文章编号: 1000-8152(2002)02-0178-05

# 线性时变二次微分对策Nash策略的小波分析法(Ⅱ)——小波逼近解的收敛性*

张成科[1] 王行愚[2]
(1.广东工业大学经济管理学院·广州,510080; 2.华东理工大学自动控制系·上海,200237)

**摘要**: 研究小波逼近分析方法的收敛性问题,对线性时变二次微分对策Nash策略情形,证明了Nash策略的小波逼近解收敛于精确解,基于小波逼近的多尺度多分辨特性,给出了误差估计的阶数.

**关键词**: Nash策略; 小波逼近; 均方收敛
**文献标识码**: A

# Analysis Method for Nash Strategy of Linear Time Variant Quadratic Differential Game via Wavelets (Ⅱ) —Convergence of the Wavelet Approximation Solution

ZHANG Chengke[1] and WANG Xingyu[2]
(1. College of Economics & Management, Guangdong University of Technology · Guangzhou, 510080, P.R.China;
2. Automation Institute, East China University of Science & Technology · Shanghai, 200237, P.R.China)

**Abstract**: This paper studies the convergence problem of the wavelet approximation analysis method. For Nash strategy of linear time variant quadratic differential game, we prove that the wavelet approximation solution of Nash strategy converge to the accurate solution. The order of error estimation is given based on the multi-scale multi-resolution approximation feature of wavelets.

**Key words**: Nash strategy; wavelet approximation; convergence in the mean square

## 1 引言(Introduction)

小波逼近分析方法是一种用有限来逼近无限的近似方法,其基本思想是:在所考察的问题的求解或计算中(如算术运算和积分运算等),用函数的有限小波级数代替函数本身,利用小波基函数运算矩阵特性进行化简运算,将原问题转变为关于小波级数系数的代数问题从而便于求解和计算[1].作为一种近似方法,当用函数的有限小波级数去参与算术运算和积分运算等运算时,应当给出这种做法合理性的解释,即它是何种意义下的近似?用这样的近似方法获得的逼近解是否收敛于原来的真解?本文将对这些问题进行研究.

## 2 问题描述及一些准备工作(Problem description and some preparation work)

考察如下线性时变系统[2]:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),v(t)),\\ x(0) = x_0,\ t\in[0,t_f],\end{cases}\tag{1}$$

$$J_i(u,v) = q_i(x(t_f)) + \int_0^{t_f} g_i(x,u,v)\mathrm{d}t,\tag{2}$$

$$f(x,u,v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v,\tag{3}$$

$$q_i(x(t_f)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Q_{if}x(t_f),\tag{4}$$

$$g_i(x,u,v) = \frac{1}{2}[x^{\mathrm{T}}Q_i(t)x + u^{\mathrm{T}}R_{i1}(t)u + v^{\mathrm{T}}R_{i2}(t)v],\ i = 1,2.\tag{5}$$

其中,$x(t)$是关于$t$的连续可导函数;$u(t)$和$v(t)$是$[0,t_f]$上的平方可积函数;$J_1$和$J_2$分别为两局中人$P_1$和$P_2$的性能指标,$Q_{1f}$和$Q_{2f}$为$n$维半正定常数方阵;$Q_i(t)\geqslant 0$,$R_{ii}(t)>0$,$i=1,2$,$R_{12}(t)\geqslant 0$,$R_{21}(t)\geqslant 0$以及$A(t)$,$B(t)$,$C(t)$为适当维数的函数矩阵,它们的元素都是闭区间$[0,t_f]$上的连续函数.

由假设易证存在常数$L_1$,$L_2$和$L_3$使下面的条件C成立:

* 基金项目:高校博士学科点专项科研基金(96025110)及广东工业大学自选科研(993303)资助项目.
收稿日期:1999-05-20; 收修改稿日期:2001-02-28.

