

文章编号: 1000-8152(2002)01-0057-04

# 线性时变二次微分对策 Nash 策略的小波分析法 ( I ) \* ——小波逼近解

张成科<sup>1</sup> 王行愚<sup>2</sup>

(1. 广东工业大学经济管理学院·广州, 510080; 2. 华东理工大学自动化所·上海, 200237)

**摘要:** 基于小波多尺度逼近特性, 提出了一种求解线性时变系统中微分对策 Nash 策略的新方法. 该法避免求解耦合 Riccati 微分方程, 而只需求解代数方程, 适合于计算机求解.

**关键词:** 线性二次微分对策; Nash 策略; 小波分析

**文献标识码:** A

## Analysis Method for Nash Strategy of Linear Time Variant Quadratic Differential Game via Wavelets ( I ) ——Wavelet Approximation Solution

ZHANG Chengke<sup>1</sup> and WANG Xingyu<sup>2</sup>

(1 School of Economics & Management, Guangdong University of Technology, Guangzhou, 510080, P. R. China;

2. Department of Automation, East China University of Science & Technology, Shanghai, 200237, P. R. China)

**Abstract:** This paper proposes a new method for computing the Nash strategy of linear time-variant quadratic differential game based on the multi-scale multi-resolution approximation feature of wavelets. The new method changes the problem into the limitation of algebraic equations, and avoids computing a pair of cross-coupled Riccati equations by computing an algebraic equation instead. The procedure is very simple and suitable for computation with a computer.

**Key words:** linear-quadratic differential game; Nash strategy; wavelets analysis

### 1 引言 (Introduction)

目前在定量微分对策理论中, 为了确定对策者双方的最优策略 (鞍点策略或 Nash 策略), 一般利用最小最大原理, 将问题化为求解常微分方程的两点边值问题, 显然寻求这样一个问题的解析解是相当困难的. 因此有必要发展一些数值算法来寻求其鞍点策略的近似解. 尤其是 90 年代之后, 基于对策论的鲁棒控制器设计思想已被当作鲁棒设计的有力工具<sup>[1,2]</sup>. 如在文献 [1] 中, 鲁棒  $H_\infty/H_2$  混合控制问题被转化为微分线性二次 Nash 对策问题. 因此, 微分对策的定量求解又成为一个引起人们广泛关注且具有理论与实际意义的研究领域. 文献 [3] 对静态问题给出了一种分布式算法; 文献 [4] 利用不动点原理给出了求解鞍点策略的数值迭代算法并证明了其收敛性, 有重要的理论意义, 只是在算法的设计和实现上, 仍要反复求解常微分方程的初值问题. 寻求更方便更有效的数值算法仍是一个开放问题. 本文利用

小波的多分辨多尺度正交逼近特性及其古老的正交逼近思想, 给出了问题的一种新解法.

### 2 问题描述 (Problem description)

设对策过程的状态方程及局中人  $P_1$  和  $P_2$  的代价目标泛函分别为:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \\ t \in [0, t_f], x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$J_1(u, v) = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_{1f} x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T Q_1(t) x + u^T R_{11}(t) u + v^T R_{12}(t) v] dt, \quad (2)$$

$$J_2(u, v) = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_{2f} x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T Q_2(t) x + u^T R_{21}(t) u + v^T R_{22}(t) v] dt. \quad (3)$$

其中  $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^r, v(t) \in \mathbb{R}^s, (u(t), v(t)) \in \Gamma_1^u \times \Gamma_1^v \subset \Omega_1 \times \Omega_2$  分别为局中人  $P_1$  和  $P_2$  的控制策略,

\* 基金项目: 高校博士学科点专项科研基金 (96025110) 及广东工业大学自选科研项目 (993303) 资助项目.

收稿日期: 1999-05-20; 收修改稿日期: 2000-02-28.

$$\Omega_1 = \{u(t) \mid \int_0^{t_f} u^2(t) dt < +\infty\},$$

$$\Omega_2 = \{v(t) \mid \int_0^{t_f} v^2(t) dt < +\infty\}.$$

$\Gamma_1^*$  和  $\Gamma_2^*$  分别为  $P_1$  和  $P_2$  允许策略集.  $Q_i(t) \geq 0$ ,  $R_u(t) > 0, R_v(t) \geq 0, i \neq j, A(t), B(t), C(t), Q_f$  为适当维数的矩阵.

