

文章编号: 1000-8152(2001)04-0547-05

伺服系统的一种优化设计方法及应用研究*

章国江 姚郁 孟凡伟

(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨, 150001)

摘要: 针对古典控制系统设计方法对工程设计人员经验的依赖性问题, 提出一种基于古典控制的伺服系统优化设计方法, 对超前环节提出了阶数及其参数的优化指标函数, 证明了解的存在性, 并给出求解方法. 最后, 通过实例验证了该方法的有效性.

关键词: 伺服系统; 优化设计; 超前环节

文献标识码: A

One Optimum Design Method of Servo-system and Its Application Research

ZHANG Guojiang, YAO Yu and MENG Fanwei

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, P. R. China)

Abstract: To solve the problem which classical control system design method depends on the experiences of project designers, this paper gave one optimum design method based on classical design of servo-system, presented an optimum performance index function about order and parameters of lead-link, approved the existence of solution. At last, an application is given to certificate the effectiveness of the method presented in this paper.

Key words: servo-system; optimum design; lead-link

1 引言(Introduction)

古典控制理论发展五十多年来, 理论上已经非常完善, 在实际工程运用上也很成熟, 但是它较多地依赖于工程设计人员的实际经验和感觉, 很少从优化角度来考虑问题. 对于古典控制的优化设计, 已有一些文献进行了讨论. 文献[1]讨论了时延系统的基于幅值裕度和相位裕度的无记忆调节器的优化设计, 它是在文献[2]的基础上从有限维调节器推广到无限维的调节器, 而且在输入通道中加入静态非线性干扰获得鲁棒稳定条件, 加入动态线性干扰获得相对稳定条件, 保证调节器具有 60° 的相角裕度. 文献[3]给出了公式化二次型反馈理论的基于增益-带宽的优化设计, 以解决系统的非参数不确定性问题. 文献[4]和文献[5]研究了 PID 的优化设计. 文献[6]采用 Routh 近似法对系统进行模型降阶化设计, 文献[7]采用 PI 型状态反馈设计来优化伺服系统.

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a > 1). \quad (1)$$

在古典控制系统设计过程中, 在用式(1)所示的超前校正环节来补偿系统的相角, 以使系统具有比较好的相位裕度时, 所需要补偿的相角 ϕ_0 一般在

$\pi/2 \sim \pi$ 之间, 因此要采用多个超前环节串联来实现. 那么如何确定这多个环节从而获得最佳补偿效果, 成为我们要解决的问题. 对此, 本文提出一种优化方法来设计伺服系统. 这个问题不仅对于 $\phi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 存在, 对于 ϕ_0 为其他值同样存在.

2 数学描述(Mathematics description)

根据超前环节的传递函数 $G_c(s)$ 可以求出其几何中心频率和超前相角, $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$, $\phi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$, $\phi_m \in (0, \frac{\pi}{2})$, 其 Bode 图如图 1 所示, 图中 ω_m 为超前环节的几何中心频率, ϕ_m 为超前环节在频率 ω_m 处对系统补偿的相角. 由于惯性超前环节在其中心频率处补偿的相角最大, 因此, 把需要补偿相角的频率定为超前环节的中心频率, 即 $\omega_c = \omega_m$. 假设第 i 个超前环节的放大倍数为 a_i , 则第 i 个超前环节的传函为

$$G_i(s) = (1 + \frac{\sqrt{a_i}}{\omega_m} s) / (1 + \frac{1}{\sqrt{a_i \omega_m}} s), \quad (2)$$

* 基金项目: 国家教育部博士点基金(HB-097-6820)资助项目.
收稿日期: 1999-09-28; 收修改稿日期: 2000-03-27.

其中 $i = \bar{n}$. 则 n 个超前校正环节串联的传递函数

可以表示为 $G(s) \approx \prod_{i=1}^n G_i(s)$.