**条件 C**　1) $f(x,u,v)$ 是变量 $x,u$ 和 $v$ 的连续有界函数.

2) 函数 $f$ 关于变量 $x,u$ 和 $v$ 满足 Lipschtiz 条件:

$$\| f(x,u_1,v_1) - f(y,u_2,v_2) \| \leqslant L_1[\| x-y \|_{\mathbb{R}^n} + \| u_1-u_2 \|_{\mathbb{R}^{r_1}} + \| v_1-v_2 \|_{\mathbb{R}^{r_2}}], \quad \forall (x,u_1,v_2),(x,u_2,v_2). \tag{6}$$

3) 函数 $g_i(x,u,v)$ 关于变量 $x,u$ 和 $v$ 满足 Lipschtiz 条件:

$$\| g_i(x,u_1,v_1) - g_i(y,u_2,v_2) \| \leqslant L_{2i}[\| x-y \|_{\mathbb{R}^n} + \| u_1-u_2 \|_{\mathbb{R}^{r_1}} + \| v_1-v_2 \|_{\mathbb{R}^{r_2}}], \quad i=1,2. \tag{7}$$

4) 函数 $q_i(x)$ 关于变量 $x$ 满足 Lipschtiz 条件:

$$\| q_i(x(t_f)) - q_i(y(t_f)) \| \leqslant L_{3i} \| x(t_f) - y(t_f) \|_{R^n}, \quad i=1,2. \tag{8}$$

记

$$\Omega_1 = \{u(t) \mid \int_0^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t < +\infty\},$$

$$\Omega_2 = \{v(t) \mid \int_0^{t_f} v^2(t)\mathrm{d}t < +\infty\};$$

$$\bar{\Omega}_1 = \{U = [U_1 \ \cdots \ U_m] \in \mathbb{R}^{r_1 \times m} \text{ 且 } \frac{t_f}{m}\sum_{j=1}^{m}(U_jD^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}U_jD^{\mathrm{T}} < \infty\},$$

$$\bar{\Omega}_2 = \{V = [V_1 \ \cdots \ V_m] \in \mathbb{R}^{r_2 \times m} \text{ 且 } \frac{t_f}{m}\sum_{j=1}^{m}(V_jD^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}V_jD^{\mathrm{T}} < \infty\}.$$

由文献[2],求 Nash 最优策略问题为:

问题(P):寻求 $(u^*,v^*)$ 及 $x^*$ 使

$$J_1(u^*,v^*) \leqslant J_1(u,v^*), \ \forall u \in \Gamma_1^a, \tag{9}$$

$$J_2(u^*,v^*) \leqslant J_2(u^*,v), \ \forall v \in \Gamma_2^a, \tag{10}$$

$$\dot{x}^* = f(x^*,u^*,v^*), \ x^*(0) = x_0. \tag{11}$$

问题(P)用小波逼近求解的逼近问题为:

问题($\bar{\mathrm{P}}_m$):寻求矩阵 $U^* \in \bar{\Omega}_1$ 和 $V^* \in \bar{\Omega}_2$ 以及 $X^* \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 使

$$\bar{J}_1(U^*,V^*) \leqslant \bar{J}_1(U,V^*), \ \forall U \in \bar{\Omega}_1, \tag{12}$$

$$\bar{J}_2(U^*,V^*) \leqslant \bar{J}_2(U^*,V), \ \forall V \in \bar{\Omega}_2, \tag{13}$$

$$\bar{X}^* = H_0 + H_1\bar{U}^* + H_2\bar{V}^*. \tag{14}$$

符号 $\bar{X},\bar{U},\bar{V},H_0,H_1,H_2$ 的意义参见文献[1].称问题($\bar{\mathrm{P}}_m$)为问题(P)的 $m$ 阶逼近问题.目的是通过求解问题($\bar{\mathrm{P}}_m$)得到矩阵 $U^*,V^*,X^*$,然后用 $U^*\Psi_{(m)}(t)$,$V^*\Psi_{(m)}(t)$ 和 $X^*\Psi_{(m)}(t)$ 来分别近似 $u^*(t)$,$v^*(t)$ 和 $x^*(t)$,并希望能证明

