文章编号：1000-8152(2001)04-0487-06

# 交互式多模型算法性能分析*

梁 彦 程咏梅 贾宇岗 潘 泉
（清华大学自动化系·北京，100084） （西北工业大学自动控制系·西安，710072）

**摘要**：广泛应用于目标跟踪和故障诊断的动态多模型估计(SMME)假设模式的切换服从马尔可夫过程.对马尔可夫切换概率(MTP)的非 Monte Carlo 分析有助于深入了解 SMME 的机理，发现参数寻优的法则，设计或发展新的自适应多模型估计器.然而由于 SMME 的复杂性，非 Monte Carlo 分析很难给出.本文针对 SMM 中著名的交互式多模型(IMM)估计器，通过将 IMM 看作是输入交互和子滤波器串联，分析了具有 $m$ 个参数的 MTP 矩阵，给出了六条不依赖于应用环境及子滤波器设计的结论.部分结果也适用于一阶广义伪贝叶斯算法(GPB1).

**关键词**：交互式多模型算法；目标跟踪；自适应滤波
**文献标识码**：A

# Analysis on the Performance and Properties of Interacting Multiple Models Algorithm

LIANG Yan
(Department of Automatic Control, Tsinghua University · Beijing, 100084, P.R.China)
CHENG Yongmei, JIA Yugang and PAN Quan
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnic University · Xi'an, 710072, P R.China)

**Abstract**: There is less nonsimulation analysis of markov transition probability (MTP) of switching multiple model estimation (SMME), which may be helpful to provide good insight into the essence of SMME, supply some rules for parameter design and develop more adaptive multiple model estimators. This paper presents a nonsimulation method to analysis MTP matrix with $m$ prameters ( $m$ is the model number) of interacting multiple model (IMM) estimator, which is well known in SMM. Several conclusions, independent of scenarios and model-conditional filters, are given. Part of the analysis is also suitable for one-order gereralized pseudo-Bayesian (GPB1).

**Key words**: IMM; tracking; adaptive filtering

## 1 引言(Introduction)

对于结构未知或结构可随机突变系统，目前很难用摄动法或时变参数加以近似建模.因为在估计系统状态时，需要同时辨识系统在该时刻的运动模式(或系统的结构)以便建立有效的滤波模型.而当系统的运动模式不确知或随机突变时，许多常规算法因对系统的运动模式辨识上的延迟与误报，而使估计发生严重偏差，而估计的严重偏差又使对系统的运动模式的辨识出现更大的误报.从而严重影响滤波的精度和滤波的稳定.这就是所谓的混合估计问题[1~14].其中离散时间随机混合系统常表示为：

$$x(k+1)=f(k,x(k),m(k+1))+g(k,m(k+1),q(k,m(k+1))), \tag{1.1}$$

$$z(k)=h(k,x(k),m(k))+v(k,m(k)). \tag{1.2}$$

其中：$x(k)$ 是 $k$ 时刻的 $n$ 维系统状态矢量；$z(k)$ 是 $k$ 时刻的 $m$ 维系统量测矢量；$m(k+1)$ 表示在 $[k,k+1]$ 滤波周期内，系统所处的运动模式；$v(k,m(k))$ 和 $q(k,m(k+1))$ 分别是依赖于 $m(k+1)$ 的 Gaussian 型量测噪声矢量和模型噪声矢量.

混合估计问题最初来源于机动目标跟踪[1~10,15,16].目前混合估计除了在机动目标跟踪问题中被广泛研究外，也在其它问题中开始应用，如：在线故障诊断[11,17]，在线噪声辨识[12]，非线性随机系统的分段线性化滤波[13]等.

对混合估计的研究目前以多模型估计为主流.

* 基金项目：国家自然科学基金(69772031)资助项目.
收稿日期：1999-09-06；收修改稿日期：2000-04-05.