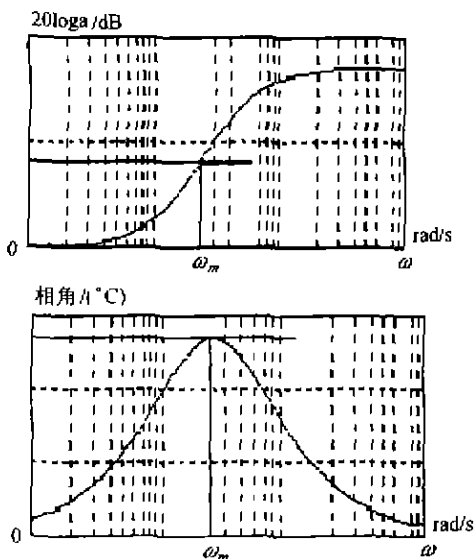


图1 超前环节的 Bode图
Fig. 1 Bode graph of lead-link

3 系统优化设计 (Optimum design of system)

我们要解决的问题就是为了实现系统在频率 ω_m 处补偿 ϕ_0 的相角, 如何选择 n 和 a_i 才能使系统获得最优的校正效果, 为此, 我们给出超前环节最优设计的定义以及两个相关定理.

定义 1 通过适当地选择超前校正环节的个数 n 及参数 $a_i (i \in \bar{n})$, 使超前校正环节在频率 ω_m 处补偿相角 ϕ_0 的前提下, 在所关心频率 $\omega_0 (\omega_0 > \omega_m)$ 处升高的幅度最小, 则该校正环节定义为最优化超前校正环节.

定理 1 对于给定的 n 个超前校正环节 $G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)$, 为了在频率 ω_m 处获得 ϕ_0 的相角补偿, 用 n 个相同的超前环节能获得最优的补偿效果, 即 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

证 假设第 i 个超前环节在频率 ω_m 处补偿的相角为 ϕ_i , 放大倍数为 a_i , 则其传函如式(2)所示, 在频率 ω_0 处的幅度为

$$A_i(\omega_0) = 20 \log \left(\frac{\sqrt{1 + (\sqrt{a_i} \omega_0 / \omega_m)^2}}{\sqrt{1 + (\omega_0 / \sqrt{a_i} \omega_m)^2}} \right)$$

则 n 个超前校正环节在频率 ω_0 处的幅度为 $A(\omega_0)$

$$= \sum_{i=1}^n A_i(\omega_0), \text{ 相位为 } \sum_{i=1}^n \phi_i = \phi_0, \text{ 其中, } a_i =$$

$$\frac{1 + \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i}, \phi_i \in (0, \frac{\pi}{2}). \text{ 令 } c = (\frac{\omega_0}{\omega_m})^2, \text{ 则有}$$

$$A(\omega_0) = \sum_{i=1}^n A_i(\omega_0) =$$

$$20 \log \sqrt{\frac{1 + a_1 c}{1 + \frac{c}{a_1}} \cdot \frac{1 + a_2 c}{1 + \frac{c}{a_2}} \cdot \dots \cdot \frac{1 + a_n}{1 + \frac{c}{a_n}}}$$

$$\text{令 } f(x) = \left(1 + c \cdot \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) / \left(1 + c \cdot \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right),$$

$$y = f(\phi_1) \cdot f(\phi_2) \cdot \dots \cdot f(\phi_n), F = y + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \phi_i - \phi_0 \right)$$

F 对 ϕ_i 及 λ 求偏导并令其等于零, 有

$$\begin{cases} f'(\phi_1) \cdot y + \lambda \cdot f(\phi_1) = 0, \\ f'(\phi_2) \cdot y + \lambda \cdot f(\phi_2) = 0, \\ \vdots \\ f'(\phi_n) \cdot y + \lambda \cdot f(\phi_n) = 0, \\ \sum_{i=1}^n \phi_i - \phi_0 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由于 $f(\phi_i) \neq 0, y \neq 0$, 所以, $f'(\phi_i) \neq 0$. 因此, 由式(3)有

$$\frac{-\lambda}{y} = \frac{f'(\phi_1)}{f(\phi_1)} = \frac{f'(\phi_2)}{f(\phi_2)} = \dots = \frac{f'(\phi_n)}{f(\phi_n)} \quad (4)$$