该两人非零和 Nash 对策问题为: 局中人  $P_1$  和  $P_2$  力图寻求一个允许策略对  $(u(t), v(t)) \in \Gamma_1^* \Gamma_2^*$ , 以使双方达到各自的最优策略, 亦即寻求  $(u^*, v^*)$ , 使

$$J_1(u^*, v^*) \leq J_1(u, v^*), \quad \forall u \in \Gamma_1^* \quad (4)$$

$$J_2(u^*, v^*) \leq J_2(u^*, v), \quad \forall v \in \Gamma_2^* \quad (5)$$

满足式(4)和式(5)的策略对  $(u^*(t), v^*(t))$  称为 Nash 策略.  $u^*(t), v^*(t)$  分别称为  $P_1$  和  $P_2$  的最优策略.

### 3 Nash 策略的小波分析法 (Analysis method for Nash strategy via wavelet)

本文的分析主要以 I. Daubechies 基于多分辨思想构造的紧支撑正交小波基作为基函数. 设  $\varphi(t)$  为尺度函数,  $\Psi(t)$  为相应 Daubechies 小波函数,  $\Psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k)$ .  $\Psi_{(m)}(t)$  为小波基函数,  $m = 2^j, c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m]^T, G_{m \times m}$  为小波基的  $m$  阶正向积分矩阵,  $M_{(m \times m)}$  为  $\Psi_{(m)}(x)$  的乘积运算矩阵, 即:

$$\Psi_{(m)}(t) = [\varphi(t), \Psi(t), \Psi_{1,0}(t), \Psi_{1,1}(t), \dots, \Psi_{j-1,0}(t), \Psi_{j-1,1}(t), \dots, \Psi_{j-1,2^{j-1}-1}(t)]^T, \quad (6)$$

$$\int_a^t \Psi_m(x) dx = G_{(m \times m)} \Psi_{(m)}(t), \quad (7)$$

$$\Psi_{(m)}(x) \Psi_{(m)}^T(x) c = M_{(m \times m)} \Psi_{(m)}(x). \quad (8)$$

由  $\Psi_m(t)$  的正交性, 对任意的  $f(t) \in L^2[0, t_f]$ , 其在  $J$  级尺度空间的小波级数为:

$$f(t) = f_\varphi \varphi(t) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{jk} \Psi_{jk}(t) \triangleq [Wf(t)] \Psi_{(m)}(t). \quad (9)$$

其中系数行向量  $[Wf(t)] = F_w = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]$  可由离散小波的塔式快速分解算法得到<sup>[5]</sup>. 关于运算矩阵  $G_{(m \times m)}$  和  $M_{(m \times m)}$  的构造及该类小波基的逼近特性等详细论述参见文献[6]. 将式(1)~(3)中出现的各函数展开为形式(9)的小波级数, 即:

$$\begin{cases} x(t) \triangleq X \Psi_{(m)}(t), & x^0 \triangleq X^0 \Psi_{(m)}(t), \\ u(t) \triangleq U \Psi_{(m)}(t), & v(t) \triangleq V \Psi_{(m)}(t), \end{cases} \quad (10)$$

$$a_{ij}(t) \triangleq [a_y(1) \ a_y(2) \ \dots \ a_y(m)] \Psi_{(m)}(t) \triangleq \bar{a}_{iy} \Psi_{(m)}(t). \quad (11)$$

其中  $X = [X_1 \ \dots \ X_m]$  为  $n \times m$  矩阵; 而

$$b_{ik}(t) \triangleq \bar{b}_{ik} \Psi_{(m)}(t), \quad c_y(t) \triangleq \bar{c}_{iy} \Psi_{(m)}(t),$$

$$(q_{eh})_y(t) = (\bar{q}_{eh})_{ij} \Psi_{(m)}(t),$$

$$(r_{eh})_{ik}(t) = (\bar{r}_{eh})_{ik} \Psi_{(m)}(t),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$k = 1, \dots, r_1, \quad l = 1, \dots, r_2$$