$$\| U^*\Psi_{(m)}(t) - u^*(t) \|_{L^2_{r_1}} \to 0,$$

$$\| V^*\Psi_{(m)}(t) - v^*(t) \|_{L^2_{r_2}} \to 0, \ m \to \infty,$$

$$\| X^*\Psi_{(m)}(t) - x^*(t) \|_{C[0,t_f]} \to 0, \ m \to \infty.$$

**引理 1**　设 $u_1(t),u_2(t) \in \Omega_1$;$v_1(t),v_2(t) \in \Omega_2$;$x(t)$ 与 $y(t)$ 是分别对应于 $u_1,v_1$ 与 $u_2,v_2$ 的初值问题(1)的解,则

1) 存在与 $u_1,v_1$ 和 $u_2,v_2$ 无关的常数 $C_1 > 0$,使得

$$\max_{t\in[0,t_f]} \| x(t) - y(t) \|_{\mathbb{R}^n} \leqslant C_1[\| u_1 - u_2 \|_{L^2_{r_1}} + \| v_1 - v_2 \|_{L^2_{r_2}}];$$

2)

$$| J_i(u_1,v_1) - J_i(u_2,v_2) | = O(\| u_1 - u_2 \|_{L^2_{r_1}} + \| v_1 - v_2 \|_{L^2_{r_2}}), \ i = 1,2. \tag{15}$$

证　参见文献[3]引理 3.3 和引理 3.4 的证明及文献[4],此处略.

**引理 2**　设 $x(t)$ 为系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + h(t), \\ t \in [0,t_f], \ x(0) = x_0 \end{cases}$$

的精确解,$x(t),h(t) \in C_n^1[a,b]$,$a_{ij}(t) \in C[a,b]$ 可导且 $|\dot{a}_{ij}(t)| \leqslant M$,$M$ 为一常数,$X$ 是矩阵方程

$$X = X_0 + \sqrt{\frac{m}{b-a}}[WA(t)]\bar{J}_X G_{(m\times m)} + [Wh(t)]G_{(m\times m)}$$

的解,则:

$$\| X\Psi_{(m)}(t) - x(t) \|_{L^2_n} = O(m^{-1}).$$

证　引理 2 中的有关符号说明及证明参见文献[3]中定理 2.3 及其证明,此处略.

**引理 3**　设 $U = [U_1 \ \cdots \ U_m] \in \bar{\Omega}_1$,$V = [V_1 \ \cdots \ V_m] \in \bar{\Omega}_2$ 以及 $X = [X_1 \ \cdots \ X_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$.$\bar{U} = \vec{U}^{\mathrm{T}}$,$\bar{V} = \vec{V}^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{X} = \vec{X}^{\mathrm{T}}$ 满足下列方程:

$$\bar{X} = H_0 + H_1\bar{U} + H_2\bar{V}, \tag{16}$$

则存在函数 $u(t) \in L^2_{r_1}$,$v(t) \in L^2_{r_2}$ 和 $x(t) \in C_n^1[0,t_f]$ 使得

$$\begin{cases} \| U\Psi_{(m)}(t) - u(t) \|_{L^2_{r_1}} \to 0, \\ \| V\Psi_{(m)}(t) - v(t) \|_{L^2_{r_2}} \to 0, \ m \to \infty, \\ \max\limits_{0\leqslant t\leqslant t_f} \| X\Psi_{(m)}(t) - x(t) \|_{\mathbb{R}^n} \to 0, \ m \to \infty, \end{cases} \tag{17}$$

且 $u(t),v(t)$ 和 $x(t)$ 满足微分方程(1).