多模型估计的基本思想是:将参数空间(或系统的运动模式)映射为模型集,而基于每个模型的滤波器并行地工作,系统的状态估计则是各模型滤波器所做估计的数据融合.目前的融合是基于贝叶斯推理的.与单模型自适应滤波器相比,多模型估计具有以下优点:1)由于对参数空间采用了多模型描述,因而可通过恰当地扩充模型来细化建模;2)在滤波过程中,通过模型概率的变动实现自适应的变结构.另外通过实时地增减或变更模型,可增强自适应的结构能力;3)在满足先验假设的条件下,是在均方误差意义下的最优估计.从而我们可以集中精力研究假设的合理性,寻找更合理的假设;4)算法具有明显的并行结构,便于有效地并行实现.

在多模型估计算法中,以IMM较为优越[1~10].IMM假设模型之间的转移服从马尔可夫过程.与其它多模型估计算法相比,IMM比一阶广义伪贝叶斯方法(GPB1)自适应能力强;在估计精度相当的情况下,IMM的计算量仅为二阶广义伪贝叶斯方法(GPB2)的 $m$ 分之一($m$ 为模型数);它避免了全假设树滤波(FIH)的计算量随时间无限增长的问题.

从有效信息量的角度看,混合系统的高精度估计需要"更多地"、"恰当地"引入建模信息.多模型相对于单模型当然有更为丰富细致的建模信息;与单模型滤波不同的是:对于多模型滤波器,过去信息不仅存在于估计中,而且存在于模型概率中.而当系统模式发生切换时,过去量测所反映的模型匹配信息与当前实际相反.因而"恰当地"引入建模信息意味着对过去信息的利用要有自适应性.在无模式切换时较多地利用过去信息以平滑噪声,提高系统的滤波精度,而在模式切换时较多地遗忘过去信息以提高系统的响应.

然而由于算法的随机变结构性使得对IMM参数的理论分析非常困难.分析基本上采用Monte Carol仿真.因为具体模型的选择与应用对象相关,所以Monte Carol仿真结果因具体的模型选择的不同,被估计系统的不同而有所差异,从而使仿真很难定量分析IMM参数,缺乏对参数物理意义的普适性研究.

从后面所列的IMM算法可知,IMM给出的是滤波框架,而由模式空间向模型空间的映射不唯一.IMM假设模型间的转移服从马尔可夫过程.这是IMM算法的核心.为了研究IMM滤波框架的特征,我们更多关注的是马尔可夫参数,而不是具体模型的选择.因为已往对IMM的理论分析(条件均值展开法)由于考虑具体模型的选择,而不得不考虑随机突变的应用对象,而走回Monte Carlo仿真的思路[14].

本文首先研究了马尔可夫参数对模型概率的影响,发现马尔可夫参数对模型概率有双边限幅作用,而且在每一滤波周期内,历史量测信息对当前模型相对匹配程度的贡献被向先验的贡献 $\alpha_i/\alpha_j$ 方向修正.其次研究了马尔可夫参数对模型估计的影响,给出了马尔可夫参数对模型估计影响的五条定性的结论,以及利用马尔可夫参数改善模型估计精度的条件.

本文的第二节列出IMM算法;第三节马尔可夫参数对模型概率的影响.第四节研究马尔可夫参数对模型估计精度的影响.

## 2 IMM算法(Interacting multiple models algorithm)

**假设1** 描述系统运动模式的模型间的转移服从状态有限、时间离散的时齐马尔可夫链,其马尔可夫转移概率为:

$$P\{m_j(k+1)\mid m_i(k)\}=\pi_{ij},\tag{2.1}$$

其中:$m_i(k)$ 表示 $m(k)=i$,即在 $[k-1,k]$ 滤波周期内,$i$ 模型与系统运动模式匹配.在无先验信息的情况下

$$\pi_{ij}=\begin{cases}\alpha, & i\neq j,\\ 1-\sum_l\alpha_l+\alpha_j, & i=j,\end{cases}\quad 0\leqslant\pi_{ij}\leqslant 1,\tag{2.2}$$

