第 18 卷第 4 期
2001 年 8 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.18, No.4
Aug., 2001

文章编号：1000－8152(2001)04－0585－04

多变量动态矩阵控制系统的闭环稳定性

戴连奎

（浙江大学工业控制技术国家重点实验室·杭州，310027）

摘要：定量分析了无约束多输入多输出（MIMO）动态矩阵控制系统的闭环稳定条件.首先基于脉冲响应模型重新描述了动态矩阵控制（DMC）算法；在此基础上，推导得到了 MIMO DMC 系统的闭环稳定条件，以便于预测控制系统的分析与设计.

关键词：预测控制；动态矩阵控制；多变量系统；稳定性

文献标识码：A

Closed-Loop Stability Conditions for MIMO Dynamic Matrix Control

DAI Liankui

(*National Laboratory of Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P.R.China*)

Abstract: This paper presents the stability conditions for multi-input/multi-output (MIMO) dynamic matrix control (DMC) systems. A new form of DMC algorithm based on a finite impulse response (FIR) model is proposed. The closed-loop stability conditions for the MIMO DMC algorithm are derived. These results provide theoretical foundations for analyzing and designing predictive control systems.

Key words: predictive control; dynamic matrix control; multivariable system; stability

1 引言（Introduction）

模型预测控制（MPC）由于其良好的控制性能以及对参数、环境变化的强鲁棒性，已在工业过程中获得了广泛的应用[1].由于实际过程的非线性与不确定性，基于某一模型设计的预测控制器用于实际系统时，其闭环性能就很难得到保证，有时甚至导致闭环系统不稳定.对此，目前工程上常用的方法是在实际应用前，通过大量的数字仿真，模拟实际过程中可能出现的不同的对象特性，以检验控制系统的稳定性、鲁棒性等闭环性能.这种方法的计算量很大，而且只能考虑极有限的组合情况.为此，国内外许多学者对众多 MPC 算法的闭环性能以及与控制参数的关系进行了深入的理论研究.Garcia and Morari 首次在内模控制的结构下分析了一种原型单输入单输出（SISO）MPC 算法的闭环稳定性[2]，文[3]推导得到了这种原型 MPC 算法的鲁棒稳定条件.席裕庚教授等人在内模控制的结构下，分析了 SISO 动态矩阵控制（DMC）与广义预测控制系统的闭环性能[4,5].由此可见，对于常用 MPC 算法闭环性能的分析，目前基本上都局限于 SISO 系统.而实际应用中的 MPC 算法主要针对 MIMO 系统.因而，迫切需要研究分析多变量 MPC 系统的闭环稳定性问题.

本文直接针对 MIMO 系统，定量分析无约束 DMC 系统的闭环稳定条件.首先基于脉冲响应（FIR）模型重新描述了 DMC 算法；在此基础上，推导得到了 DMC 系统的闭环稳定条件，从而为分析与设计预测控制系统提供了理论依据.

2 基于 FIR 模型的 DMC 算法（DMC algorithm based on FIR models）

DMC 算法最初是由壳牌石油公司 Cutler 等人基于阶跃响应模型提出的一种计算机控制算法[6].Garcia 等人提出了其改进算法 QDMC[7].为便于闭环性能分析，首先基于 FIR 模型重述 DMC 算法.

假设某一开环稳定的线性 MIMO 过程可用以下脉冲响应（FIR）模型来描述

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N} h(i)u(k-i) + d(k), \qquad (1)$$

其中 $y(k) \in \mathbb{R}^{ny}$ 为过程输出，$d(k) \in \mathbb{R}^{ny}$ 为过程输出扰动，$u(k) \in \mathbb{R}^{nu}$ 为控制输入；$h(i) \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$ $(i = 1, \cdots, N)$ 为输入输出脉冲响应系数矩阵；nu，ny

收稿日期：1999－03－29；收修改稿日期：2000－05－26.

分别为被控过程输入与输出变量数，N 为脉冲响应的截断步长.

