第 18 卷第 4 期
2001 年 8 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.18, No.4
Aug., 2001

文章编号: 1000-8152(2001)04-0593-04

变时滞不确定关联系统的分散鲁棒无记忆控制

叶卓映　孙继涛　余昭旭
(同济大学应用数学系·上海,200331)

摘要: 针对一类不确定项具有数值界的变时滞不确定关联系统,主要运用线性矩阵不等式(LMI)方法对其分散鲁棒无记忆控制问题进行了研究.首先,通过构造适当形式的 Lyapunov 泛函数,运用 LMI 方法与矢量不等式方法,提出了以一组 LMIs 有解作为系统可分散鲁棒无记忆控制的充分条件,并给出了系统在此条件下的控制律.然后,将求解一个具有 LMIs 约束的凸优化问题作为设计尽可能小反馈增益的分散鲁棒无记忆控制律的系统化方法,从而可以得到更符合实际的满意的分散无记忆控制律.

关键词: 分散控制; 鲁棒控制; 无记忆控制; 不确定系统; 线性矩阵不等式
文献标识码: A

Decentralized Memoryless Robust Control for Linear Uncertain Interconnected Systems with Time-Varying Delays

YE Zhuoying, SUN Jitao and YU Zhaoxu
(Department of Applied Mathematics, Tongji University · Shanghai, 200331, P.R.China)

Abstract: We use linear matrix inequality (LMI) approach to study the decentralized memoryless robust control problem for linear uncertain interconnected systems with time-varying delays. First, by constructing proper Lyapunov universal function and using LMI and vector inequalities, we present sufficient conditions for existence of decentralized memoryless robust stabilization and give the controller. Secondly, we present a systematic method for decentralized controllers with small feedback gain. So, we can derive more practical and satisfactory decentralized memoryless robust controllers.

Key words: decentralized control; robust control; memoryless control; uncertain system; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

由于以下三个原因,对变时滞不确定关联系统的分散鲁棒无记忆控制问题的研究在理论上和实际中都意义重大.第一,关联大系统的鲁棒无记忆分散控制[1]把高阶大系统分解成若干低阶子系统,对各子系统进行分别控制,且控制无记忆,其可靠性强,计算量少,实现起来也经济可靠,因此此方法意义重大.第二,在实际大系统中,由于环境变化等因素引起的不确定项往往具有数值界的表达形式,可表示为 $|\Delta| < E$,即矩阵 Δ 中每个元素的绝对值小于矩阵 E 中的相应元素,其中 E 为非负常数阵.这种表达形式不需要满足匹配条件,因而更具实际意义和一般性.基于不确定项的数值界表达形式,可以去掉不确定项分解后所附加的一些约束条件,从而有可能得到更易于实现的分散鲁棒控制器.第三,在实际工程中,由于惯性等因素的影响,系统还常含有时滞,且往往为变时滞.

LMI 方法[2]以其求解的高效性近来成为鲁棒分析与设计的一种重要工具.本文运用 LMI 方法研究一类不确定项具有数值界的变时滞不确定关联系统的分散鲁棒无记忆控制问题,得到了两个结果.其一,提出了大系统可分散无记忆镇定的一个充分条件;其二,提出了一种反馈增益尽可能小的分散鲁棒无记忆控制的设计方法.文[3]用 Riccati 方程方法研究了一类不确定性关联大系统的分散鲁棒控制问题.本文与文[3]比较,运用的 LMI 方法克服了计算繁杂、应用不便的问题,并将问题推广到了带变时滞的更一般的情况.