即式(2.2)的矩阵形式为

$$[\pi_{ij}]=\begin{bmatrix}1-\sum_l\alpha_l+\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1\\ \alpha_2 & 1-\sum_l\alpha_l+\alpha_2 & \cdots & \alpha_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_m & \alpha_m & \cdots & 1-\sum_l\alpha_l+\alpha_m\end{bmatrix}.\tag{2.3}$$

**定义** $Z^k\triangleq\{z(1)z(2)\cdots z(k)\}$ 表示系统的量测集,$\hat{x}_i(k\mid k)\triangleq E[x(k)\mid m_i(k),Z^k]$ 表示第 $i$ 模型在 $k$ 时刻的滤波估计,$P_i(k\mid k)\triangleq E\{[\hat{x}_i(k\mid k)-x(k)]\cdot[\cdot]^{\mathrm T}\mid m_i(k),Z^k\}$ 表示第 $i$ 模型在 $k$ 时刻的滤波估计的协方差,$u_i(k)\triangleq P\{m_i(k)\mid Z^k\}$ 表示第 $i$ 模型在 $k$ 时刻的模型概率.

**假设2** 模型的选择符合独立与完备性的条件,即有:

$$\sum_{i=1}^{m} P\{m_i(k) \mid Z^k\} = 1, \tag{2.4}$$

$$P\{m_i(k), m_j(k) \mid Z^k, i \neq j\} = 0, \tag{2.5}$$

这是贝叶斯推理的要求.

**假设 3** 各模型的条件估计均无偏,即:

$$E[\hat{x}_i(k \mid k) \mid m_i(k), Z^k] = x(k). \tag{2.6}$$

采用贝叶斯推理,IMM算法计算公式分如下4步:

1) 输入交互.

对于第 $j$ 个模型,有:

$$\hat{x}_j^0(k \mid k) \triangleq E[x(k) \mid m_j(k+1), Z^k] = \sum_{i=1}^{m} u_{i|j}(k) \cdot \hat{x}_i(k \mid k), \tag{2.7}$$

$$u_{i|j}(k) \triangleq P\{m_i(k) \mid m_j(k+1), Z^k\} = \frac{1}{c_j(k)} \cdot \pi_{ij} \cdot u_i(k), \tag{2.8}$$

$$P_j^0(k \mid k) \triangleq E\{[\hat{x}_j(k \mid k) - x(k)] \cdot [\cdot]^{\mathrm{T}} \mid m_j(k+1), Z^k\} = \sum_{i=1}^{m} u_{i|j}(k) \cdot \{P_i(k \mid k) + [\hat{x}_i(k \mid k) - \hat{x}_j^0(k \mid k)][\cdot]^{\mathrm{T}}\}, \tag{2.9}$$

$$u_j^0(k) \triangleq P\{m_j(k+1) \mid Z^k\} = \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} \cdot u_i(k). \tag{2.10}$$

其中: $c_j(k) = \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} \cdot u_i(k)$.

我们可以从上看到基于模型的估计与其计算方差之间存在着耦合关系.耦合的大小取决于马尔可夫转移概率及模型概率.而模型概率是随机化的.

2) 滤波计算.

对于第 $j$ 个模型,将 $\hat{x}_j^0(k \mid k)$, $P_j^0(k \mid k)$ 代入基于第 $j$ 个模型的滤波器(滤波器可以选用卡尔曼滤波器,常增益滤波器或其他的滤波器),从而获得的状态估计 $\hat{x}_j(k+1 \mid k+1)$,估计的协方差 $P_j(k+1 \mid k+1)$,残差 $v_j(k+1)$,残差的协方差 $S_j(k+1)$.

3) 模型概率更新.

对于第 $j$ 个模型,其似然函数为:

$$\Lambda_j(k+1) \triangleq P\{z(k+1) \mid m_j(k+1), Z^k\} = N[v_j(k+1):0, S_j(k+1)]. \tag{2.11}$$

式中 $N[*]$ 为正态分布密度函数.

