

文章编号: 1000-8152(2001)04-0555-04

基于向量 Lyapunov 函数方法的模糊控制系统稳定性分析和设计

孙 衢 李人厚

(西安交通大学系统工程研究所·西安, 710049)

摘要: 采用模糊动态模型对连续时间非线性系统进行模糊控制, 对闭环模糊系统的稳定性进行分析, 并给出系统化的控制器设计程序; 在一系列局部模型通过模糊隶属函数连接得到的连续的全局模型中, 全面考虑其它关联子系统对标称线性系统的扰动, 并利用向量 Lyapunov 函数的概念和方法, 得到了闭环模糊系统稳定的充分条件; 仿真例子验证了该设计方法的正确性。

关键词: 模糊动态模型; 模糊控制; 分散控制; 关联稳定性; 向量 Lyapunov 函数

文献标识码: A

Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems Based on Vector Lyapunov Function Approach

SUN Qu and LI Renhou

(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, P.R. China)

Abstract: A fuzzy control system for continuous-time nonlinear systems is presented, which is based on fuzzy dynamic model. The stability of the closed-loop fuzzy system is analyzed. Then systematic procedure to design fuzzy controllers is formulated. A set of local linear models are linked together by fuzzy membership function to obtain the continuous global model. By considering the fuzzy system as a set of nominal linear systems subject to perturbations contributed by other interacting subsystems, a sufficient condition for the stability of the closed-loop fuzzy system is derived via the concept of vector Lyapunov function. The validity of the fuzzy model based control technique is illustrated by a simulation example.

Key words: fuzzy dynamic model; fuzzy control; decentralized control; connective stability; vector Lyapunov function

1 引言(Introduction)

常规模糊控制是基于人的知识和经验, 对难以建模的对象或复杂非线性系统进行控制, 已被广泛地应用于许多工程实际问题。实践中, 对常规模糊控制系统的稳定性及鲁棒性难以进行严格的理论分析, 限制了模糊控制器的应用。

近年来, 基于模糊动态模型的模糊控制引起人们的广泛兴趣和高度重视。较多的模糊控制器设计和稳定性分析都是针对 T-S 模糊模型^[1]。Tanaka^[2]给出稳定性的一个充分条件, 要求对 m 个模糊推理子系统的系统矩阵 $A_i (i = 1, \dots, m)$ 找到一个公共的正定矩阵 P 满足 m 个方程。但这实际上是相当困难的, 它相当于关于 P 的一个超定线性方程组解的存在问题。Cao^[3,4]提出用一组正定矩阵 $P_i (i = 1, \dots, m)$ 来代替公共的正定矩阵 P ; 把被控对象的全局模型划分为 m 个子区间, 在每个子区间中模糊系统由一个标称线性系统和一组关联子系统组成, 这

些关联子系统对标称线性系统构成了依赖于隶属函数的时变扰动; 在每个子区间中模糊系统取不确定性的界得到 m 个最大线性定常系统, 分别设计反馈控制律, 但不确定性的界较难精确地确定, 得到的结果也比较保守。另外, 他们的设计方法繁琐, 要解代数 Riccati 方程。

本文采用模糊动态模型对连续时间控制对象建模, 研究了模糊控制系统的稳定性分析和设计。众所周知, 在一定条件下大系统的分散控制结构能够保证鲁棒稳定性^[5], 对子系统关联中存在的较大范围的非线性时变不确定性具有容错能力。闭环关联系统能够采用局部反馈控制镇定, 称之为关联稳定性^[5]; 可以应用向量 Lyapunov 函数^[5]的概念来分析大系统分散控制的关联稳定性, 向量函数的每个分量可独立地确定局部控制子系统的稳定性。本文的基本思想是, 首先基于局部线性模型设计状态反馈控制器, 然后通过模糊推理选择起主导作用的子系

系统的控制,作用于整个系统;由于模糊控制系统的设计是一种局部设计方法,可以利用大系统分散控制的关联稳定性等有关概念和方法给出闭环模糊系统的稳定性定理,以保证切换控制律能镇定系统.需要指出的是,我们对闭环系统划分子区间考虑模糊系统的关联摄动,这是与文献[3]的差别,从而减少了保守性.