2 问题描述及引理(Problem statement and lemmas)

考虑一类由 N 个子系统构成的具有数值界的变时滞不确定性关联大系统:

收稿日期:1999-04-28; 收修改稿日期:2000-03-07.

$$\dot{X}_i(t)=[A_i+\Delta A_i(w_i)]X_i(t)+[B_i+\Delta B_i(s_i)]u_i(t)+\sum_{j=1}^{N}[A_{ij}+\Delta A_{ij}(r_{ij})]X_j(t-\tau_{ij}(t)). \quad (1)$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$, $X_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i}$, $u_i(t)\in\mathbb{R}^{m_i}$ 分别为状态向量和控制向量;A_i,B_i,A_{ij} 有适当的维数,A_i、B_i,A_{ij} 代表标称系统,(A_i,B_i) 是可控的,A_{ij} 为互联矩阵.$\Delta A_{ij},\Delta A_i,\Delta B_i$ 为时变不确定项,它们有如下数值界:

$$|\Delta A_i|<C_i,\ |\Delta A_{ij}|<D_{ij},\ |\Delta B_i|<E_i,\ i,j=1,2,\cdots,N. \quad (2)$$

其中 C_i,D_{ij} 和 E_i 为具有非负元素的实常阵,并分别与 $\Delta A_i,\Delta A_{ij},\Delta B_i$ 同维.$|\Delta|<\bar{\Delta}$ 的含义是 $|e_{ij}|\leqslant\bar{e}_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,N$,其中 e_{ij} 和 $\bar{e}_{ij}$ 分别为矩阵 Δ 和 $\bar{\Delta}$ 的第 ij 个对应元素.而其中的不确定参数满足 $\omega_i\in\Phi_i\subset\mathbb{R}^{p_i}$, $s_i\in\Psi_i\subset\mathbb{R}^{q_i}$ 以及 $r_{ij}\in\Theta_{ij}\subset\mathbb{R}^{k_{ij}}$,其中 $i,j=1,2,\cdots,N$, $\Phi_i,\Psi_i,\Theta_{ij}$ 为有界紧集.另外,变时滞 τ_{ij} 满足

$$0\leqslant\tau_{ij}(t)\leqslant\tau<+\infty,\ 0\leqslant\dot{\tau}_{ij}(t)\leqslant h<1. \quad (3)$$

下面给出两个引理:

引理 1[4] 设 X 和 Y 是具有适当维数的向量或矩阵,则对任意的正数 $\alpha>0$,有

$$X^{\mathrm{T}}Y+Y^{\mathrm{T}}X\leqslant\alpha X^{\mathrm{T}}X+\alpha^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y$$

成立.

引理 2 若 $n\times m$ 阶矩阵 ΔA 满足 $|\Delta A|<D$,则

$$\Omega(D)\geqslant\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}},\ \Gamma(D)\geqslant\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A.$$

式中

$$\Omega(D)=\begin{cases}\|DD^{\mathrm{T}}\|I_{n\times n}, & \|DD^{\mathrm{T}}\|I_{n\times n}<n\cdot\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}}),\\ n\cdot\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}}), & \text{其它},\end{cases}$$

$$\Gamma(D)=\begin{cases}\|D^{\mathrm{T}}D\|I_{m\times m}, & \|D^{\mathrm{T}}D\|I_{m\times m}<m\cdot\mathrm{diag}(D^{\mathrm{T}}D),\\ m\cdot\mathrm{diag}(D^{\mathrm{T}}D), & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $I_{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 单位方阵,$I_{m\times m}$ 表示 $m\times m$ 单位方阵,$\mathrm{diag}(R)=\mathrm{diag}(r_{11},r_{22},\cdots,r_{nn})$, $R=(r_{ij})$ 为 n 阶对称阵.

证 我们只证明 $\Omega(D)\geqslant\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}$ 成立,另一式子的证明类似可证.

$\Omega(D)\geqslant\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}$ 的证明可分两步:

1) $\|DD^{\mathrm{T}}\|I_{n\times n}\geqslant\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}$;

2) $n\cdot\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}})\geqslant\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}$.

先证明1).由 $|\Delta A|<D$ 显然可知 $\|DD^{\mathrm{T}}\|\geqslant\|\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}\|$,所以

$$\|DD^{\mathrm{T}}\|I_{n\times n}\geqslant\|\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}\|I_{n\times n}\geqslant\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}}.$$

再证明 2),与文献[5]中证明类似,设 $D=(d_{ij})$, $\Delta A=(a_{ij})$,则对所有的 $x\in\mathbb{R}^n$,有