模型更新方程为:

$$u_j(k+1) = P\{m_j(k+1) \mid Z^{k+1}\} = \frac{1}{c(k+1)} \cdot \Lambda_j(k+1) \cdot u_j^0(k). \tag{2.12}$$

其中: $c(k+1) = \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j(k+1) \cdot u_j^0(k)$.

4) 输出交互.

$$\hat{x}(k+1 \mid k+1) = E[x(k+1) \mid Z^{k+1}] = \sum_{j=1}^{m} \hat{x}_j(k+1 \mid k+1) \cdot u_j(k+1), \tag{2.13}$$

$$P(k+1 \mid k+1) = \sum_{j=1}^{m} \{P_j(k+1 \mid k+1) + [\hat{x}_j(k+1 \mid k+1) - \hat{x}(k+1 \mid k+1)] \cdot [\cdot]^{\mathrm{T}}\} \cdot u_j(k+1). \tag{2.14}$$

假设1是先验建模信息.在输入交互中,信息数据(模型概率,基于模型的估计及其协方差)被重组.因而输入交互可以被看作是特殊的滤波器.马尔可夫转移概率是其滤波参数.IMM是该滤波器与基于模型的滤波器的级联.本文正是研究输入交互这一特殊滤波器的特性.

## 3 马尔可夫参数对模型概率的影响(Effect of Markov parameters on model probalities)

在多模型算法中,量测信息不仅存在于各模型的估计中,而且存在于各模型的概率中.一方面,由于模型概率决定了各模型估计在滤波输出估计中的权值,从而对输出估计的精度产生很大影响.另一方面,对于任一模型估计 $\hat{x}(k+1 \mid k+1)$,其精度不仅取决于模型的建模精度,而且取决与输入交互后的估计 $\hat{x}_j^0(k \mid k)$.而输入交互作用的大小取决于马尔可夫转移概率.因此本节研究马尔可夫参数对模型概率的影响.

$$u_j^0(k) = \sum_i \pi_{ij} \cdot u_i(k) = \left(1 - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l + \alpha_j\right) \cdot u_j(k) + \alpha_j \cdot [1 - u_j(k)] = \left(1 - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l\right) \cdot u_j(k) + \alpha_j. \tag{3.1}$$

由式(3.1)得:输入交互后的模型概率 $u_j^0(k)$ 区间为:

$$\text{如果} \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \leqslant 1, \text{则 } u_j^0(k) \in \left(\alpha_j, 1 - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l + \alpha_j\right), \tag{3.2}$$

$$\text{如果} \sum_{l=1}^{m} \alpha_l > 1, \text{则 } u_j^0(k) \in (0, \alpha_j). \tag{3.3}$$

可见输入交互后的模型概率被双边限幅,这表明输入交互在模型概率方面限定了过去信息的最大,最小作用.

由于系统具有的惯性,马尔可夫概率转移矩阵

在实际应用中的取值一般主对角线占优.当马尔可夫概率转移矩阵为主对角线占优时,有

$$\pi_{jj} \geqslant \pi_{ji}, \ \forall\, i,\, j = 1,\cdots,m. \tag{3.4}$$

由式(2.2)及式(3.4)有

$$1 - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l + \alpha_j \geqslant \max_i |\alpha_i|, \ \forall\, j = 1,\cdots,m. \tag{3.5}$$

从而有
$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_l \leqslant 1. \tag{3.6}$$

由式(3.2)及式(3.4)~(3.6)可知:当马尔可夫概率转移矩阵为主对角线占优时,输入交互后的模型概率上限为马尔可夫概率转移矩阵的主对角线元素,其下限为马尔可夫概率转移矩阵的非主对角线元素.