因为

$$\frac{f'(\phi_i)}{f(\phi_i)} = \frac{4c(1 + \sin^2 \phi_i + c \cos^2 \phi_i)}{(c-1)^2 \cos^3 \phi_i + 4c \cos \phi_i} \quad (5)$$

由式(4), (5)可得

$$\frac{4c(1 + \sin^2 \phi_i + c \cos^2 \phi_i)}{(c-1)^2 \cos^3 \phi_i + 4c \cos \phi_i} = \frac{4c(1 + \sin^2 \phi_j + c \cos^2 \phi_j)}{(c-1)^2 \cos^3 \phi_j + 4c \cos \phi_j} \quad (6)$$

其中 $\forall i, j \in \bar{n}$, 则有

$$\begin{aligned} & (\cos \phi_j - \cos \phi_i) [2(c-1)^2 (\cos^2 \phi_i + \cos^2 \phi_j + \\ & \cos \phi_j \cos \phi_i) + 8c + (c-1)^3 \cos^2 \phi_i \cos^2 \phi_j + \\ & (4c - 4c^2) \cos \phi_i \cos \phi_j] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

令 $w(x) = 2(c-1)^2 (\cos^2 \phi_i + \cos^2 \phi_j + \cos \phi_j \cos \phi_i) + 8c + (4c - 4c^2) \cos \phi_i \cos \phi_j$, 可知 $w(x) > 0$, 又 $c > 1$, 所以 $w(x) + (c-1)^3 \cos^2 \phi_i \cos^2 \phi_j > 0$, 故式(7)存在唯一解 $\phi_i = \phi_j$. 由 i, j 的任意性可知, 式(6)的解为 $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n$, 故当 $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = \frac{\phi_0}{n}$ 时, y 取极值, 且是唯一极值点. 而 $f(x)$ 在 $\phi_i \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时趋于 ∞ , 所以 y 在 $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = \frac{\phi_0}{n}$ 时取极小值, 即 $A(\omega_0)$ 在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = (1 + \sin \frac{\phi_0}{n}) / (1 - \sin \frac{\phi_0}{n})$ 时取极小值. 证毕.

定理 2 当用 n 个相同的超前环节来实现频率 ω_m 处补偿 ϕ_0 的相角时, n 越大获得的补偿效果越好.

证 由图1所示的超前环节Bode图可见,其幅频特性是频率 ω 的单调递增函数.为了简化问题,本文只考虑当 $\omega = \omega_m$ 时的情形,对于 $\omega \neq \omega_m$ 的情况有同样的结论. n 个相同的超前环节串联在频率 ω_m 处的幅度为

$$A(j\omega_m) = 20 \log \left(\sqrt{1 + \sin \frac{\phi_0}{n}} \right) \left(1 - \sin \frac{\phi_0}{n} \right)^n. \quad (8)$$

我们只要证明

$$A(j\omega_m) = 20 \log \left(\sqrt{1 + \sin \frac{\phi_0}{n}} \right) \left(1 - \sin \frac{\phi_0}{n} \right)^n$$

对 n 是一个严格单调递减的函数则定理得证.我们考虑函数

$$g(x) = x \cdot \ln \frac{1 + \sin \frac{\phi_0}{x}}{1 - \sin \frac{\phi_0}{x}}. \quad (9)$$

上式对 x 求导有

$$\frac{dg}{dx} = \ln \frac{1 + \sin \frac{\phi_0}{x}}{1 - \sin \frac{\phi_0}{x}} - \frac{2\phi_0}{x \cdot \cos \frac{\phi_0}{x}},$$

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{2\phi_0^2}{x^3 \cos^2 \frac{\phi_0}{x}} \cdot \sin \frac{\phi_0}{x}.$$

可以看出 $g(x)$ 的二阶导数大于零,即 $g(x)$ 的一阶导数是严格单调递增的.由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dg}{dx} = 0$,故 $g(x)$ 的一阶导数小于零,可知 $g(x)$ 是一个严格单调递减的函数, $g(n)$ 也同样严格单调递减,所以 $A(j\omega_m)$ 是一个严格单调递减的函数. 证毕.