2 模糊控制系统(Fuzzy control system)

可以利用 T-S 模糊模型为控制对象建立模糊动态模型,基本思想是将整个状态空间划分为多个模糊子空间,在每个模糊子空间中建立局部的线性模型,总的模糊模型由利用模糊隶属函数连接的一系列局部模型组成.该模糊建模方法的本质在于:一个整体非线性的动力学模型可以看成是许多个局部线性模型的模糊逼近.

对于连续控制对象,其模糊动态模型可表示为

$$\begin{aligned} R^k: & \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^k \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^k, \\ & \text{THEN } \dot{x}(t) = A_k x(t) + B_k u(t), \\ & k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 R^k 表示控制对象的第 k 条模糊规则, m 是规则数, (A_k, B_k) 表示第 k 个局部线性模型, $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是系统状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 是输入向量.令 $\mu_k(x(t)) = \mu_k(t)$ 表示规则 R^k 的归一化隶属函数,采用标准模糊推理方法^[1],可以构造全局模糊动态模型

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\mu(t))x(t) + B(\mu(t))u(t), \quad (2) \\ A(\mu(t)) &= \sum_{k=1}^m \mu_k(t)A_k, \quad B(\mu(t)) = \sum_{k=1}^m \mu_k(t)B_k. \end{aligned} \quad (3)$$

对每一局部的线性模型设计如下形式的模糊状态反馈控制律

$$\begin{aligned} R^k: & \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^k \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^k, \\ & \text{THEN } u^k(t) = -K_k x(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 K_k 表示第 k 个局部子系统的反馈增益矩阵.取整个系统的控制为起主导作用的局部模糊子系统的控制,即

$$u(t) = u^l(t), \quad l = \arg \max_k \{ \mu_k(x(t)), k = 1, \dots, m \}, \quad (5)$$

这是一种切换控制律.将式(5)代入式(2),得到闭环全局模糊系统

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(\mu(t))x(t), \quad (6)$$

$$\bar{A}(\mu(t)) = \sum_{k=1}^m \mu_k(t)A_k, \quad A_k = A_k - B_k K_k. \quad (7)$$

注意到闭环模糊系统由 m 个关联的闭环子系统组成,每一个起主导作用的局部模糊子系统 A_k 的稳定性不能保证整个闭环系统的稳定性.

将闭环系统划分成 m 个子区间,它满足

$$\begin{aligned} S_l &= \{x \mid \mu_l(x) \geq \mu_k(x), k = 1, 2, \dots, m, k \neq l\}, \\ & l = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

在每一个子区间 S_l 中模糊系统表示成

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_l(\mu(t))x(t) = [A_{ll} + \Delta A_l(\mu(t))]x(t), \quad (9)$$

其中, $\Delta A_l(\mu(t)) = \sum_{k=1}^m \mu_k(t)\Delta A_{kl}, \Delta A_{kl} = A_{kl} - A_{ll}, l = 1, 2, \dots, m$.可以看出,子区间中模糊系统由一个占优的标称系统 A_{ll} 和一系列关联系统组成.

3 稳定性分析(Stability analysis)

每个子区间中的模糊系统可看作一个摄动系统

$$\dot{x}(t) = A_{ll}x(t) + g_l(t, x(t)), \quad (10)$$

标称系统

$$\dot{x}(t) = A_{ll}x(t) \quad (11)$$

受其它关联子系统的摄动.其中关联摄动项满足

$$\begin{aligned} \|g_l(t, x(t))\| &= \|\Delta A_l x(t)\| \leq \\ & \sum_{k=1}^m \zeta_{lk}(\mu_k) \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad l = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\zeta_{lk}(\mu_k) = \mu_k \|\Delta A_{kl}\|, k, l = 1, 2, \dots, m$ 且 $\zeta_{ll} = 0, l = 1, 2, \dots, m$. $\|\cdot\|$ 表示矩阵的谱范数,定义为 $\|X\| = [\lambda_M(X^T X)]^{1/2}$. $\lambda_m(X)$ 和 $\lambda_M(X)$ 分别表示矩阵 X 的最小和最大特征值.可以采用几种方法估计关联摄动项的上界,定义

$$\begin{aligned} f_l(\mu) &= \text{tr} \left(\left(\sum_{k=1}^m \mu_k \Delta A_{kl} \right)^T \left(\sum_{k=1}^m \mu_k \Delta A_{kl} \right) \right), \\ & l = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (13)$$