基于上述 FIR 模型，过程的输出预测值 $\hat{y}(k+j)$ 可分解为：

$$\begin{cases} \hat{y}(k+j) = \hat{y}^f(k+j) + \hat{y}^p(k+j) + \hat{d}(k+j), \\ \hat{y}^f(k+j) = \sum\limits_{i=1}^{j} \hat{h}(i)u(k+j-i), \\ \hat{y}^p(k+j) = \sum\limits_{i=j+1}^{N} \hat{h}(i)u(k+j-i), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\hat{y}^p(k+j)$ 反映了过去输入对未来输出的影响，$\hat{y}^f(k+j)$ 表示了未来输入对未来输出的作用，而 $\hat{d}(k+j)$ 间接反映了外部扰动或对象特性变化对输出的影响. 这里，$\hat{h}(i)$ 为测量得到的脉冲响应系数矩阵，通常不同于对象本身的 FIR 系数矩阵 $h(i)$，$i = 1,\cdots,N$. 由于外部扰动 $d(k)$ 无法预测，这里假设扰动均为阶跃扰动，而且

$$\hat{d}(k+j) = \hat{d}(k) = y(k) - \sum_{i=1}^{N} \hat{h}(i)u(k-i), \tag{3}$$

这里 $y(k)$ 为过程输出在 k 时刻的测量值.

DMC 算法的目的在于寻找未来控制变化序列 $\{\Delta u(k),\cdots,\Delta u(k+m-1)\}$ 以使下列目标函数极小化

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{p} (r(k) - \hat{y}(k+j))^{\mathrm T} Q_j (r(k) - \hat{y}(k+j)) + \sum_{i=0}^{m-1} \Delta u^{\mathrm T}(k+i) R_i \Delta u(k+i), \tag{4}$$

其中 m 为控制时域，p 为预测时域，通常要求 $p > m$；$r(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 为过程输出 $y(k)$ 的参考设定值，Q_j 与 R_i 分别为输出误差与输入变化的加权系数矩阵. 目标函数 $\Phi(k)$ 一方面驱使未来输出序列接近理想的设定值，同时使控制输入的改变量尽可能小.

首先定义预测误差序列

$$e(k+j) = r(k) - \hat{y}(k+j) = \hat{e}(k+j) - \hat{y}^f(k+j), \tag{5}$$

其中

$$\hat{e}(k+j) = r(k) - \hat{y}^p(k+j) - \hat{d}(k+j). \tag{6}$$

由于假设控制输入自 m 步后保持不变，即 $u(k+m+i) = u(k+m-1), i \geqslant 0$；或者 $\Delta u(k+m+i) = 0, i \geqslant 0$ 以及

$$\hat{y}^f(k+j) = \sum_{i=1}^{j} \hat{h}(i)u(k+j-i) = \sum_{i=0}^{j-1} \hat{h}(j-i)u(k+i),$$

因而当 $j \geqslant m$ 时，有

$$\hat{y}^f(k+j) = \sum_{i=0}^{m-2} \hat{h}(j-i)u(k+i) + c(j-m+1)u(k+m-1). \tag{7}$$

其中

$$c(j-m+1) = \sum_{i=m-1}^{j-1} \hat{h}(j-i) = \sum_{i=1}^{j-m+1} \hat{h}(i), \ \forall j \geqslant m.$$

令

$$\begin{cases} u = \begin{pmatrix} u(k) \\ \vdots \\ u(k+m-1) \end{pmatrix}, \ \hat{y}^f = \begin{pmatrix} \hat{y}^f(k+1) \\ \vdots \\ \hat{y}^f(k+p) \end{pmatrix}, \\ e = \begin{pmatrix} e(k+1) \\ \vdots \\ e(k+p) \end{pmatrix}, \ \hat{e} = \begin{pmatrix} \hat{e}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{e}(k+p) \end{pmatrix}, \\ H = \begin{pmatrix} \hat{h}(1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{h}(m-1) & \cdots & \hat{h}(1) & 0 \\ \hat{h}(m) & \cdots & \hat{h}(2) & c(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{h}(p) & \cdots & \hat{h}(p-m+2) & c(p-m+1) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{8}$$

则

$$\hat{y}^f = Hu, \ e = \hat{e} - Hu. \tag{9}$$

由于 $\Delta u(k+i-1) = u(k+i-1) - u(k+i-2), \forall i \geqslant 1$. 令

$$\Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} I_{nu} \\ 0_{nu} \\ \vdots \\ 0_{nu} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} I_{nu} & 0 & & 0 \\ -I_{nu} & I_{nu} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -I_{nu} & I_{nu} \end{pmatrix},$$

则

$$\Delta u = Gu - Bu(k-1). \tag{10}$$

令

$$Q = \mathrm{diag}(Q_1 \cdots Q_p), \ R = \mathrm{diag}(R_1 \cdots R_m),$$

则

$$\Phi(k) = (\hat{e} - Hu)^{\mathrm T} Q (\hat{e} - Hu) + (Gu - Bu(k-1))^{\mathrm T} R (Gu - Bu(k-1)), \tag{11}$$

