第 18 卷第 4 期
2001 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.18, No.4
Aug., 2001

文章编号: 1000-8152(2001)04-0605-04

非线性离散不确定系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制 *

钟麦英　汤兵勇　　　　黄小原
(东华大学工商管理学院·上海,200051)　(东北大学工商管理学院·沈阳,110006)

摘要: 研究具有不确定非线性离散系统的鲁棒性能准则问题.基于二人零和动态对策理论,给出并证明了系统鲁棒稳定以及扰动衰减问题解存在的充分条件,通过求解离散时间 Hamilton-jacobi-Isaacs 方程给出了其鲁棒 H_∞ 状态反馈控制解.

关键词: 鲁棒性; 二人零和动态对策; Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程; H_∞ 控制
文献标识码: A

The Robust H_∞ State Feedback Control of Nonlinear Discrete-Time System with Uncertainty

ZHONG Maiying　and　TANG Bingyong
(Business and Management School, Donghua University · Shanghai, 200051, P.R.China)
HUANG Xiaoyuan
(Business and Management School, Northeastern University · Shenyang, 110006, P.R.China)

Abstract: This paper investigated the problem of robust performance index about uncertain discrete-time nonlinear systems. Based on the concept of two-person zero-sum differential game, the sufficient conditions for the existence of an H_∞ state feedback controller to guarantee the robust stability and disturbance attenuation level is obtained, and the solution is given in terms of Hamilton-Jacobi-Isaacs equation.

Key words: robustness; two-person zero-sum differential game; Hamilton-Jacobi-Isaacs equation; H_∞ control

1 引言(Introduction)

近年来,线性离散系统的鲁棒性能分析以及鲁棒控制问题已经取得了很多成果[1~4],基于微分对策和耗散理论,文[5,6]给出了非线性离散系统 H_∞ 控制问题的求解,但是对于具有参数不确定性的非线性离散系统的鲁棒稳定性以及扰动衰减问题的研究还很不充分.本文将基于动态对策理论,研究不确定性非线性离散系统的鲁棒性能准则问题,并通过求解离散 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程给出其鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题的解.

2 问题描述(Problem statement)

对于具有非线性函数摄动的非线性离散系统

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + \Delta f(x_k) + g(x_k)w_k, \\ z_k &= h(x_k), \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $x_k \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ 状态向量(M 为状态向量集), $w_k \in \mathbb{R}^r$ 为属于 l_2 范数有界的外部输入信号, $z_k \in \mathbb{R}^p$ 控制输出变量, $f(x_k), g(x_k), h(x_k)$ 为相应维数的充分可微函数阵或向量,且在平衡点 $x = 0$ 处 $f(0) = 0$, $\Delta f(x_k)$ 表示不确定的摄动函数,可以是建模误差或被控对象的参数摄动引起的不确定性,且不失一般性设 $\Delta f(x_k) = e_f(x_k)\delta_f(x_k)$,这里 $e_f(x_k)$ 为已知的充分可微函数, $\delta_f(x_k)$ 充分可微且 $\delta_f(0) = 0$,

$$\|\delta_f(x_k)\| \leq \|m_f(x_k)\|, \ \forall x_k \in M,$$

这里 $m_f(x_k)$ 为范数有界的已知函数, $\|\cdot\|$ 表示 Eudlidean 范数.

$$\Omega_f: \triangleq \{\Delta f(x_k) \mid \Delta f(x_k) = e_f(x_k)\delta_f(x_k), \\ \|\delta_f(x_k)\| \leq \|m_f(x_k)\|, \delta_f(0) = 0, \forall x_k \in M\}.$$

定义 1 给定 $\gamma > 0$,如果对于任意的函数不确定性摄动 $\Delta f(x_k) \in \Omega_f$,系统(1)渐近稳定且系统具有小于等于 γ 的 l_2 增益,则称系统满足鲁棒 H_∞ 性能准则.

考虑如下控制系统

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) + \Delta f(x_k) + (g_1(x_k) + \\ \qquad \Delta g_1(x_k))u_k + g_2(x_k)w_k, \\ z_k = h(x_k) + l(x_k)u_k. \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 1998-09-03; 收修改稿日期: 2000-09-05.