从上面的两个定理可以看出,在用超前环节对系统进行校正时,为了获得最佳的补偿效果应该用尽量多的相同的超前环节串联来实现.但是这样会出现一个问题,即随着超前环节个数的增多,在工程实现上将带来很大的困难,而且当超前环节个数 n 增加到一定程度时,在关心的频率 ω_0 处幅度减小所带来的效果并不明显,而我们为了实现 n 个环节可能要付出很大的代价,因此有必要对超前环节的个数 n 进行优化,在减少个数和获得尽量小的幅度之间寻求最优解.

根据上面的分析,我们提出一个对超前环节阶数 n 的优化指标函数

$$J(n, \omega) = 20 \log \sqrt{\frac{a\omega_m^2 + a^2\omega^2}{a\omega_m^2 + \omega^2}} + 1.5 \times n. \quad (10)$$

其中, n 为超前环节的个数, ω 为关心的频率, ω_m 为单个超前环节的几何中心频率, ϕ_0 为在频率 ω_m 处

需要补偿的相角.只要 ω 给定,使得式(10)取最小值的 n_0 就是最优校正环节的阶数.

下面我们分析式(10)最小值的存在性.由式(10)可以看出,它由两项组成,第一项为单个环节的幅度,它是 n 的单调递减函数,第二项为关于 n 的单调递增函数.对式(10)求极限有 $\lim_{n \rightarrow \infty} J(n, \omega) = \infty$,以及 $\lim_{n \rightarrow 0} J(n, \omega) = \infty$,因此可以知道式(10)的最小值一定存在,即惯性超前环节优化设计的解一定存在.

对于式(10)所示的指标函数,可以看出它与关心频率点 ω 有关.如果系统由于机械谐振等原因,使得幅频特性在某一频率点比其它频率更高,则应该取 ω 等于这个频率值.如果系统没有明显的谐振频率点,那么取 $\omega = 3\omega_m$.因为由式(10)可以看出,第一项是单个超前环节在频率 ω 处的幅度,当 ω 取 $\omega \geq 3\omega_m$ 时该项对性能指标的影响很小,故在利用式(10)进行寻优时只要取 $\omega = 3\omega_m$ 即可.

4 数值计算及应用研究 (Numerical calculation and application)

本文通过仿真计算和实际工程应用研究来验证上述结果的有效性.图2给出了在 $\omega_m = 40\text{Hz}$, $\omega_0 = 120\text{Hz}$, $\phi_0 = 120^\circ$ 时 $J(\omega_0, n)$ 与 $A(\omega_0)$ 的曲线.从图2(a)可以看出,当 $n = 5$ 时 J 取最小值,从图2(b)可以看出,当 $n \geq 5$ 以后, n 每增长一阶所带来的幅度衰减都小于0.3dB,这对于系统校正来说没有太大的意义,而且随着阶数的增加,幅度衰减越来越小.对于实时控制系统来说,为了获得很小的幅值裕度,而将系统的阶数提高很多并不合适.

从上面的分析可以看出,对于大滞后相角补偿,在本文提出的优化条件下,超前环节的阶次较高.对于数字控制系统来讲,除了系统本身的控制误差外,其主要的误差来源就是,在对环节数字化时由于计算机的字长有限而引起的截断误差和量化误差.如果系统的阶次较低,那么计算机在进行控制量运算时累积的截断误差和量化误差较小,计算机的运算负担也较小.相反,系统的阶数越高,累积的误差就越大,而且会增加计算机的运算负担,占用过多的机时可能导致计算机不能保证控制系统的实时性,这对实时数字控制系统而言是最大的危害.对于一般的控制系统,采用本文的优化方法,超前环节的阶数一般大约为5或6,其累积误差很小,所占用的机时也非常小.因此,由于优化而产生的阶数升高所带来的负面影响可以忽略不计.

