 21(1):19 - 33

[36] Seron M M and Hill D J. Input-output and input-to-state stabilization of cascaded nonlinear systems [A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control [C], New Orleans, 1995, 3438 - 3443

[37] Sontag E D and Teel A. Changing supply functions in input/state stable systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, 40(8):1476 - 1478

[38] Tsinias J. Versions of Sontag's input to state stability condition and the global stabilizability problem [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1993, 31(4):928 - 941

[39] Tsinias J. Input to state stability properties of nonlinear systems and applications to bounded feedback stabilization using saturation [J]. European Series in Applied and Industrial Mathematics: Control, Optimization and Calculus of Variations, 1997, 2:57 - 85

[40] Praly L and Wang Y. Stabilization in spite of matched unmodelled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability [J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1996, 9(1):1 - 33

[41] Freeman R A and Kokotovic P V. Inverse optimality in robust stabilization [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1996, 34(4):1365 - 1391

[42] Jiang Z P, Mareels I M Y and Wang Y. A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for Interconnected ISS systems [J]. Automatica, 1996, 32(8): 1211 - 1215

[43] Kanellakopoulos I. Robustification tools for nonlinear control design [A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control [C], Lake Buena Vista, 1994, 3464 - 3468

[44] Christofides P D and Teel A R. Singular perturbations and input-to-state stability [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1996, 41(11):1645 - 1650

[45] Tsinias J. Stochastic input-to-state stability and applications to global feedback stabilization [J]. International Journal of Control, 1998, 7(5):907 - 930

[46] Pan Z and Basar T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1999,37(3):957 - 995

本文作者简介

范子彦　1973 年生,2000 年在上海交通大学获工学博士学位,现为上海量子光电科技有限公司工程师,从事红绿灯自适应联动控制的理论和工程研究.

韩正之　见本刊 2001 年第 2 期第 259 页.