其中，x_k, w_k 和 z_k 同(1)，$u_k \in \mathbb{R}^p$ 为控制输入信号，$f(x_k), g_1(x_k), g_2(x_k), h(x_k)$ 和 $l(x_k)$ 为相应维数的充分可微函数阵或向量，且在平衡点 $x = 0$ 处 $f(0) = 0$，另外为简单起见设 $l^T(x_k)h(x_k) = 0$. $\Delta f(x_k)$ 与 $\Delta g_1(x_k)$ 表示不确定的摄动函数，可以是建模误差或被控对象的参数摄动引起的不确定性，且

$\Delta f(x_k) \in \Omega_f,\ \Delta g_1(x_k) \in \Omega_g$,

$$\Omega_g:\triangleq \{\Delta g_1(x_k) \mid \Delta g_1(x_k) = e_g(x_k)\delta_g(x_k),$$
$$\|\delta_g(x_k)\| \leqslant \|m_g(x_k)\|, \delta_g(0)=0,\ \forall x_k \in M\}.$$

$e_g(x_k)$ 为已知的充分可微函数，$m_g(x_k)$ 为范数有界的已知函数. 本文要解决的主要问题是求状态反馈控制器，使对于 $\forall \Delta f(x_k) \in \Omega_f$ 和 $\forall \Delta g_1(x_k) \in \Omega_g$，闭环系统内部稳定且具有小于等于 γ 的 l_2 增益，即满足鲁棒 H_∞ 性能准则.

3 主要结论(Main results)

为了给出问题的求解，首先引入如下两个引理，即

引理 1[5] 对于系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)w_k,\ z_k = h(x_k),$$

如果存在连续可微的正定函数 $V(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, V(0) = 0$ 且在 $x = 0$ 的某邻域内满足

A1) $g^T(0)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)g(0) - \gamma^2 I < 0$;

A2)
$$V(f(x_k) + g(x_k)w_k^*) - V(x_k) + \frac{1}{2}(\|z_k\|^2 - \gamma^2\|w_k^*\|^2) = 0.$$

这里 $w_k = w_k^*(x_k)$ 且 $w_k^*(0) = 0$，为满足方程

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \beta}\right|_{\beta = f(x_k)+g(x_k)w_k} g(x_k) - \gamma^2 w_k^T = 0$$

的唯一解.

A3) 系统零状态可观测，即满足

$$z_k|_{w_k=0} = h(x_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = 0,$$

则系统内部稳定且 l_2 增益不大于 γ.

引理 2[5] 对于系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + g_1(x_k)u_k + g_2(x_k)w_k,$$
$$z_k = h(x_k) + l(x_k)u_k,$$

给定 $\gamma > 0$，如果存在连续可微的正定函数 $V(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, V(0) = 0$ 且在 $x = 0$ 的某邻域内满足

H1)
$$g_1^T(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)g_1(0) + l^T(0)l(0) > 0,$$
$$g_2^T(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)g_2(0) - \gamma^2 I < 0.$$

H2) 离散时间 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程

$$V(f(x_k) + g_1(x_k)u_k^*(x_k) + g_2(x_k)w_k^*(x_k)) - V(x_k) + \frac{1}{2}(\|z_k\|^2 - \gamma^2\|w_k^*(x_k)\|^2) = 0$$

成立，其中满足 $u_k^*(0) = 0$ 和 $w_k^*(0) = 0$ 的 $u_k = u_k^*(x_k), w_k = w_k^*(x_k)$ 是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial \beta}g_1(x_k) + u_k^T l^T(x_k)l(x_k) = 0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial \beta}g_2(x_k) - \gamma^2 w_k^T = 0\end{cases}$$

的解，$\beta = f(x_k) + g_1(x_k)u_k + g_2(x_k)w_k$.

H3) $x_{k+1} = f(x_k) + g_1(x_k)u_k$ 在约束条件 $h(x_k) + l(x_k)u_k = 0$ 下，$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ 成立.

则状态反馈控制器 $u_k = u_k^*(x_k)$ 使闭环系统内部稳定且 l_2 增益小于等于 γ.