本文将前面介绍的超前环节优化设计方法应用到某型三轴仿真转台外环伺服控制系统的设计中。

三轴转台外环的对象特性曲线如图3所示,根据系统双十指标6Hz的要求以及对象特性,我们取该闭环控制系统的穿越频率为 $\omega_m = 40\text{Hz}$,由图3可见在频率 ω_m 为了得到 45° 的相角裕度,需要通过设计超前环节使 $\phi_0 = 108^\circ$.另外,从图3可见,该三轴转台外环幅频特性没有明显的谐振,所以取 $\omega = 3\omega_0$.然后,用本文提出的优化设计方法,由式(10)

可以确定超前环节的阶数 $n = 5$,从而可以设计得到校正环节如式(11)所示,将系统闭环,其响应曲线如图4,5所示。

$$G_c(s) = \prod_{i=1}^5 G_i(s), G_i(s) = \frac{1 + 0.0057s}{1 + 0.0027s} \tag{11}$$

从实际响应曲线来看,系统具有良好的性能,达到指标要求,从而可以看出本文提出的优化设计方法在工程实际应用上也是切实可行的。

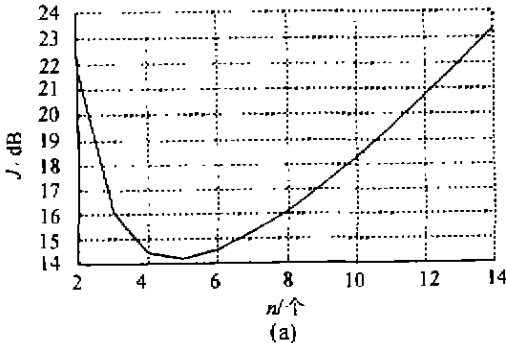


图 2(a) J与n关系曲线
Fig. 2(a) Curve of $J(\omega_0, n)$

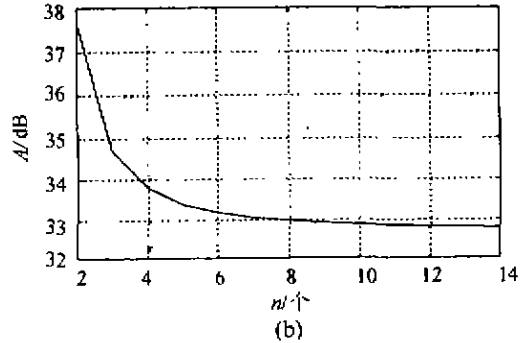


图 2(b) A与n关系曲线
Fig. 2(b) Curve of $A(\omega_0)$

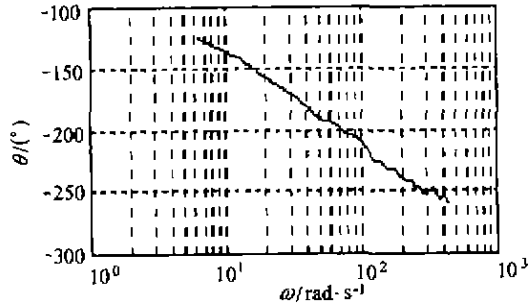
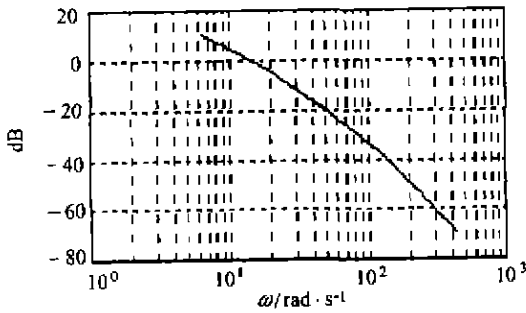