其最小二乘解为

$$u = (H^{\mathrm T}QH + G^{\mathrm T}RG)^{-1}(H^{\mathrm T}Q\hat{e} + G^{\mathrm T}RBu(k-1)). \tag{12}$$

由于 DMC 采用滚动优化,只有控制输入 u 的第一项加入被控过程,即

$$u(k) = K_e\hat{e} + K_u u(k-1), \tag{13}$$

其中

$$K_e = B^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}}QH + G^{\mathrm{T}}RG)^{-1}H^{\mathrm{T}}Q,$$
$$K_u = B^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}}QH + G^{\mathrm{T}}RG)^{-1}G^{\mathrm{T}}RB,$$

或者

$$u(k) = \sum_{j=1}^{p} K_{ej}\hat{e}(k+j) + K_u u(k-1).$$

3 多变量 DMC 系统的闭环稳定条件(Closed-loop stability conditions of MIMO DMC systems)

由于

$$\hat{e}(k+j) = r(k) - \sum_{i=j+1}^{N}\hat{h}(i)u(k+j-i) - y(k) + \sum_{i=1}^{N}\hat{h}(i)u(k-i),$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N}h(i)u(k-i) + d(k),$$

并假设 $\hat{h}(N+j) = 0, j > 0$;

因而

$$u(k) = \sum_{j=1}^{p}K_{ej}(r(k)-d(k)) + K_u u(k-1) + \sum_{j=1}^{p}K_{ej}\sum_{i=1}^{N}(\hat{h}(i)-h(i)-\hat{h}(i+j))u(k-i),$$

或者

$$u(k) = K_r(r(k)-d(k)) + K_u u(k-1) - K_r\sum_{i=1}^{N}(h(i)-\hat{h}(i))u(k-i) - \sum_{i=1}^{N}K_i u(k-i), \tag{15}$$

其中

$$K_r = \sum_{j=1}^{p}K_{ej},\ K_i = \sum_{j=1}^{p}K_{ej}\hat{h}(i+j),$$
$$i = 1,\cdots,N.$$

令

$$x(k-1) = \begin{pmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-N) \end{pmatrix}, \text{则 } x(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-N+1) \end{pmatrix}.$$

由此可将(15)式转化为以下状态方程模型:

$$\begin{cases} x(k) = A_S \times x(k-1) + B_S \times (r(k) - d(k)), \\ u(k) = C_S \times x(k), \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$A_S = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1N} \\ I_{nu} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{nu} & \cdots & I_{nu} & 0_{nu} \end{pmatrix},\ B_S = \begin{pmatrix} K_r \\ 0_{nu} \\ \vdots \\ 0_{nu} \end{pmatrix},$$

$$C_S = (I_{nu}\ \ 0_{nu}\ \ \cdots\ \ 0_{nu}),$$
$$M_{11} = K_u + K_r(\hat{h}(1) - h(1)) - K_1,$$
$$M_{1i} = K_r(\hat{h}(i) - h(i)) - K_i,\ i = 1,\cdots,N.$$

基于(16)式,可直接得到以下稳定性定理.

定理 1 (无约束多变量 DMC 稳定性条件)对于开环稳定的线性 MIMO 被控过程(1)式,无约束多变量 DMC 控制器(13)式使闭环系统稳定的充分必要条件为 A_S 的所有特征值均在单位圆内.

4 算例(Example)

以壳牌石油公司原油精馏模型塔[8]为例,其归一化输入输出模型可表示为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G_m(s)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$G_m(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{4.05}{50s+1}e^{-27s} & \dfrac{1.77}{60s+1}e^{-28s} \\ \dfrac{5.39}{50s+1}e^{-18s} & \dfrac{5.72}{60s+1}e^{-14s} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 u_1, u_2 分别为原油精馏塔顶部与中部的拔出量;y_1, y_2 分别为塔顶部与中部产品的干点;模型中的时间常数单位为分.多变量 DMC 控制器按模型(17)式进行设计,下面分析对象特性变化与控制参数对于闭环稳定性的影响.

情形 1 若实际对象 $G_p(s) = G_m(s)$,并选取采样周期 $T_s = 4$ 分,截断步长 $N = 101$,控制时域 $m = 2$,预测时域 $p = 100$;输出误差加权阵为 $Q_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,控制输入变化加权阵为 $R_i = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{pmatrix}$.经计算得到 A_s 的所有特征值均在单位圆内,其中幅值最大值为 0.9332.由定理 1 可知,该预测控制系统渐近稳定.

