文章编号: 1000-8152(2002)01-0103-02

# 具多时滞的不确定多变量反馈系统的鲁棒稳定化*

孙继涛[1,2]　邓飞其[1]　刘永清[1]　张银萍[2]
(1.华南理工大学自动控制系·广州,510640; 2.同济大学应用数学系·上海,200092)

**摘要**: 用矩阵测度研究了具有时滞的不确定系统,给出了在多变量反馈控制律作用下,系统指数渐近稳定的判别准则,推广和改进了文[1~3]的工作.

**关键词**: 矩阵测度; 不确定性; 时滞; 多变量反馈系统; BIBO 稳定性
**文献标识码**: A

# Robust Stabilization of Uncertain Multivariable Feedback Systems with Multiple Time Delays

SUN Jitao[1,2], DENG Feiqi[1], LIU Yongqing[1] and ZHANG Yinping[2]
(1 Department of Automation, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P R.China;
2.Department of Applied Mathematics, Tongji University · Shanghai, 200092, P.R.China)

**Abstract**: This paper focuses on the problem of robust exponential stability of a class of uncertain systems described by functional differential equations with time delays under multivariable feedback control laws. The uncertainties are assumed to be norm bounded. Sufficient conditions for robust exponential stability are given for multiple delay cases by matrix measure.

**Key words**: matrix measure; uncertainty; time delay, multivariable feedback system; BIBO stability

在实际控制过程中,由于模型的误差、测量的误差和线性化近似等,不确定就会出现在控制系统中,这些不确定项给原来稳定系统的鲁棒稳定分析带来了许多研究课题,已引起了自动控制界和应用数学界的极大兴趣[1~6].另一方面,时滞现象在各种工程系统中经常遇到,时滞是较复杂的、它带有非线性特性,且它的存在常常是导致系统不稳定的根源,因此,对不确定的时滞系统的鲁棒稳定性问题的研究,具有重要的理论意义和实际应用价值.

本文考虑如下的不确定多时滞系统

$$\begin{cases} x(t)=\sum_{i=0}^{n}(A_i+\Delta A_i)x(t-h_i)+(B+\Delta B)u(t),\ t\geqslant 0, \\ y(t)=(C+\Delta C)x(t). \end{cases} \tag{1}$$

其初始条件为: $x(t)=\varphi(t)$, $-h\leqslant t\leqslant 0, h_0=0$, $h_i(1=1,2,\cdots,n)$ 是不同的正整数, $n$ 是一个正整数, $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{h_i\}$; $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ 分别是状态矩阵,输入矩阵和输出矩阵; $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^p$ 分别表示系统的状态变量、输入变量和输出变量; $\Delta A_i,\Delta B,\Delta C$ 分别是相应维数的参数扰动矩阵,并且满足

$\|\Delta A_i\|_\cdot\leqslant a_i(0,1,\cdots,n)$, $\|\Delta B\|_\cdot\leqslant b$, $\|\Delta C\|_\cdot\leqslant c$, $\cdot=1,2,\infty,\omega$; $\varphi(t)$ 是 $[-h,0]$ 上连续的 $n$ 维向量初始函数,并且有 $|\varphi|=\sup\limits_{-h\leqslant t\leqslant 0}\{\|\varphi(t)\|\}$.

本文的目的之一是找出多变量反馈控制律

$$u(t)=-\sum_{i=0}^{n}F_ix(t-h_i). \tag{2}$$

其中 $F_i(i=0,1,\cdots,n)$ 是 $m\times n$ 矩阵,使得闭环系统(1)和(2)是指数稳定的.另一目的是在使得具有参考输入信号 $r(t)\in\mathbb{R}^m$ 的控制律

$$u(t)=r(t)-\sum_{i=0}^{n}F_ix(t-h_i) \tag{3}$$

下,系统(1)是 BIBO 稳定的[3].

先介绍矩阵测度的概念.一个实方阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 的测度定义如下

$$\mu_\cdot(A(t))\triangleq\lim_{h\to 0^+}\frac{\|I+hA(t)\|-1}{h}(I\text{ 是单位矩阵}).$$

* 基金项目:国家自然科学基金重点项目(69934030)和高等学校骨干教师资助计划资助项目.
收稿日期:1999-10-07; 收修改稿日期:2000-06-12.