等记号及意义与式(11)类似. 设  $D$  为小波基函数  $\Psi_{(m)}(t)$  与方块脉冲基函数  $\Phi_{(m)}(t)$  的关系矩阵(它可由对  $m$  维单位矩阵的各列分别作离散小波变换得到, 详细论述参见文[6]), 即:

$$\Phi_{(m)}(t) \triangleq D \Psi_{(m)}(t). \quad (12)$$

将式(1)两边从 0 到  $t_f$  积分, 并将各展开式代入, 利用小波基运算特性整理得:

$$\bar{X} = H_0 + H_1 \bar{U} + H_2 \bar{V}. \quad (13)$$

其中

$$H_0 = \{I_{mn} - [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{A} (D \otimes I_n)\}^{-1} \bar{X}^0, \quad (14)$$

$$H_1 = \{I_{mn} - [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{A} (D \otimes I_n)\}^{-1} \times [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{B} (D \otimes I_r), \quad (15)$$

$$H_2 = \{I_{mn} - [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{A} (D \otimes I_n)\}^{-1} \times [(G_{(m \times m)}^T D^T) \otimes I_n] \hat{C} (D \otimes I_r), \quad (16)$$

$$\bar{X} = \bar{X}^T = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \bar{U}^T = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}, \quad \bar{V} = \bar{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 D^T & & & \\ & \bar{A}_2 D^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{A}_m D^T \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_j = \begin{bmatrix} a_{11}(j) & a_{12}(j) & \dots & a_{1n}(j) \\ a_{21}(j) & a_{22}(j) & \dots & a_{2n}(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(j) & a_{n2}(j) & \dots & a_{nn}(j) \end{bmatrix}.$$

其它记号如  $\bar{X}^0 = \bar{X}^0, \hat{B}, \hat{C}, \bar{B}_j, \bar{C}_j$  的意义类似. 式(13)非常简单地沟通了状态与控制之间的关系. 同理可将局中人  $P_1$  和  $P_2$  的代价目标泛函转换为:

$$\bar{J}_1(\bar{U}, \bar{V}) = K_{i0} + \bar{U}^T K_{i1} + \bar{V}^T K_{i2} + \frac{1}{2} \bar{U}^T K_{i3} \bar{U} + \bar{U}^T K_{i4} \bar{V} + \frac{1}{2} \bar{V}^T K_{i5} \bar{V}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{i0} &= \frac{1}{2} H_0^T (E_m \otimes I_n)^T Q_{ij} (E_m \otimes I_n) H_0, \\ K_{i1} &= H_1^T (E_m \otimes I_n)^T Q_{ij} (E_m \otimes I_n) H_0, \\ K_{i2} &= H_2^T (E_m \otimes I_n)^T Q_{ij} (E_m \otimes I_n) H_0, \\ K_{i3} &= H_1^T (E_m \otimes I_n)^T Q_{ij} (E_m \otimes I_n) H_1 + \frac{t_f}{m} \hat{R}_{i1}, \\ K_{i4} &= H_1^T (E_m \otimes I_n)^T Q_{ij} (E_m \otimes I_n) H_2, \\ K_{i5} &= H_2^T (E_m \otimes I_n)^T Q_{ij} (E_m \otimes I_n) H_2 + \frac{t_f}{m} \hat{R}_{i2}, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2,$$

$$E_m = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]_{1 \times m}.$$

“ $\otimes$ ”为矩阵的 Kronecker 积.

这样 Nash 策略问题就转化为无约束代数优化问题,即寻求  $(\bar{U}^*, \bar{V}^*)$  使:

$$\bar{J}_1(\bar{U}^*, \bar{V}^*) \leq \bar{J}_1(\bar{U}, \bar{V}^*), \quad \forall \bar{U}, \quad (18)$$

$$\bar{J}_2(\bar{U}^*, \bar{V}^*) \leq \bar{J}_2(\bar{U}^*, \bar{V}), \quad \forall \bar{V}. \quad (19)$$

因此有如下结论:

**定理** 设矩阵  $K_{13} - K_{14} K_{25}^{-1} K_{24}^T$  和  $K_{25} - K_{24}^T K_{13}^{-1} K_{14}$  可逆,则问题(1)~问题(3)的 Nash 最优策略及其相应的最优状态的小波逼近解为:

$$\begin{cases} \bar{u}^*(t) = \text{vex}^{-1}(\bar{U}^*) \Psi_{(m)}(t), \\ \bar{v}^*(t) = \text{vex}^{-1}(\bar{V}^*) \Psi_{(m)}(t), \end{cases} \quad (20)$$

$$\bar{x}^*(t) = \text{vex}^{-1}(\bar{X}^*) \Psi_{(m)}(t). \quad (21)$$

其中  $\text{vex}^{-1}$  表示向量的逆行拉直,而

$$\bar{U}^* = -(K_{13} - K_{14} K_{25}^{-1} K_{24}^T)^{-1} \times (K_{21} - K_{24} K_{25}^{-1} K_{22}), \quad (22)$$

$$\bar{V}^* = -(K_{25} - K_{24}^T K_{13}^{-1} K_{14})^{-1} \times (K_{22} - K_{24}^T K_{13}^{-1} K_{11}), \quad (23)$$

$$\bar{X}^* = H_0 + H_1 \bar{U}^* + H_2 \bar{V}^*. \quad (24)$$

证 因为  $K_{13} > 0, K_{25} > 0, K_{13}^T = K_{13}, K_{25}^T = K_{25}$  且

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial \bar{U}} = K_{11} + K_{14} \bar{V} + K_{13} \bar{U}, \\ \frac{\partial \bar{J}_2}{\partial \bar{U}} = K_{22} + K_{24}^T \bar{U} + K_{25} \bar{V}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{J}_2}{\partial (\bar{U})^2} = K_{13} > 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{J}_1}{\partial (\bar{V})^2} = K_{25} > 0, \end{cases} \quad (26)$$

所以  $\bar{J}_1(\bar{U}, \bar{V})$  关于  $\bar{U}$  是严格凸的,  $\bar{J}_2(\bar{U}, \bar{V})$  关于  $\bar{V}$  是严格凸的.因此根据文献[7],在假设条件下,令式(24)为零可得代数 Nash 问题的最优策略及其相应的最优状态:

$$\bar{U}^* = -(K_{13} - K_{14} L_5^{-1} L_4^T)^{-1} (K_{11} - K_{14} L_5^{-1} L_2),$$

$$\bar{V}^* = -(L_5 - L_4^T K_{13}^{-1} K_{14})^{-1} (L_2 - L_4^T K_{13}^{-1} K_{11}),$$

$$\bar{X}^* = H_0 + H_1 \bar{U}^* + H_2 \bar{V}^*.$$

证毕.

附注 定理中用到的假设条件“矩阵  $K_{13} - K_{14} L_5^{-1} L_4^T$  和  $L_5 - L_4^T K_{13}^{-1} K_{14}$  可逆”,是与文献[6]中定理 6-A-2 的假设条件相对应的,因此是一般的.

#### 4 举例分析(Example analysis)

考虑如下单变量线性时变系统及目标泛函:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = tx(t) + u(t) + 2v(t), \\ x(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (27)$$

$$J_1(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t) + 4v^2(t)] dt, \quad (28)$$

$$J_2(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [2x^2(t) + u^2(t) + v^2(t)] dt. \quad (29)$$

问题是在约束式(27)下求策略对  $(u^*(t), v^*(t))$  使式(4)和式(5)成立.利用文献[6]中的最小最大原理可得:

$$u^*(t) = -p(t)x^*(t), \quad v^*(t) = -2k(t)x^*(t). \quad (30)$$

其中  $p(t), k(t)$  和  $x^*(t)$  分别满足:

$$\begin{cases} \dot{p} + 2pt - p^2 - 2pk + 1 = 0, \\ p(1) = 0, \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \dot{k} + 2kt - k^2 - pk + 2 = 0, \\ k(1) = 0, \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = [t - p(t) - 4k(t)]x^*(t), \\ x^*(0) = 1. \end{cases} \quad (33)$$

现采用 Daubechies 的 Daub4 小波,取  $m = 16$ ,按前面所述方法利用式(20)~(24),用 Matlab 语言编程计算可得:

$$\bar{u}^*(t) = \text{vex}^{-1}(\bar{U}^*) \Psi_{(m)}(t),$$

$$\bar{v}^*(t) = \text{vex}^{-1}(\bar{V}^*) \Psi_{(m)}(t),$$

$$\bar{x}^*(t) = \text{vex}^{-1}(\bar{X}^*) \Psi_{(m)}(t).$$

图 1~图 3 分别给出了它们的对比曲线图.