情形 2 若采样周期 T_s 和其它控制器参数 N, m, p 等与情形 1 相同,而实际对象为 $G_p(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{4.05}{50s+1}e^{-27s} & \dfrac{3.77}{60s+1}e^{-28s} \\ \dfrac{5.39}{50s+1}e^{-18s} & \dfrac{5.72}{60s+1}e^{-14s} \end{pmatrix}$.经计算得到 A_S 的所有特征值均在单位圆内,其中幅值最大值为 0.9853.由定理 1 可知,尽管对象特性发生了变化,该预测控制系统仍然渐近稳定.

情形 3 若采样周期 T_s 和其它控制器参数 N, m, p 等与情形 1 相同，而实际对象为 $G_p(s) = \begin{pmatrix} \frac{3.05}{50s+1}e^{-27s} & \frac{3.77}{60s+1}e^{-28s} \\ \frac{5.39}{50s+1}e^{-18s} & \frac{5.72}{60s+1}e^{-14s} \end{pmatrix}$. 经计算得到 A_S 的部分特征值在单位圆以外，其中幅值最大值为 1.0128. 由定理 1 可知，由于对象特性变化过大，使闭环控制系统不稳定.

情形 4 若实际对象 $G_p(s) = G_m(s)$，控制时域 $m = 1$，预测时域 $p = 5$；而采样周期 T_s 和其它控制器参数与情形 1 相同. 经计算得到 A_S 的部分特征值在单位圆以外，其中幅值最大值为 1.0. 由定理 1 可知，由于预测时域太小，未能复盖整个动态过程，而使闭环控制系统无法渐近稳定.

经上述算例表明，基于本文所提出的 MIMO DMC 稳定性定理，无须进行闭环控制系统动态过程仿真，就能分析系统的闭环稳定性. 尽管矩阵 A_S 的维数较大，但采用 Matlab 之类的有效分析工具，对于 MIMO DMC 系统稳定性的分析，其运算量并不大，因而可广泛用于 MIMO 预测控制系统的分析与设计.

参考文献(References)

[1] Garcia C E, Prett D M and Morari M. Model predictive control: theory and practice—A survey [J]. Automatica, 1989, 25(3): 335 – 348

[2] Garcia C E and Morari M. Internal model control, Part 1: A unifying review and some new results [J]. Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development, 1982, 21(2): 308 – 323

[3] Badgwell T A. Robust stability conditions for SISO model predictive control algorithms [J]. Automatica, 1997, 33(7): 1357 – 1361

[4] Xi Yugeng, Li Junyi. Closed-loop analysis of predictive control for a class of industrial processes [J]. Acta Automatica Sinica, 1995, 21(1): 1 – 7 (in Chinese)

[5] Zhang Jun, Xi Yugeng. Several stability results on GPC systems [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(1): 24 – 30 (in Chinese)

[6] Cutler C R and Ramaker B L. Dynamic matrix control —a computer control algorithm [A]. Proc. Joint American Control Conf. [C], San Francisco, 1980

[7] Garcia C E and Morshedi A M Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC) [J]. Chemical Engineering Communications, 1986, 46(1 – 3): 73 – 87

[8] Lopez J F, Oliveira G H C, Favier G. Multivariable constrained predictive control methods applied to the Shell benchmark problem: a comparison [A]. Proc. 3rd European Control Conf. [C], Rome, Italy, 1995

本文作者简介

戴连奎 1963 年生. 1993 年获浙江大学工业自动化专业工学博士学位，现为浙江大学智能系统与决策研究所副教授. 目前主要研究方向为预测控制、软测量技术与过程优化及其工业应用.

(上接第 584 页)

non-regressor based approach [J]. Int. J. Control, 1996, 63(1): 41 – 54

[5] Qu Z, Dawson and Lim S L A new class of robust control laws for tracking of robots [J]. Int. J. Robotics Research, 1994, 13(4): 355 – 363

[6] Wang D, Wen C and Wang Y Robust control of robots using auxiliary polynomials: theory and experiments [J]. Int. J. Control, 1998, 70(4): 523 – 540

[7] LaSalle J and Lefschetz S. Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications [M] New York: Academic Press, 1961

[8] Bor-sen Chen and Yeong-chan Chang. Nonlinear mixed H_2/H_∞ control for robust tracking design of robotic systems [J]. Int. J. Control, 1997, 67(6): 837 – 857

本文作者简介

代 颖 1970 年生. 1991 年毕业于重庆大学自动化系，1994 年和 1998 年于西安交通大学人工智能与机器人所获工学硕士和博士学位，现在上海交通大学做博士后研究工作. 主要研究方向是机器人的非线性控制，鲁棒控制，自适应控制等 已发表文章 30 余篇.

施颂椒 见本刊 2001 年第 1 期第 11 页.