由式(2.10)可得

$$\frac{u_i^0(k)}{u_j^0(k)} = \frac{(1 - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_i(k) + \alpha_i}{(1 - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_j(k) + \alpha_j}, \tag{3.7}$$

$$\frac{u_i^0(k)}{u_j^0(k)} \in \left[\min\left\{\frac{u_i(k)}{u_j(k)}, \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right\}, \max\left\{\frac{u_i(k)}{u_j(k)}, \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right\}\right]. \tag{3.8}$$

由式(2.12)知:

$$\frac{u_i(k+1)}{u_j(k+1)} = \frac{u_i^0(k)}{u_j^0(k)} \cdot \frac{\Lambda_i(k+1)}{\Lambda_j(k+1)}. \tag{3.9}$$

其中 $\frac{u_i^0(k)}{u_j^0(k)}$ 代表 $k$ 时刻以前的历史量测信息对 $k+1$ 时刻的模型相对匹配程度的贡献;$\frac{\Lambda_i(k+1)}{\Lambda_j(k+1)}$ 代表当前量测信息对模型相对匹配程度的贡献.式(3.8)表明:由于马尔可夫概率转移的引入,在每一滤波周期内,历史量测信息对当前模型相对匹配程度的贡献被向先验的贡献 $\alpha_i/\alpha_j$ 方向修正.

## 4 马尔可夫参数对状态估计的影响(Effect of Markov parameters on model-conditional estimations)

匹配模型是指估计精度最高的模型.一般来说,匹配模型的概率最大.但模型概率因受过去信息影响而有一定的滞后性,因而在模型切换时二者并不总是一致.

设第 $i$ 个模型为 $[k-1,k]$ 滤波周期的匹配模型,由于匹配模型的估计在 IMM 中最优.因此我们沿匹配模型的估计 $\hat{x}_i(k\mid k)$ 展开研究输入交互状态的偏差特性.

$$\Delta\hat{x}_i^0(k\mid k) \triangleq \hat{x}_i^0(k\mid k) - \hat{x}_i(k\mid k), \tag{4.1}$$

$$\Delta\hat{x}_j^0(k\mid k) \triangleq \hat{x}_j^0(k\mid k) - \hat{x}_i(k\mid k), \tag{4.2}$$

$$\Delta\hat{x}(k\mid k) \triangleq \hat{x}(k\mid k) - \hat{x}_i(k\mid k), \tag{4.3}$$

$$\Delta\hat{x}_j(k\mid k) \triangleq \hat{x}_j(k\mid k) - \hat{x}_i(k\mid k). \tag{4.4}$$

定义匹配模型的 $k$ 时刻输入交互误差压缩比为:

$$\delta(k) \triangleq \frac{\|\Delta\hat{x}_i^0(k\mid k)\|}{\|\Delta\hat{x}(k\mid k)\|}. \tag{4.5}$$

定义第 $j$ 个不匹配模型的 $k$ 时刻输入交互误差压缩比为:

$$\zeta_j(k) = \frac{\|\Delta\hat{x}_j^0(k\mid k) = \|}{\|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|}. \tag{4.6}$$

注:$\|\cdot\|$ 为向量范数.

将式(2.2)及式(4.4)代入式(4.1)~(4.3),有

$$\Delta\hat{x}_i^0(k\mid k) = \frac{\alpha_i \cdot \sum_{l=1}^{m} u_l(k)\cdot\Delta\hat{x}_l(k\mid k)}{(1 - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_i(k) + \alpha_i}, \tag{4.7}$$

$$\Delta\hat{x}_j^0(k\mid k) = \frac{(1-\sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_j(k)\cdot\Delta\hat{x}_j(k\mid k) + \alpha_j\cdot\sum_{l=1}^{m}u_l(k)\cdot\Delta\hat{x}_l(k\mid k)}{(1-\sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_j(k)+\alpha_j}, \tag{4.8}$$

$$\Delta\hat{x}(k\mid k) = \sum_{l=1}^{m} u_l(k)\cdot\Delta\hat{x}_l(k\mid k) \tag{4.9}$$

### 4.1 马尔可夫参数对状态估计影响的分析(Effect analysis of Markov parameters on model-conditional estimation)

1) 由(2.11)式可知,模型的似然函数是关于残差平方的负指函数.如果不匹配模型的残差与其协方差的失配,则其似然函数随其残差偏差量的失配而平方的指数下降,从而使匹配模型的似然函数往往要比其它模型大得多,因而匹配模型的概率特别大(模型切换时除外).也就是说在无模型切换的情况下,$\delta(k)$ 决定着 IMM 的估计精度.