证　设 $U_j = [u_{1j} \ u_{2j} \ \cdots \ u_{r_1 j}]^{\mathrm{T}}$,$V_j =$

$[v_{1j}\ \ v_{2j}\ \ \cdots\ \ v_{r_2j}]^{\mathrm{T}}, j = 1,2,\cdots,m$. 因为 $U \in \bar{\Omega}_1$、所以 $\sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}^2 < \infty$, 故存在 $\{u_{ij}\}$ 的子列(为叙述方便,设此子列即为 $\{u_{ij}\}$)使

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}^2 < \infty,\ i = 1,2,\cdots,r_1.$$

由于 $\{\Psi_{(m)}(t)\}$ 是规范正交基函数,故由文献[4]的引理3.1可知,存在 $u_i(t) \in L^2[0,t_f]$ 使得 $\{u_{ij} \mid j = 1,2,\cdots,m\}$ 是 $u_i(t)$ 关于小波基函数 $\{\Psi_{(m)}(t)\}$ 的展开系数,且满足封闭性公式.因此

$$\|\sum_{j=1}^{m} u_{ij}\Psi_j(t) - u_i(t)\|_{L^2} \to 0\ (m\to\infty),$$
$$i = 1,2,\cdots,r_1.$$

令 $u(t) = [u_1(t)\ \ u_2(t)\ \ \cdots\ u_{r_1}(t)]^{\mathrm{T}}$, 则 $u(t) \in L_{r_1}^2[0,t_f]$, 且

$$\|U\Psi_{(m)}(t) - u(t)\|_{L_{r_1}^2} \to 0\ (m\to\infty).$$

同理存在 $v(t) = [v_1(t)\ \ v_2(t)\ \ \cdots\ v_{r_2}(t)]^{\mathrm{T}} \in L_{r_2}^2[0,t_f]$ 使

$$\|V\Psi_{(m)}(t) - v(t)\|_{L_{r_2}^2} \to 0\ (m\to\infty). \tag{18}$$

设与 $u(t), v(t)$ 和 $U\Psi_{(m)}(t), V\Psi_{(m)}(t)$ 相对应的初值问题(1)的解分别为 $x(t)$ 和 $\bar{x}(t)$. 由引理1可知

$$\begin{aligned}&\max_{0\le t\le t_f}\|x(t) - \bar{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \\ &M_1\|u(t) - U\Psi_{(m)}(t)\|_{L_{r_2}^2} + \\ &M_2\|v(t) - V\Psi_{(m)}(t)\|_{L_{r_1}^2},\end{aligned}$$

又由引理2可知

$$\max_{0\le t\le t_f}\|X\Psi_{(m)}(t) - \bar{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0\ (m\to\infty),$$

所以

$$\begin{aligned}&\|X\Psi_{(m)}(t) - x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \\ &\|X\Psi_{(m)}(t) - \bar{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\bar{x}(t) - x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \\ &o(1) + M_1\|u(t) - U\Psi_{(m)}(t)\|_{L_{r_1}^2} + \\ &M_2\|v(t) - V\Psi_{(m)}(t)\|_{L_{r_2}^2}.\end{aligned}$$

再由式(17)和(18)即得结论. 证毕.

**引理 4** 在引理3的假定下,有:

$$\lim_{m\to\infty}|\bar{J}_1(U,V) - J_1(U\Psi_{(m)}(t), v(t))| = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{m\to\infty}|\bar{J}_2(U,V) - J_1(u(t), V\Psi_{(m)}(t))| = 0. \tag{20}$$