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{T}}[n\cdot\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}})]x&=n\cdot\sum_{i,k}x_i d_{ik}d_{ik}x_i=\\ &\frac{1}{2}\Big(\sum_{j,i,k}x_i d_{ik}d_{ik}x_i+\sum_{i,j,k}x_j d_{jk}d_{jk}x_j\Big)\geqslant\\ &\frac{1}{2}\Big(\sum_{j,i,k}x_i a_{ik}a_{ik}x_i+\sum_{i,j,k}x_j a_{jk}a_{jk}x_j\Big)\geqslant\\ &\sum_{i,j,k}x_i a_{ik}a_{jk}x_j=x^{\mathrm{T}}(\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A)x.\end{aligned}$$

这样,显然 $n\cdot\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}})\geqslant\Delta A\Delta A^{T}$ 成立.2)得证.从而引理2得证.

注 1 引理2中矩阵范数 $\|M\|$ 定义为 M 的最大奇异值,即 $\|M\|=\delta_{\max}[M]=(\lambda_{\max}[M^{*}M])^{\frac{1}{2}}$,矢量范数 $\|a\|$ 定义为 a 的 2 范数,即 $\|a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$,其中 a_i 是 n 维向量 a 的第 i 个元素.

3 主要结果(Main results)

定理 1 对于满足式(2),(3)的滞后不确定关联系统(1),如果存在矩阵 Y_i,正定矩阵 Q_i,正数 β_i,使下面 LMIs:

$$\begin{bmatrix}\bar{A}_i & Q_i\Gamma(C_i)^{\frac{1}{2}} & Y_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)^{\frac{1}{2}} & Q_i\\ \Gamma(C_i)^{\frac{1}{2}}Q_i & -\alpha_i I & 0 & 0\\ \Gamma(E_i)^{\frac{1}{2}}Y_i & 0 & -\beta_i I & 0\\ Q_i & 0 & 0 & -F_{3i}^{-1}\end{bmatrix}<0 \quad (4)$$

成立,那么系统(1)可分散无记忆状态反馈镇定.反馈增益阵 $K_i=Y_iQ_i^{-1}$,其中

$$\bar{A}_i=A_iQ_i+Q_iA_i^{\mathrm{T}}+(\alpha_i+\beta_i)I+B_iY_i+Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+F_{1i}+F_{2i},$$

$$F_{1i}=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}},$$

$$F_{2i}=\sum_{j=1}^{N}\Omega(D_{ij}),$$

$$F_{3i}=\frac{2N}{1-h}I.$$

证 对系统(1)采用控制律 $u_i=k_ix_i$,则闭环子系统为

$$\dot{X}_i(t)=[A_i+\Delta A_i]X_i(t)+[B_i+\Delta B_i]K_iX_i(t)+\sum_{j=1}^{N}[A_{ij}+\Delta A_{ij}]X_j(t-\tau_{ij}(t)). \quad (5)$$

考虑如下 Lyapunov 泛函

$$V(x_t)=\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{\mathrm{T}}P_ix_i+\frac{2}{1-h}\sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}x_j^{\mathrm{T}}(s)x_j(s)\mathrm{d}s\right),$$

其中 P_i 为正定阵. 显然 $V(x_i)$ 正定.

$V(x_t)$ 沿系统(5)的轨线的时间导数为

$$\begin{aligned}&\dot V(x_t)=\\&\sum_{i=1}^{N}[x_i^{\mathrm{T}}P_i\dot x_i+\dot x_i^{\mathrm{T}}P_ix_i+\frac{2}{1-h}\sum_{j=1}^{N}(x_j^{\mathrm{T}}x_j-\\&(1-\dot\tau_{ij}(t))x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t)))]=\\&\sum_{i=1}^{N}\{x_i^{\mathrm{T}}(P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_i\Delta A_i+\Delta A_i^{\mathrm{T}}P_i+\\&P_iB_iK_i+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+P_i\Delta B_iK_i+K_i^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}}P_i)x_i+\\&2x_i^{\mathrm{T}}P_i\sum_{j=1}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij})x_j(t-\tau_{ij}(t))+\\&\frac{2}{1-h}\sum_{j=1}^{N}[x_j^{\mathrm{T}}x_j-(1-\dot\tau_{ij}(t))x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t))]\}.\end{aligned}\tag{6}$$