将式(4.7)和式(4.9)代入式(4.5),有:

$$\delta(k) = \frac{\alpha_i}{(1 - \sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_i(k) + \alpha_i}. \tag{4.10}$$

由式(4.10)可得:当 $\sum_{l=1}^{m}\alpha_l \leqslant 1$ 时,$\delta(k) < 1$.因而我们可以得到如下结论:

**结论 1** 当马尔可夫概率转移矩阵为主对角线占优时,对于在 $[k-1,k]$ 滤波周期匹配的模型,经

$k$ 时刻的输入交互作用，其状态估计的精度必然会优于 $k$ 时刻的系统输出的估计精度.

从上式可以看出，$\alpha_i$ 越小，则 $\delta(k)$ 越小，即：误差压缩的效果越明显. 因而考虑到提高无模型切换情况下的系统估计精度，$\alpha_i$ 应该尽量小.

另外，匹配模型概率 $u_i(k)$ 越大，则 $\delta(k)$ 越小. 模型个数越多，$\delta(k)$ 越小. 这就要求建模要精细，准确，有足够的模型. 即在不破坏贝叶斯推理关于模型独立完备的条件下，细化模型空间.

2) 当模型在 $[k,k+1]$ 滤波周期内发生切换时，则 $k$ 时刻的输入交互对于新的匹配模型估计的修正作用将影响匹配模型的辨识及滤波精度. 因而在模型切换时，$\zeta_j(k)$ 影响着新匹配模型的模型概率，从而影响着系统的反应速度.

由式(4.8)可得：

$$\|\Delta\hat{x}_j^0(k\mid k)\| \leqslant \frac{(1-\sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_j(k)\cdot\|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|+\alpha_j\cdot\sum_{l=1}^{m}u_l(k)\cdot\|\Delta\hat{x}_l(k\mid k)\|}{(1-\sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_j(k)+\alpha_j} \tag{4.11}$$

从而得 $\zeta_j(k)<1$ 成立的充分条件

$$\frac{(1-\sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_j(k)\cdot\|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|+\alpha_j\cdot\sum_{l=1}^{m}u_l(k)\cdot\|\Delta\hat{x}_l(k\mid k)\|}{(1-\sum_{l=1}^{m}\alpha_l)\cdot u_j(k)+\alpha_j} \leqslant \|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|, \tag{4.12}$$

即

$$\|\Delta\hat{x}(k\mid k)\| \leqslant \|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|. \tag{4.13}$$

**结论 2**　当基于模型 $j$ 的滤波估计 $\hat{x}_j(k\mid k)$ 在精度上劣于系统综合输出估计 $\hat{x}(k\mid k)$ 时，输入交互可以使模型 $j$ 获得更好的估计起始值 $\hat{x}_j^0(k\mid k)$.

对于两模型的 IMM，将式(2.7)，(4.1)和(4.3)代入式(4.5)，有：

$$\zeta_j(k)=\frac{1}{1+\frac{\pi_{ij}}{\pi_{jj}}\cdot\frac{u_i(k)}{u_j(k)}}. \tag{4.14}$$

由式(4.11)可得：$\zeta_j(k)<1$. 我们可以得到如下结论：

**结论 3**　对于两模型的 IMM，$[k-1,k]$ 滤波周期内不匹配模型的估计精度经过 $k$ 时刻的输入交互必然会得到改善. 而且这一结论并不要求马尔可夫概率转移阵按式(2.2)取值.

将式(2.2)代入式(4.14)有：

$$\zeta_j(k)=\frac{1}{1+\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}\cdot\frac{u_i(k)}{u_j(k)}}. \tag{4.15}$$

为极小化 $\zeta_j(k)$，应有：$\alpha_j$ 应尽量大，而这与结论 1 中关于 $[k-1,k]$ 滤波周期匹配模型的要求相矛盾. 因此马氏转移概率矩阵元素 $\alpha_j$ 在选择上的矛盾反映了无模型切换与有模型切换之间参数选择的矛盾.