求解如下非线性规划问题:

$$\begin{aligned} & \max f_l(\mu) \\ & \text{s.t. } \sum_{k=1}^m \mu_k = 1 \text{ 且 } \mu_l \geq \mu_k \geq 0, \\ & k \neq l; \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (14)$$

可以得到较少保守性的上界 $\zeta_{lk}^* = \zeta_{lk}(\mu_k^*)$.

对标称闭环系统(11),其渐近指数稳定的充要条件是对任意给定的正定对称矩阵 Q_l ,存在唯一正定对称矩阵 P_l 满足 Lyapunov 方程

$$A_{ll}^T P_l + P_l A_{ll} = -Q_l. \quad (16)$$

定义 $\bar{v}_l(x) = x^T P_l x$, 满足下列不等式

$$\lambda_m(P_l) \|x\|^2 \leq \bar{v}_l(x) \leq \lambda_M(P_l) \|x\|^2, \quad (17)$$

且有

$$\dot{v}_l(x) \leq -\lambda_m(Q_l) \|x\|^2, \quad (18)$$

选择函数 $v_l(x) = (x^T P_l x)^{1/2} = (\bar{v}_l(x))^{1/2}$ 作为第 l 个子区间模糊系统的 Lyapunov 函数, 满足下列不等式

$$\lambda_m^{1/2}(P_l) \|x\| \leq v_l(x) \leq \lambda_M^{1/2}(P_l) \|x\|, \quad (19)$$

$v_l(x)$ 又是一个 Lipschitz 函数, 且 Lipschitz 常数 $L_l = \lambda_M^{1/2}(P_l)$.

可以证明^[6] 第 l 个子区间模糊系统的 Lyapunov 函数的时间导数满足不等式

$$v_l(x) |_{(10)} \leq v_l(x) |_{11} + L_l \|g_l(t, x(t))\|, \quad (20)$$

其中符号 $k(\cdot) |_{(10)}$ 表示 $k(\cdot)$ 的变元是沿着式(10) 轨迹求值的. 由式(12)及式(17~20), 有

$$\begin{aligned} v_l(x) |_{(10)} &\leq \\ v_l(x) |_{(11)} + L_l \sum_{k=1}^m \zeta_{lk} \|x\| &= \\ \frac{1}{2} \bar{v}_l^{-1/2}(x) \dot{\bar{v}}_l(x) |_{(11)} + L_l \sum_{k=1}^m \zeta_{lk} \|x\| &\leq \\ -\varphi_{lk}(\|x\|) + 2L_l \sum_{k=1}^m \lambda_M^{1/2}(P_k) \lambda_m^{-1}(Q_k) \cdot & \\ \zeta_{lk} \varphi_{lk}(\|x\|), & \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $\varphi_{lk}(\|x\|) = \frac{1}{2} \lambda_M^{-1/2}(P_k) \lambda_m(Q_k) \|x\|$. 最后给出 $m \times m$ 集结矩阵^[6] $S = [S_{lk}]$ 的元素为

$$S_{lk} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ -2L_l \lambda_M^{1/2}(P_k) \lambda_m^{-1}(Q_k) \zeta_{lk}, & k \neq l. \end{cases} \quad (22)$$

定理 1 闭环模糊系统是大范围渐近稳定的, 如果矩阵 S 是 M - 矩阵^[5,6].