由引理 1, 引理 2 可知:

$$P_i\Delta A_i+\Delta A_i^{\mathrm{T}}P_i\leqslant\alpha_iP_iP_i+\alpha_i^{-1}\Delta A_i^{\mathrm{T}}\Delta A_i\leqslant\alpha_iP_iP_i+\alpha_i^{-1}\Gamma(C_i),\tag{7}$$

$$P_i\Delta B_iK_i+K_i\Delta B_i^{\mathrm{T}}P_i\leqslant\beta_iP_iP_i+\beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}}\Delta B_iK_i\leqslant\beta_iP_iP_i+\beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)K_i.\tag{8}$$

在引理 1 中令 $\alpha=1$, 可得:

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}P_i\sum_{j=1}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij})X_j(t-\tau_{ij}(t))\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[x_i^{\mathrm{T}}P_i(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}}+\Delta A_{ij}\Delta A_{ij}^{\mathrm{T}})P_iX_i+\\&2X_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij}(t))X_j(t-\tau_{ij}(t))]\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[x_i^{\mathrm{T}}P_i(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}}+\Omega(D_{ij}))P_iX_i+\\&2X_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij}(t))X_j(t-\tau_{ij}(t))].\end{aligned}\tag{9}$$

将式(7)、(8)、(9)代入式(6), 并由式(3)知:

$$\begin{aligned}&\dot V(x_t)\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N}\{x_i^{\mathrm{T}}[P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+\alpha_iP_iP_i+\alpha_i^{-1}\Gamma(C_i)+\\&P_iB_iK_i+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+\beta_iP_iP_i+\beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)K_i]x_i+\\&\sum_{j=1}^{N}[x_i^{\mathrm{T}}P_i(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}}+\Omega(D_{ij}))P_ix_i+2x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij})x_j(t-\tau_{ij})]+\\&\sum_{j=1}^{N}[\frac{2}{1-h}x_j^{\mathrm{T}}x_j-2x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t))]\}=\\&\sum_{j=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}[P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+\alpha_iP_iP_i+\alpha_i^{-1}\Gamma(C_i)+\\&P_iB_iK_i+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+\beta_iP_iP_i+\\&\beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}(E_i)K_i+P_iF_{1i}P_i+P_iF_{2i}P_i+F_{3i}]x_i,\end{aligned}$$

其中

$$F_{1i}=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}},$$

$$F_{2i}=\sum_{j=1}^{N}\Omega(D_{ij}),$$

$$F_{3i}=\frac{2N}{1-h}I.$$

由 Lyapunov 稳定性定理知, 如果不等式

$$\begin{aligned}&P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+\alpha_iP_iP_i+\alpha_i^{-1}\Gamma(C_i)+\\&P_iB_iK_i+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+\beta_iP_iP_i+\\&\beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)K_i+P_iF_{1i}P_i+P_iF_{2i}P_i+F_{3i}<0\end{aligned}\tag{10}$$

有正定对称解 P_i, 则变时滞不确定性大系统(1)可分散状态反馈镇定.

在式(10)两边分别左乘和右乘 P_i^{-1}, 记 $Q_i=P_i^{-1}$, $Y_i=K_iQ_i$, 得

$$\begin{aligned}&A_iQ_i+Q_iA_i^{\mathrm{T}}+\alpha_iI+\alpha_i^{-1}Q_i\Gamma(C_i)Q_i+\\&B_iY_i+Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+\beta_iI+\beta_i^{-1}Y_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)Y_i+\\&F_{1i}+F_{2i}+Q_iF_{3i}Q_i<0.\end{aligned}\tag{11}$$

由 Schur 补, 知式(11)等价于 LMIs 式(4), 于是定理 1 得证.

注 2　用 MATLAB 软件中有关 LMI 的相应命令可方便地根据定理 1 求得分散稳定化控制律. 定理 1 的方法不仅给出了一个分散稳定化控制律, 而且给出了一组分散稳定化控制律的参数化表示. 从而, 便于设计满足一定附加要求的分散稳定化控制器.