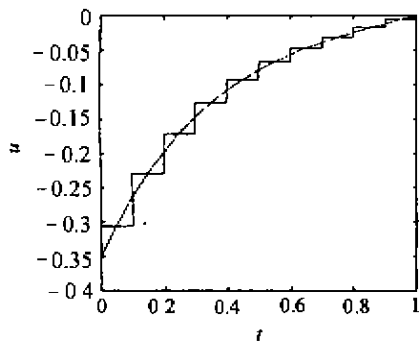


图1  $u^*(t)$ (实线)与 $\bar{u}^*(t)$ (虚线)的对比  
Fig. 1 Comparison between  $u^*(t)$  and  $\bar{u}^*(t)$

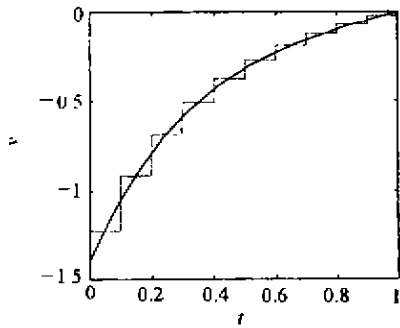


图2  $v^*(t)$ (实线)与 $\bar{v}^*(t)$ (虚线)的对比  
Fig. 2 Comparison between  $v^*(t)$  and  $\bar{v}^*(t)$

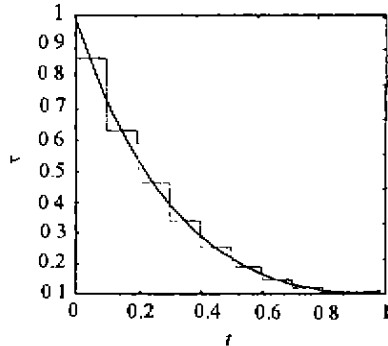


图3  $x^*(t)$ (实线)与 $\bar{x}^*(t)$ (虚线)的对比  
Fig. 3 Comparison between  $x^*(t)$  and  $\bar{x}^*(t)$

## 5 结论(Conclusion)

本文利用小波讨论了一类 Nash 策略的计算方法,并为文献中的混合  $H_2/H_\infty$  鲁棒控制问题提供了新的数值解法.它不仅具有传统逼近方法的优点,而

且离散小波的快速算法使人们很容易得到小波展开式的系数;同时小波基的多分辨特性还能使我们在不同的局部区域选择不同的分辨率,对改变局部区域的控制效果起到了积极的作用.余下的问题是:这种用有限逼近无限的做法的数学合理性怎样,也即逼近解是否均方收敛于精确解?关于这点将另文论述,结果表明小波基的优良逼近特性保证了逼近解均方收敛于精确解.

## 参考文献(References)

- [1] Limebeer D J N, Anderson B D O and Hendel B. A Nash game approach to mixed  $H_2/H_\infty$  control [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, 39(1): 69-82
- [2] Gu Xingyuan and Cheng Wenhua. An approach by game theory to design of robust output feedback controllers [J]. Information & Control, 1991, 20(4): 16-20 (in Chinese)
- [3] Li S and Basar T. Distributed algorithms for the computation of non-cooperative equilibrium [J]. Automatica, 1987, 23(4): 523-533
- [4] Wu Hansheng. Algorithm and convergence of optimal strategies in a class of quantitative differential games [J]. Acta Automatica Sinica, 1992, 18(2): 143-150 (in Chinese)
- [5] Daubechise I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets [J]. Comment Pure and Applied Mathematics, 1988, 24(4): 909-996
- [6] Zhang Chengke. Some studies on control theory based on wavelets analysis [D]. Shanghai: East China University of Science & Technology, 1999 (in Chinese)
- [7] Basar T and Olsder G J. Dynamic Non-cooperative Game Theory [M]. London: Academic Press, 1982

## 本文作者简介

张成科 1964年生,1999年于华东理工大学获博士学位,现为广东工业大学副教授.主要研究领域为:优化与控制,信息经济学与博弈论,小波理论及其应用等.

王行愚 1944年生,1984年于华东理工大学获博士学位,现为华东理工大学校长,教授,博士生导师.主要研究领域为:系统建模与控制,智能控制与计算机控制,小波理论及其应用等.