证 设与 $U$ 和 $V$ 对应的式(14)的解为 $X$、与 $U\Psi_{(m)}(t), v(t)$ 对应的式(1)的解为 $\bar{x}_1(t)$; 与 $u(t), V\Psi_{(m)}(t)$ 对应的式(1)的解为 $\bar{x}_2(t)$. 因为

$$\begin{aligned}&|\bar{J}_1(U,V) - J_1(U\Psi_{(m)}(t), v(t))| \le \\ &|q_1(X_m) - q_1(\bar{x}_1(t_f))| + \\ &|\frac{t_f}{m}\sum_{j=1}^{m} g_1(DX_j, DU_jDV_j) - \\ &\int_0^{t_f} g_1(\bar{x}_1, U\Psi_{(m)}(t), v)\mathrm{d}t|.\end{aligned} \tag{21}$$

由条件C之4)可得

$$|q_1(X_m) - q_1(\bar{x}_1(t_f))| \le L_{31}\|X_m - \bar{x}_1(t_f)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

由引理4可知,当 $m\to\infty$ 时有

$$\max_{0\le t\le t_f}\|X\Psi_{(m)}(t) - \bar{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0. \tag{22}$$

所以当 $m\to\infty$ 时有

$$|q_1(X_m) - q_1(\bar{x}_1(t_f))| \le L_{31}\|X_m - \bar{x}_1(t_f)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0. \tag{23}$$

又由条件C之3)可得

$$\begin{aligned}&\eta_1 = \\ &|\frac{t_f}{m}\sum_{j=1}^{m} g_1(DX_j, DU_jDV_j) - \\ &\int_0^{t_f} g_1(\bar{x}_1, U\Psi_{(m)}(t), v)\mathrm{d}t| \le \\ &\int_0^{t_f}|g_1(X\Psi_{(m)}(t), U\Psi_{(m)}(t), V\Psi_{(m)}(t)) - \\ &g_1(\bar{x}_1, U\Psi_{(m)}(t), v)|\mathrm{d}t \le \\ &L_{21}t_f[\max_{0\le t\le t_f}\|X\Psi_{(m)}(t) - \bar{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n}] + \\ &L_{21}\int_0^{t_f}\|V\Psi_{(m)}(t) - v(t)\|_{L_{r_2}^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由式(22)及

$$\|V\Psi_{(m)}(t) - v(t)\|_{L_{r_2}^2} \to 0\ (m\to\infty),$$

可得

$$\lim_{m\to\infty}\eta_1 = 0. \tag{24}$$

综合式(21)~(24)可知式(19)成立.同理可证式(20)也成立. 证毕.

## 3 主要结果(Main result)

**定理 1** 在系统(1)及性能指标(2)的假定下,若问题(P)存在唯一Nash最优解策略 $(u^*(t), v^*(t))$, 其对应的最优状态轨线为 $x^*(t)$; 问题 $(\bar{\mathrm{P}}_m)$ 存在唯一Nash最优解策略 $(U^*\ \ V^*)$, 其对应的最优状态矩阵为 $X^*$. 则:

1)

$$\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\bar{J}_1(U^*, V^*) = J_1(u^*(t), u^*(t)),\\ \lim\limits_{m\to\infty}\bar{J}_2(U^*, V^*) = J_2(u^*(t), u^*(t)),\end{cases} \tag{25}$$

$$\max_{0\le t\le t_f}\| X^*\Psi_{(m)}(t)-x^*(t)\|_{\mathbb{R}^n}\to 0\ (m\to\infty),\tag{26}$$

$$\| U^*\Psi_{(m)}(t)-u^*(t)\|_{L^2_{r_1}}\to 0\ (m\to\infty),\tag{27}$$

$$\| V^*\Psi_{(m)}(t)-v^*(t)\|_{L^2_{r_2}}\to 0\ (m\to\infty).\tag{28}$$

2) 若 $u^*(t)$ 和 $v^*(t)$ 具有有界的导数,则:

$$|\bar J_1(U^*,V^*)-J_1(u^*(t),v^*(t))|=O(m^{-1}),\tag{29}$$

$$|\bar J_2(U^*,V^*)-J_2(u^*(t),v^*(t))|=O(m^{-1}).\tag{30}$$

证　先证明 1),因为

$$\bar J_1(U^*,V^*)-J_1(u^*(t),v^*(t))\le \bar J_1([Wu^*(t)],V^*)-J_1(u^*(t),v^*(t))\le \alpha_{1m}.\tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_{1m}=&\bar J_1([Wu^*(t)],V^*)-\\&J_1([Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t),v^*(t))+\\&J_1([Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t),v^*(t))-\\&J_1(u^*(t),v^*(t)).\end{aligned}\tag{32}$$