下面给出本文的主要结论，即

定理 1 对于系统(1)，如果存在适当的常数 $\lambda_f > 0$，使存在连续可微的正定函数 $V(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$V(0) = 0$ 且在 $x = 0$ 的某邻域内满足

$A1)_G$

$$g^T(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)g(0) - \gamma^2 I < 0,$$
$$e_f^T(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)e_f(0) - e_f^T(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)\cdot g(0)\left(g^T(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)g(0) - \gamma^2 I\right)^{-1}\cdot g^T(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)e_f(0) - \frac{1}{\lambda_f^2}I < 0.$$

$A2)_G$ 离散 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程

$$V(f(x_k) + e_f(x_k)\delta_f^*(x_k) + g(x_k)w_k^*) - V(x_k) + \frac{1}{2}(\|z_k\|^2 + \lambda_f^{-2}\|m_f(x_k)\|^2 - \gamma^2\|w_k^*\|^2 - \lambda_f^{-2}\|\delta_f^*(x_k)\|^2) = 0$$

成立，其中 $w_k = w_k^*(x_k), \delta_f(x_k) = \delta_f^*(x_k), \delta_f^*(0) = 0, w_k^*(0) = 0$，是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial \beta}g(x_k) - \gamma^2 w_k^T = 0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial \beta}e_f(x_k) - \dfrac{1}{\lambda_f^2}\delta_f^T(x_k) = 0\end{cases}$$

的解，

$$\beta = f(x_k) + \Delta f(x_k) + g(x_k)w_k,$$

则系统(1)满足鲁棒 H_∞ 性能准则.

证 若存在适当常数 $\lambda_f > 0$ 使得假设条件 $A1)_G, A2)_G$ 成立，引入 $\bar{z}_k = \begin{bmatrix} z_k \\ \lambda_f^{-1}m_f(x_k)\end{bmatrix}$ 得

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) + \\ \qquad [\gamma^{-1}g(x_k) \quad \lambda_f e_f(x_k)]\begin{bmatrix} \gamma w_k \\ \lambda^{-1}\delta_f(x_k)\end{bmatrix}, \\ \hat{z}_k = \begin{bmatrix} h(x_k) \\ \lambda_f^{-1}m_f(x_k)\end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

令

$$\hat{g}(x_k) = [\gamma^{-1}g(x_k) \quad \lambda_f e_f(x_k)],$$

$$\hat{w}_k = \begin{bmatrix} \gamma w_k \\ \lambda_f^{-1}\delta_f(x_k)\end{bmatrix},\ \hat{h}(x_k) = \begin{bmatrix} h(x_k) \\ \lambda_f^{-1}m_f(x_k)\end{bmatrix},$$

进一步将式(3)简写为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + \hat{g}(x_k)\hat{w}_k, \\ z_k &= \hat{h}(x_k). \end{aligned} \tag{4}$$

对于系统(4),容易验证 $A1)_G \sim A3)_G$ 等价于引理1的A1)~A3),根据引理1可得

$$\sum_{k=0}^{N} \| \hat{z}_k \|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{N} \| \hat{w}_k \|^2 \ \forall N,\ \forall \delta_f(x_k) \in \Omega_f,$$

即

$$\sum_{k=0}^{N} \| \hat{z}_k \|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{N} \left\| \begin{bmatrix} \gamma w_k \\ \lambda_f^{-1}\delta_f(x_k)\end{bmatrix} \right\|^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} \| z_k \|^2 + \sum_{k=0}^{N} \| \lambda_f^{-1}m_f(x_k) \|^2 \leqslant$$

$$\gamma^2 \sum_{k=0}^{N} \| w_k \|^2 + \sum_{k=0}^{N} \| \lambda_f^{-1}\delta_f(x_k) \|^2 \leqslant$$

$$\gamma^2 \sum_{k=0}^{N} \| w_k \|^2 + \sum_{k=0}^{N} \| \lambda_f^{-1}m_f(x_k) \|^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} \| z_k \|^2 \leqslant \gamma^2 \sum_{k=0}^{N} \| w_k \|^2.$$