3) 在两模型下，欲使 $[k-1,k]$ 滤波周期不匹配模型估计精度经 $k$ 时刻的输入交互优于 $k$ 时刻的系统输出估计精度，则需有：

$$\|\Delta\hat{x}_j^0(k\mid k)\| < \|\Delta\hat{x}(k)\|. \tag{4.16}$$

将式(2.7)，(4.2)，(4.3)代入式(4.8)有

$$\frac{\pi_{jj}}{\pi_{jj}\cdot u_j(k)+\pi_{ij}\cdot u_i(k)}=\frac{\pi_{jj}}{\pi_{jj}\cdot u_j(k)+(1-\pi_{jj})\cdot(1-u_j(k))}<1$$
$$\Leftrightarrow \pi_{jj}<\pi_{ij},\ i\neq j. \tag{4.17}$$

式(4.17)要求马尔可夫概率转移阵非主对角线占优. 与结论 1 相结合，我们可以得到如下结论：

**结论 4**　两模型下 $k$ 时刻的输入交互的修正作用必会使一个模型的估计精度优于 $k$ 时刻系统输出的估计精度，而另一个模型的估计精度会劣于 $k$ 时刻系统输出的估计精度.

4) 假设在三模型下，$k$ 时刻的输入交互修正可使 $[k-1,k]$ 滤波周期不匹配模型估计精度都变差，即有：

$$\|\Delta\hat{x}_j^0(k\mid k)\| > \|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|, \tag{4.18}$$

$$\|\Delta\hat{x}_l^0(k\mid k)\| > \|\Delta\hat{x}_l(k\mid k)\|. \tag{4.19}$$

则由 $\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$，可得式(4.18)及式(4.19)成立的必要条件为：

$$\frac{\|\Delta\hat{x}_l(k\mid k)\|}{\|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|} > 1+\frac{\pi_{ij}\cdot u_i(k)}{\pi_{lj}\cdot u_l(k)}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\|\Delta\hat{x}_j(k\mid k)\|}{\|\Delta\hat{x}_l(k\mid k)\|} > 1+\frac{\pi_{il}\cdot u_i(k)}{\pi_{jl}\cdot u_l(k)}. \tag{4.21}$$

将式(4.20)与(4.21)相乘，得：

$$1 > \left[1+\frac{\pi_{il}\cdot u_i(k)}{\pi_{jl}\cdot u_j(k)}\right]\cdot\left[1+\frac{\pi_{ij}\cdot u_i(k)}{\pi_{lj}\cdot u_l(k)}\right]. \tag{4.22}$$

由于模型概率大于 0，式(4.22)不可能成立.

**结论 5**　即在三模型下，无论如何选择模型，总存在 $[k-1,k]$ 滤波周期内不匹配模型，它的估计精度经 $k$ 时刻的输入交互会得到改善. 而且这一结

论并不要求马尔可夫概率转移阵按式(2.2)取值.

## 4.2 马尔可夫参数对状态估计影响的讨论(Effect discuss of Markov parameters on model-conditional estimations)

在4.1节,我们给出了马尔可夫参数对IMM影响的定量表达及定性结论.这些结论表明:输入交互也是一种滤波.它利用的是"模型间的转移服从马氏过程"这一先验信息.马尔可夫参数正是这一滤波的参数.

在多模型下,不同模型具有不同的先验建模信息.采用多个模型表明了这些相互独立甚至于冲突的模型均有存在的可能性.在这样的信息量下,系统输出估计作为所有信息的综合,具有最强的鲁棒性.由于模型概率不为0,而且模型概率有一定的滞后性以及量测噪声的影响,在滤波当拍,我们无法严格地排除或确认某个模型的匹配性,以便将其 $k$ 时刻的估计作为 $k+1$ 时刻的滤波输入.此时,结论1给出了通过输入交互,匹配模型的滤波输入相对于系统输出估计的误差压缩率 这一误差压缩率影响着无模型切换时的滤波精度.而结论2及结论3则直接给出了不匹配模型的估计误差经输入交互的压缩率.这一误差压缩率改善了不匹配模型的滤波输入,抑制了不匹配模型的滤波发散,从而影响着模型切换时的模型切换速度及滤波精度.结论4反映了输入交互在有无模型切换情况之间的折衷与矛盾.这是由先验信息(即假设1)的有限性所造成的.而结论5表明了对于三模型的IMM,输入交互所改善的不匹配模型数的下限.