当上式中范数分别是矩阵范数

$\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$，$\|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^*A)]^{\frac{1}{2}}$，

$\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，$\|A\|_\omega=\max_j\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{\omega_j}|a_{ij}|$

（$\omega_i$ 为正数）时，可计算出相应的矩阵测度为

$$\mu_1(A)=\max_j\{a_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|\},$$

$$\mu_2(A)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}\{A^*+A\},$$

$$\mu_\infty(A)=\max_i\{a_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\},$$

$$\mu_\omega(A)=\max_j\{a_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{\omega_i}{\omega_j}|a_{ij}|\}.$$

这里 $A^*$ 表示 $A$ 的共轭转置，$\lambda_{\max}(B)$ 表示 $B$ 的最大特征值，$\|A\|_\cdot$ 与 $\mu_\cdot(A)$ 相对应，$\cdot=1,2,\infty,\omega$.

再介绍一个引理[1].

**引理** 设 $P(t)$ 是在区间 $[t_0-\tau,+\infty)$ 上的非负连续函数，且在区间 $[t_0,+\infty)$ 上满足不等式

$$\dot P(t)\leqslant -aP(t)+bP_t.$$

其中 $a>0,\tau\geqslant 0,b\geqslant 0$ 均是常数，$P_t=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\Gamma(t+\theta)|$，则当 $b<a$ 时，存在 $\varepsilon<0$，使得

$$P(t)\leqslant P_{t_0}\exp\{-\varepsilon(t-t_0)\},\ t\geqslant t_0.$$

考虑由系统(1)和(2)描述的闭环系统

$$\dot x(t)=(A_0-BF_0)x(t)+\sum_{i=1}^{n}(A_i-BF_i)x(t-h_i)+\sum_{i=0}^{n}(\Delta A_i-\Delta BF_i)x(t-h_i).\quad(4)$$

设 $x(t)$ 是系统(4)的解，$|\cdot|$ 是向量模，$\|\cdot\|$ 是 $|\cdot|_\cdot$ 相应的诱导矩阵范数，$\mu_\cdot(\cdot)$ 是与它们相对应的矩阵测度，记 $\beta_0=0,\beta_i=\|A_i-BF_i\|_\cdot(i=1,2,\cdots,n)$，则当 $t\geqslant 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}|x(t)|_\cdot}{\mathrm{d}t}-\mu_\cdot(A_0-BF_0)|x(t)|_\cdot-\sum_{i=1}^{n}\|A_i-BF_i\|_\cdot|x(t-h_i)|_\cdot-\sum_{i=0}^{n}\|\Delta A_i-\Delta BF_i\|_\cdot|x(t-h_i)|_\cdot=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\varepsilon}[|x(t+\varepsilon)|_\cdot-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|\Delta A_i-\Delta BF_i\|_\cdot|x(t-h_i)|_\cdot]-\|I+\varepsilon(A_0-BF_0)\|_\cdot|x(t)|_\cdot-\varepsilon\sum_{i=0}^{n}\|\Delta A_i-\Delta BF_i\|_\cdot|x(t-h_i)|_\cdot]\leqslant$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\varepsilon}\Big|x(t+\varepsilon)-x(t)-\varepsilon(A_0-BF_0)x(t)-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(A_i-BF_i)x(t-h_i)-\varepsilon\sum_{i=0}^{n}(\Delta A_i-\Delta BF_i)x(t-h_i)\Big|.$$

由于系统(4)成立，故上式右端为零，因此

$$\frac{\mathrm{d}|x(t)|_\cdot}{\mathrm{d}t}\leqslant \mu_\cdot(A_0-BF_0)|x(t)|_\cdot+\sum_{i=0}^{n}(\beta_i+a_i+b\|F_i\|_\cdot)|x(t-h_i)|_\cdot\leqslant \mu_\cdot(A_0-BF_0)|x(t)|_\cdot+\sum_{i=0}^{n}\|(\beta_i+a_i+b\|F_i\|_\cdot)|x(t-h_i)|_\cdot.$$

由引理和上面的讨论知

**定理 1** 选择反馈矩阵 $F_i(i=0,1,\cdots,n)$，使得

$$\mu_\cdot(A_0-BF_i)<-\sum_{i=0}^{n}(\beta_i+a_i+b\|F_i\|_\cdot),$$

则系统(4)的零解是指数稳定的.

下面考虑具有参考输入的系统(1)的 BIBO 稳定性.

将控制律(3)代入系统(1)，则得闭环系统

$$\begin{cases}\dot x(t)=\\ (A_0-BF_0)x(t)+\sum_{i=1}^{n}(A_i-BF_i)x(t-h_i)+\\ \sum_{i=1}^{n}(\Delta A_i-\Delta BF_i)x(t-h_i)+(B+\Delta B)r(t),\\ y(t)=(C+\Delta C)x(t).\end{cases}\quad(5)$$

类似于定理 1 的证明，可以得到：

**定理 2** 对具有参考输入 $r(t)$ 的控制律(3)，选择矩阵 $F_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，使得

$$\mu_\cdot(A_0-BF_0)<-\sum_{i=0}^{n}(\beta_i+a_i+b\|F_i\|_\cdot)\mathrm{e}^{-\mu_\cdot(A_0-BF_0)h_i},$$

则闭环系统(5)是 BIBO 稳定的.