关于系统的鲁棒稳定性,Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H(x_k, \hat{w}_k) = & V(f(x_k) + \hat{g}(x_k)\hat{w}_k) - \\ & V(x_k) + \frac{1}{2}(\| \hat{z}_k \|^2 - \| \hat{w}_k \|^2). \end{aligned} \tag{5}$$

由 $A1)_G$ 可得

$$\left.\frac{\partial^2 H}{\partial \hat{w}_k^2}\right|_{x_k=0} = \hat{g}^{\mathrm{T}}(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)\hat{g}(0) - I < 0; \tag{6}$$

由 $A2)_G$ 可得

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{w}_k} = \left.\frac{\partial V}{\partial \beta}\right|_{\beta = f(x_k)+\hat{g}(x_k)\hat{w}_k} \hat{g}(x_k) - \hat{w}_k^{\mathrm{T}} = 0. \tag{7}$$

所以,存在 $x = 0$ 的某邻域 N_0,当 $\hat{w}_k = \hat{w}_k^*$ 时 $H(x_k, \hat{w}_k)$ 取得局部极大值 $H(x_k, \hat{w}_k^*) = 0$, 从而有

$$H(x_k, \hat{w}_k) \leqslant 0,\ \forall x \in N_0.$$

因此,当 $w_k = 0$ 时,

$$\begin{cases} V(x_{k+1}) - V(x_k) \leqslant -\frac{1}{2}(\| \hat{z}_k \|^2 - \| \hat{w}_k \|^2) = \\ -\frac{1}{2}(\| z_k \|^2 + \lambda_f^{-2}\| m_f(x_k) \|^2 - \lambda_f^{-2}\| \delta_f(x_k) \|^2) \leqslant \\ -\frac{1}{2}\| z_k \|^2 = -\frac{1}{2}\| h(x_k) \|^2 \leqslant 0, \\ \forall \Delta f(x_k) \in \Omega_f. \end{cases} \tag{8}$$

所以系统 Lyapunov 稳定,且仅当 $h(x_k) = 0$ 时 $V(x_{k+1}) - V(x_k) = 0$ 成立,由系统满足 $z_k|_{w_k=0} = h(x_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = 0$ 可得系统渐近稳定.

定理2 对于系统(2),如果存在适当的常数 $\lambda_f > 0$ 和 $\lambda_g > 0$,使存在连续可微的正定函数 $V(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(0) = 0$ 且在 $x = 0$ 的某邻域内满足

$H1)_G$

$$g_1^{\mathrm{T}}(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)g_1(0) + \| l(0) \|^2 + \lambda_g^{-2}\| m_g(0) \|^2 > 0,$$

$$\hat{g}_2^{\mathrm{T}}(0)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0)\hat{g}_2(0) - I < 0,$$

其中

$$\hat{g}_2(x_k) = [\gamma^{-1}g_2(x_k) \quad \lambda_f e_f(x_k) \quad \lambda_g e_g(x_k)].$$

$H2)_G$ 离散 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程

$$\begin{aligned} & V(f(x_k) + e_f(x_k)\delta_f^*(x_k) + g_1(x_k)u_k^*(x_k) + \\ & e_g(x_k)\delta_g^*(x_k)u_k^*(x_k) + g_2(x_k)w_k^*(x_k)) - \\ & V(x_k) + \frac{1}{2}(\| z_k \|^2 + \lambda_f^{-2}\| m_f(x_k) \|^2 - \\ & \gamma^2\| w_k^* \|^2 - \lambda_f^{-2}\| \delta_f^*(x_k) \|^2 = 0 \end{aligned}$$

成立,其中 $u_k = u_k^*(x_k), w_k = w_k^*(x_k), \delta_f(x_k) = \delta_f^*(x_k)$ 且 $\delta_f^*(0) = 0, u_k^*(0) = 0, w_k^*(0) = 0$, 是方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \beta}g_2(x_k) - \gamma^2 w_k^{\mathrm{T}} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta}(g_1(x_k) + e_g(x_k)\delta_g(x_k)) + (l^{\mathrm{T}}(x_k)l(x_k) + \\ \frac{1}{\lambda_g^2}(m_g^{\mathrm{T}}(x_k)m_g(x_k) - \delta_g^{\mathrm{T}}(x_k)\delta_g(x_k)))u_k^{\mathrm{T}} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta}e_f(x_k) - \frac{1}{\lambda_f^2}\delta_f^{\mathrm{T}}(x_k) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta}e_g(x_k) - \frac{1}{\lambda_g^2}u_k^{\mathrm{T}}(x_k)\delta_g^{\mathrm{T}}(x_k) = 0 \end{cases}$$

的解, $\beta = f(x_k) + \Delta f(x_k) + (g_1(x_k) + \Delta g_1(x_k))u_k + g_2(x_k)w_k$.