## 5 小结(Conclusion)

本文研究了IMM的参数对性能的影响,发现马尔可夫参数对模型概率有双边限幅作用;给出了马尔可夫参数对模型估计影响的定量公式及五条定性的结论.我们下一步工作可能是结合具体模型通过合理假设将本文两部分的研究结果相结合,给出IMM的稳态估计精度与动态估计精度的近似表达式.

## 参考文献(References)


[1] Mazor E, Averbuch A, Bar-shalom Y and Dayan J. Interacting multiple model methods in target tracking: A survey [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(1):103-122

[2] Bar-shalom Y and Li X R. Multitarget-Multisensor Tracking: Principle and Techniques [M]. Storrs, CT: YBS Publishing, 1995

[3] Li X R. Hybrid estimation techniques [J]. Control and Dynamic Systems, 1996,76(1):1-76

[4] Bar-shalom Y and Li X R. Estimation and Tracking Principle, Techniques, and Software [M]. Boston, MA: Artech House, 1993

[5] Li X R and Bar-shalom Y. Multiple-model estimation with variable structure [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(4):1-16

[6] Daeipour E and Bar-shalom Y. An interacting multiple model approach for target tracking with glint noise [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1995, 31(2):706-715

[7] Helmick R E, Blair W D and Hoffman S A. Interacting multiple model approach to fixed-interval smoothing [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1995,41(6):1845-1855

[8] Atherton D P and Lin H J. Parallel implementation of IMM tracking algorithm using transputers [J]. IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation, 1994, 141(6):325-332

[9] Bar-shalom Y. Multitarget-Multisensor Tracking: Applications and Advances [M]. Norwood, MA: Artech House, 1992

[10] Li X R and Bar-shalom Y. Design of an interacting multiple model algorithm for air traffic control tracking [J]. IEEE Trans. on Control Systems Technology, 1993, 1(3):186-194

[11] Basseville M and Nikiforov I. Detection of Abrupt Changes: Theory and Application [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentic Hall, 1993

[12] Li X R and Bar-shalom Y. A recursive multiple model approach to noise identification [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1994, 30(3):671-684

[13] Skeppstedt A, Ljung L and Millnery M Construction of composite models from observed data [J]. Int. J. of Control, 1992, 55(1):141-152

[14] Li X R and Bar-shalom Y. Performance prediction of the interacting multiple model algorithm [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(3):755-771

[15] Li X R, Zhi X R and Zhang Y M. Multiple-model estimation with variable structure, Part III: Model-group switching algorithm [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(1):225-241

[16] Li X R, Zhang Y M and Zhi X R. Multiple-model estimation with variable structure, Part IV: Design and evaluation of model-group switching algorithm [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(1):242-254

[17] Zhang Y M and Li X R. Detection and diagnosis of sensor and actuator failures using IMM estimator [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(4):1293-1313



### 本文作者简介

**梁 彦** 1971年生.2001年获西北工业大学博士学位,现在清华大学自动化系做博士后研究工作.研究方向:自适应滤波,机动目标跟踪,信息融合,贝叶斯因果网.

**程咏梅** 女.1960年生.西北工业大学自动控制系副教授.研究方向:自适应滤波,机动目标跟踪,并行处理技术.

**贾宇岗** 1979年生.西北工业大学自动控制系硕士生.研究方向:机动目标跟踪,信息融合,自适应滤波.

**潘 泉** 1961年生.西北工业大学自动控制系教授,博士生导师.研究方向:自适应滤波,机动目标跟踪,信息融合、智能信息处理.