定理 2　如果凸优化问题

$$\min[\sum_{i=1}^{N}(\bar\alpha_i+\bar\beta_i)],\ \bar\alpha_i>0,\ \bar\beta_i>0,$$

约束条件为 LIMs(4)及下面式子

$$\begin{bmatrix}-\bar\alpha_iI & Y_i^{\mathrm{T}}\\ Y_i & -I\end{bmatrix}<0,\ \begin{bmatrix}Q_i & I\\ I & \bar\beta_iI\end{bmatrix}>0\tag{12}$$

有解, 则可保证系统(1)具有较小的反馈增益 $K_i=Y_iQ^{-1}$.

证　考虑

$$Y_i^{\mathrm{T}}Y_i<\bar\alpha_iI,\ Q_i^{-1}<\bar\beta_iI,\tag{13}$$

其中 $\bar\alpha_i>0,\bar\beta_i>0$. 由于 $K_i=Y_iQ_i^{-1}$, 则

$$K_i^{\mathrm{T}}K_i=Q_i^{-1}Y_i^{\mathrm{T}}Y_iQ_i^{-1}<\bar\alpha_i\bar\beta_i^2I.$$

因此可以通过使 $\bar\alpha_i,\bar\beta_i$ 的极小化来保证分散控制律具有较小的反馈增益, 这样, 可以建立一个凸优化问题

$$\min[\sum_{i=1}^{N}(\bar\alpha_i,+\bar\beta_i)],\ \bar\alpha_i>0,\ \bar\beta_i>0,$$

约束条件为式(13).

只要此凸优化问题有解,便可以保证系统(1)的反馈增益足够小.而由初等变换易知式(13)等价于式(12),故定理2得证.

注3 定理2中的凸优化问题具有一组LMIs约束,可以应用MATLAB的LMI软件中的mincx命令求解,故求解方便易行.

注4 定理2提供了一种设计具有较小反馈增益的分散稳定化控制律的系统化方法,克服了现有方法中靠盲目试凑参数来寻找具有较小反馈增益的分散稳定化控制律的缺陷.

参考文献(References)

[1] Mahmoud M S. Stabilizing control for a class of uncertain interconnected systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994,39(12): 2484 – 2488

[2] Iwaski T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994,30(8):1307 – 1317

[3] Liu Xinyu, Gao Liqun, Zhang Wenli. Decentralized robust control for linear uncertain interconnected systems [J]. Information and Control, 1998,27(5):342 – 350 (in Chinese)

[4] Wang Y Y, Xie L H, E de SouZa. Robust control of uncertain nonlinear systems [J]. Systems & Control Letters, 1992,19(1):139 – 149

[5] Mehdi D, Hamid M A, Perrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems [J]. Automatica, 1996,32(7):1081 – 1083

本文作者简介

叶卓映 1974年生.硕士研究生.研究领域:时滞不确定系统的鲁棒控制.

孙继涛 1963年生.教授.研究领域:时滞不确定系统的鲁棒控制,容错控制.

余昭旭 1978年生.硕士研究生.研究领域:时滞不确定系统的鲁棒控制.

(上接第592页)

Advanced Algebraic [M]. Beijing: Advanced Education Press, 1992 (in Chinese)

[6] Li Z, Zhang B, Mao Z Y and M. H Pong. Analysis of the chaotic phenomena in permanent-magnet synchronous motors based on poincare map [A]. IEEE Proceeding of the 3rd Congress on Intelligent Control and Automation'2000 [C], Hefei, 2000,3255 – 3258

本文作者简介

张 波 1962年生.博士,教授,博士生导师.1982年毕业于浙江大学电机专业,1994年在南京航空航天大学电力电子技术专业获博士学位.已发表论文60多篇.目前研究方向:交流传动和电力电子技术.

李 忠 1970年生.博士,讲师.发表论文多篇.目前研究方向:现代控制理论及应用.

毛宗源 见本刊2001年第2期第165页.

侯晓梅 见本刊2001年第2期第284页.

庞敏熙 1961年生.博士,副教授.1983年毕业于英国伯明翰大学电机系,1987年在英国剑桥大学电力电子技术专业获博士学位.已发表论文数十篇.研究方向:电力电子技术