图 3 转台外环控制回路对象 Bode 图
Fig. 3 Plant Bode graph of external ring of turn-table

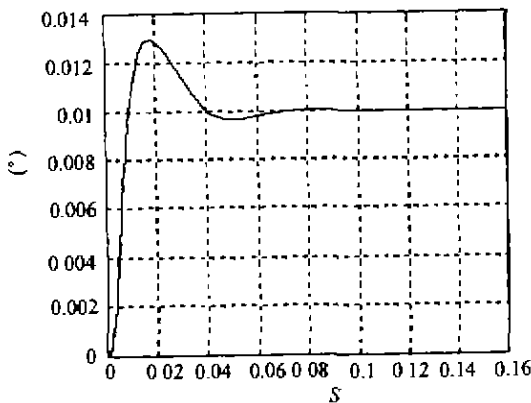


图 4 系统 0.01° 阶跃响应曲线
Fig. 4 Response curve of step 0.01°

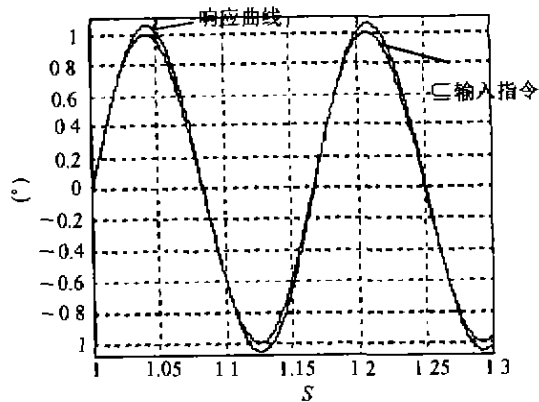


图 5 系统 1°, 6Hz 响应曲线
Fig. 5 Response cure of sine of 1°, 6Hz

5 结束语 (Conclusion)

通过上面的分析和实际应用结果表明,本文提

出的基于古典控制的超前校正环节的优化设计方法是切实可行的,避免了以前在设计控制系统时所采

用的经验法和试凑法,具有重要的工程实际意义,关于超前环节和滞后环节的综合优化设计,有待于进一步研究。

参考文献(References)

- [1] Kubo T, Shimamura E. Gain and phase margin of optimal memoryless regulator of systems with time-delay [J]. *Journal of Control*, 1999, 72(5):404 - 410
- [2] Safonov M G, Athans M. Gains and phase margin for multiloop LQG regulators [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1977, 22(2):173 - 179
- [3] Thompson D F. Gain-bandwidth optimal design for the new formulation quantitative feedback theory [J]. *Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 1998, 120(3):401 - 404
- [4] Ho W K, Lim K W, Xu W. Optimal gain and phase margin tuning

for PID controllers [J]. *Automatica*, 1998, 34(8):1009 - 1015

- [5] HOGG B W, Wu O H, Swidonbank E. An optimal PID automatic voltage regulator for synchronous machines [J]. *Int. J. of Control*, 1989, 50(6):2615 - 2634
- [6] Hwang Chyi, Guo Tong-yi, Sheih Leang-san. Model reduction using new optimal routh approximant technique [J]. *Int. J. of Control*, 1992, 55(4):989 - 1007
- [7] AIDA K, KITAMORI T. Design of a PI-type state feedback optimal servo system [J]. *Int. J. of Control*, 1990, 52(3):613 - 625

本文作者简介

章国江 1974年生.哈尔滨工业大学控制工程系博士生.主要研究方向为计算机控制.

姚郁 1963年生.哈尔滨工业大学控制工程系教授,博士生导师.主要研究方向:非线性控制,伺服控制系统设计,计算机控制.

孟凡伟 1976年生.哈尔滨工业大学控制工程系硕士.研究方向:计算机控制.