证 整个模糊系统的 Lyapunov 函数取为

$$v(V) = \alpha^T V, \quad (23)$$

其中向量 Lyapunov 函数 $V = [v_1(x), v_2(x), \dots, v_m(x)]^T$, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$, $\alpha_l > 0$, $l = 1, 2, \dots, m$, 计算 Lyapunov 函数的时间导数可得

$$v(V) = \sum_{l=1}^m \alpha_l v_l(x) |_{(10)} \leq -\alpha^T S q(V), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (24)$$

其中, $q(V) = [\varphi_{11}(\|x\|), \varphi_{12}(\|x\|), \dots, \varphi_{m1}(\|x\|)]^T$. 如果 S 是 M - 矩阵, 根据 M - 矩阵的性质存在元素全为正的向量 α 使得 $\alpha^T S$ 也是元素全为正的向量, 则有 $v(V) < 0$, 系统是渐近稳定的.

证毕.

注 1 该定理对闭环模糊系统的稳定性问题进行了数值简化, 对每个子区间中标称闭环线性系统构造 Lyapunov 函数, 整个系统的稳定性用 M - 矩阵条件检查, M - 矩阵的维数等于子区间的个数.

注 2 这一条件不仅依赖于反映关联强弱的 ζ_{lk} ; 而且依赖于 P_k, Q_k 的选取, 若选 P_k, Q_k 使 $\lambda_M^{1/2}(P_k) \lambda_m^{-1}(Q_k)$ 较小对渐近稳定有利, 可取 Q_k 为 n 阶单位矩阵使之达到最小^[5].

注 3 如果一个特定的 M - 矩阵 \bar{W} 能够保证闭环模糊系统的稳定性, $W \geq \bar{W}$ 表示前者逐个元素不小于后者, 由 M - 矩阵的正拟对角占优性质^[5], 显然所有满足此条件的 W 都能够保证闭环模糊系统的稳定性. 这说明闭环模糊系统的稳定性具有鲁棒性.

4 控制器设计 (Controller design)

被控对象的模糊动态模型, 可以通过对已知复杂非线性模型分段线性化, 或对未知动态系统应用聚类辨识算法^[4] 得到. 基于模糊动态模型的连续时间系统模糊控制器, 可以采用如下交互式设计程序:

1) 根据模糊系统的局部动态行为, 指定每个局部运行区间的性能指标.

2) 采用极点配置或 LQ 等线性系统设计技术, 为每一局部模型设计状态反馈控制律, 使其达到期望的闭环性能指标.

3) 计算每个子区间中标称系统的稳定性矩阵 P_l 和关联子系统的摄动项上界 ζ_{lk} , $l = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, m$.

4) 构成稳定性检查矩阵 S 并检查 M - 矩阵条件.

5) 如果稳定性条件不满足, 重新设计局部控制器, 重复以上步骤.

下面我们以单级倒立摆系统^[3] 作为控制器设计的例子, 它可用如下状态方程表示:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - amlx_2^2 \sin(x_1) \cos(x_1) - a \cos(x_1) u}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)}. \end{cases} \quad (25)$$

系统状态为 $x = [x_1, x_2]$, 其中 x_1 表示摆偏离竖直方向的角度, x_2 表示摆的角速度. 我们的控制任务是, 求出一个 $u(x)$ 施加在小车上使得摆平衡在竖直方向. 系统参数如下: $a = \frac{1}{m + M}$, $m = 2.0 \text{ kg}$, $M = 8.0 \text{ kg}$, $2l = 1.0 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

选择如下 2 条规则作为模糊模型设计模糊控制器:

$$R^1: \text{IF } x_1 \text{ is about } 0, \text{ THEN } \dot{x} = A_1 x + B_1 u,$$

R^2 : IF x_1 is about $\pm \pi/2$, THEN $\dot{x} = A_2x + B_2u$,

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix},$$

以及 $\beta = \cos(88^\circ)$. 隶属函数为:

$$\mu_1(x_1) = \exp(-x_1^2);$$

$$\mu_2(x_1) = 1/(1 + \exp(5(x_1 + 1.4))) + 1/(1 + \exp(-5(x_1 - 1.4))).$$

每个局部线性模型的闭环极点选为 $-4 + j4$; $-4 - j4$, 它们都被设置成 5% 的超调和 1 秒的调整时间, 从而得到每个局部模型的反馈增益:

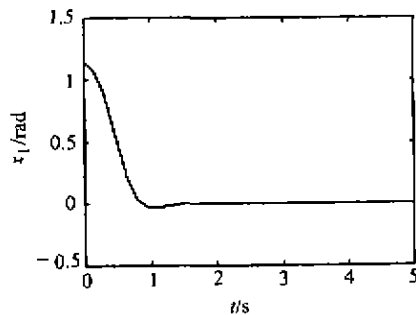


图 1(a) $x_1=65^\circ$ 时的仿真结果
Fig. 1(a) Simulation result ($x_1=65^\circ$)

5 结论(Conclusion)

本文研究了一种基于模糊动态模型的连续时间模糊控制系统的稳定性分析和设计方法, 得到了闭环模糊系统稳定性的充分条件. 仿真例子表明了该设计方法的正确性, 与现有文献给出的方法相比, 具有设计方法简洁且保守性小的优点. 由于模糊控制系统的设计是一种局部设计方法, 利用向量 Lyapunov 函数的有关概念和方法来分析模糊系统的稳定性, 为将模糊控制和现代控制理论相结合提供了一条新的途径.

参考文献(References)

- [1] Takagi T and Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control[J]. IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics 1985, 15(1):116-132

$$K_1 = [279.3333 \quad 45.3333];$$

$$K_2 = [7899.3 \quad 1527.9].$$

对每个子区间中闭环标称系统 A_k , 在式(16)中取 Q_i 为 2 阶单位矩阵可以唯一确定 P_i ; 采用非线性优化算法求解问题(14), 可以确定 ζ_{ik} , $k = 1, 2, \dots, m$. 根据式(22), 得到稳定性检查矩阵 S 如下:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -0.3557 \\ -1.1987 & 1 \end{bmatrix},$$

其特征值均为正实数, 可以判断 S 是 M -矩阵^[5], 从而整个闭环模糊系统是大范围渐近稳定的.

为了便于比较, 选择与文献[3]相同的两种初始条件: $x(0) = [65^\circ, 0]^T$ 和 $x(0) = [89^\circ, 0]^T$, 仿真结果见图 1. 可以看出, 倒立摆平衡的调整时间和设定的调整时间基本相符, 倒立摆的角度响应和文献[3]基本相同. 然而, 利用本文提出的模糊控制器设计方法所得到的反馈控制增益小于文献[3]所给出的结果; 一般而言, 增益大付出的控制代价也大, 因此本文方法保守性较小.

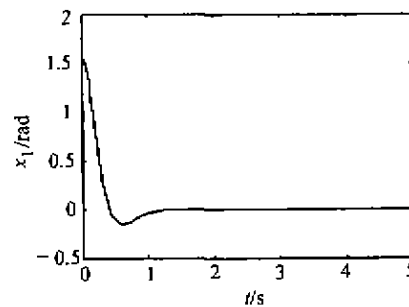


图 1(b) $x_1=89^\circ$ 时的仿真结果
Fig. 1(b) Simulation result ($x_1=89^\circ$)

- [2] Tanaka K and Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2):135-156
- [3] Cao S G, Rees N W and Feng G. Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems[J]. Int. J. Control, 1996, 64(6):1069-1087
- [4] Cao S G, Rees N W and Feng G. Analysis and design for a class of complex control system, Part I: Fuzzy modelling and identification [J]. Automatica, 1997, 33(6):1017-1028
- [5] Siljak D D. Decentralized Control of Complex Systems [M]. Boston: Academic Press, 1991
- [6] Chen Yuliu. Large Scale System Theory and Its Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988 (in Chinese)

本文作者简介

孙 衢 1971 年生, 博士生. 研究领域为复杂系统的模糊控制、遗传算法, 神经模糊系统在控制中的应用.

李人厚 1935 年生, 教授, 博士生导师. 研究领域为复杂系统的智能控制, 多媒体与 CSCW 理论的应用等.