**注 1** 注意到文[1]式(10)中 $m\geqslant 1$，故取 $a=-\mu_2(A_0-BF_0)$ 时，由于 $\frac{a}{m}\leqslant-\mu_2(A_0-BF_0)$，因此，本文结论优于文[1]结论.

**注 2** 本文结论中矩阵测度的计算要简单于文[1]中转移矩阵的估计，且有多种测度可以随不同的需要选用.

**注 3** 本文结果显然优于文[2,3]中的结果.

（下转第 108 页）

换函数设计方法,当切换函数为零时,对应的等效系统是渐近稳定的,当切换函数有界时,对应的等效系统将一致终结有界.进一步利用变结构控制设计方法设计控制器,由它保证系统满足滑模运动到达条件.在此基础上,结合参数在线估计方法,提出了一种自适应变结构控制器,其保证闭环系统是一致终结有界的.

## 参考文献(References)


[1] Gao Weibing. Theory and Design Approach for Variable Structure Control [M]. Beijing: Science Press, 1996

[2] Kim K S and Park Y. Robust sliding hyperplane design for parametric uncertain systems by Riccati approach [A]. Proceedings of the American Control Conference [C], Philadelphia, Pennsylvania, 1998,579 – 583

[3] Kwan C M. Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties [J]. Automatica, 1995,31(2):303 – 307

[4] Boyd S, Ghaoui L E and Feron E. Linear matrix inequalities in system and control theory [A]. SIAM Studies in Applied Mathematics [M]. Philadelphia, PA: SIAM Publishing House, 1995,15:24 – 29

[5] Corless M J and Leitmann G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimateboundness for uncertain dynamic systems [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1981,26(5):1139 – 1144

[6] Wu Hansheng. A class of state feedback controllers with simple structures for uncertain nonlinear dynamical systems [J]. Trans of Society of Instrument and Control Engineers, 1996,32(4):477 – 485

[7] Wang Leng. Stability Theory [M]. Beijing: Beijing University Publication, 1992,12 – 44


## 本文作者简介


**胡剑波** 西安空军工程大学副教授.主要研究领域:过程自动化和智能化系统. Email:zjhjb@263.net

**褚 健** 1963年生.1982年毕业于浙江大学,1986~1989年留学日本京都大学,1989年获工学博士学位.现为浙江大学教授,博士生导师,"长江学者奖励计划"特聘教授.


(上接第104页)

## 参考文献(References)


[1] Zhong Shouming and Huang Tingzhu. Robust stabilization of uncertain multivariable feedback systems with multiple time delays [J]. Acta Automatica Sinica, 1998,24(6):837 – 839 (in Chinese)

[2] Lu H C and Chen B S. Stabilization of multivariable feedback systems with multiple time delays [J]. Int. J. Systems Science, 1988, 19(6):953 – 966

[3] Wu H and Mizukami K. Robust stabilization of uncertain linear dynamical systems [J] Int. J. Systems Science, 1993,24(2):265 – 276

[4] Sun Jitao and Zhang Yinping. On the stability of linear differential equation with varying coefficients [J]. Control Theory and Applications, 1998,15(4):642 – 645 (in Chinese)

[5] Sun Jitao. Stability and decay rate of interval time-varying dynamical system with multidelay [J]. Chinese J of Automation, 1996,8(3): 243 – 247

[6] Silviu I N, Souza C E and Luc D, et al. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998,43(5):743 – 748


## 本文作者简介


**孙继涛** 1963年生.同济大学应用数学系教授,美国数学学会会员,《数学评论》评论员,华南理工大学自动控制工程系在职博士生.对常微分方程理论与应用感兴趣,在国内外发表学术论文70余篇,获科技进步奖四项. Email:sunjt @ sh163.net

**邓飞其** 1962年生.1983年,1987年分别于湖南大学,华南理工大学获理学学士学位,工学博士学位,现为华南理工大学自动控制工程系教授,博士生导师.主要研究方向为时滞系统,随机系统,大系统的控制理论.

**刘永清** 1930年生.华南理工大学电子与信息学院教授,博士生导师.主要研究方向为复杂系统及系统工程.

**张银萍** 女.1962年生.硕士,同济大学应用数学系副教授.对常微分方程理论与应用感兴趣.在国内外发表学术论文30余篇,获科技进步奖三项.