$H3)_G$ $w_k = 0$ 时系统零状态可观测,即

$$x_{k+1} = f(x_k) + \Delta f(x_k) + (g_1(x_k) + \Delta g_1(x_k))u_k$$

在 $h(x_k)+l(x_k)u_k=0$ 条件下使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$ 成立.

则对于 $\forall\Delta f(x_k)\in\Omega_f$ 和 $\forall\Delta g_1(x_k)\in\Omega_g$,状态反馈控制器 $u_k=u_k^*(x_k)$ 使闭环系统内部稳定且 l_2 增益小于等于 γ.

证 由系统(2)整理得增广系统

$$x_{k+1}=$$

$$f(x_k)+g_1(x_k)u_k+[\gamma^{-1}g_2(x_k)\quad \lambda_f e_f(x_k)\quad \lambda_g e_g(x_k)]\begin{bmatrix}\gamma w_k\\ \lambda_f^{-1}\delta_f(x_k)\\ \lambda_g^{-1}\delta_g(x_k)u_k\end{bmatrix}=f(x_k)+g_1(x_k)u_k+\hat{g}_2(x_k)\hat{w}_k,$$

$$\hat{z}_k=$$

$$\begin{bmatrix}h(x_k)+l(x_k)u_k\\ \lambda_f^{-1}m_f(x_k)\\ \lambda_g^{-1}m_g(x_k)u_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(x_k)\\ \lambda_f^{-1}m_f(x_k)\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l(x_k)\\ 0\\ \lambda_g^{-1}m_g(x_k)\end{bmatrix}u_k=$$

$$\hat{h}(x_k)+\hat{l}(x_k)u_k.$$

进一步,应用类似于定理1的证明方法,并根据引理2可以证明所得结论.

4 结束语(Conclusion)

将模型的未知有界不确定性函数摄动以及系统的 l_2 范数有界外部扰动归结为广义的 l_2 范数不确定扰动,应用二人零和微分对策理论,研究了不确定性非线性离散系统的鲁棒稳定以及扰动衰减问题,给出了其鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题解存在的充分条件和求解方法.

参考文献(References)

[1] Moheimani S O R, Savkin A V, Petersen I R. A connection between control and the absolute stability of discrete-time uncertain linear system [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1995,40(8):1193-1195

[2] Petersen I R, Mc Farlane D C, Rotea M A. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems [A]. In Proc. 12th IFAC World Congress [C], Sydney,1993,1:407-410

[3] Geromel J C, Peres P L D. H_∞ control of discrete-time uncertain systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994,39(8):1193-1195

[4] Souza C E De, Fu M and Xie L. H_∞ analysis and synthesis of discrete-time system with time varying uncertainty [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1993,38(3):459-462

[5] Lin W, Byrnes C I. H_∞-control of discrete-time nonlinear systems [J] IEEE Trans. on Automatic Control,1996,41(4):494-510

[6] Lin W, Byrnes C I. Discrete-time nonlinear H_∞-control with measurement feedback [J]. Automatica, 1995,31(3):419-434

本文作者简介

钟麦英 女.1965年生.博士.现为东华大学智能系统研究中心副研究员,并从事博士后研究工作.主要研究领域为:计算机控制系统设计,鲁棒H-无穷控制,经济控制理论和应用等.

汤兵勇 1950年生.教授,博士生导师.现为东华大学经济控制研究所所长,上海联合电子商务研究所常务副所长.主要研究领域为:智能模糊控制理论与应用,经济控制与管理控制系统,电子商务环境下的管理控制等.

黄小原 1947年生.东北大学工商管理学院教授,博士生导师.研究方向为控制理论及应用,系统工程,金融工程等.