由引理 4 可知,当 $m\to\infty$ 时

$$|\bar J_1([Wu^*(t)],V^*)-J_1([Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t),v^*(t))|=o(1).\tag{33}$$

由引理 1 可知:

$$\begin{aligned}&|J_1([Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t),v^*(t))-J_1(u^*(t),v^*(t))|=\\&O(\| Wu^*(t)\|\Psi_{(m)}(t)-v^*(t)\|_{L^2_{r_1}})=\\&o(1)\ (m\to\infty).\end{aligned}\tag{34}$$

综合式(33)和(34)可得

$$\alpha_m=o(1)\ (m\to\infty).\tag{35}$$

另一方面,由 $u^*(t)$ 的最优性可知:

$$J_1(U^*\Psi_{(m)}(t),v^*(t))\ge J_1(u^*(t),v^*(t)),$$

所以

$$\begin{aligned}&\bar J_1(U^*,V^*)-J_1(u^*(t),v^*(t))=\\&\bar J_1(U^*,V^*)-J_1(U^*\Psi_{(m)}(t),v^*(t))+\\&J_1(U^*\Psi_{(m)}(t),v^*(t))-J_1(u^*(t),v^*(t))\ge\\&\bar J_1(U^*,V^*)-J_1(U^*\Psi_{(m)}(t),v^*(t))\triangleq\beta_m.\end{aligned}$$

由引理 4 可知

$$\beta_m=o(1)\ (m\to\infty).\tag{36}$$

由上述推导可知

$$\alpha_m\ge\bar J_1(U^*,V^*)-J_1(u^*(t),v^*(t))\ge\beta_m.$$

因此,由式(35)和(36)可得

$$\lim_{m\to\infty}\bar J_1(U^*,V^*)=J_1(u^*(t),v^*(t)).$$

同理可得

$$\lim_{m\to\infty}\bar J_2(U^*,V^*)=J_2(u^*(t),v^*(t)).$$

因为 $U^*\in\bar\Omega_1,V^*\in\bar\Omega_2$ 且 $U^*,V^*,X^*$ 为逼近问题($\bar{\mathrm P}_m$)的 Nash 最优解,所以由引理 3 可知,存在函数 $\bar u(t)\in L^2_{r_1},\bar v(t)\in L^2_{r_2}$ 和 $\bar x(t)\in C^1_n[0,t_f]$,使得当 $m\to\infty$ 时有:

$$\| U\Psi_{(m)}(t)-\bar u(t)\|_{L^2_{r_1}}\to 0,\tag{37}$$

$$\| V\Psi_{(m)}(t)-\bar v(t)\|_{L^2_{r_2}}\to 0,\tag{38}$$

$$\max_{0\le t\le t_f}\| X\Psi_{(m)}(t)-\bar x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\to 0.\tag{39}$$

下面证 $\bar u(t)=u^*(t),\bar v(t)=v^*(t),\bar x(t)=x^*(t)$.

由 Lipschitz 条件可得

$$|\bar J_1(U^*,V^*)-J_1(\bar u(t),\bar v(t))|\le L_{31}\| X_m^*-\bar x(t_f)\|+\mu_1.$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_1=&\left|\int_0^{t_f}|g_1[X^*\Psi_{(m)}(t),U^*\Psi_{(m)}(t),V^*\Psi_{(m)}(t)]-g_1(\bar x,\bar u,\bar v)|\mathrm dt\right|\le\\&L_{21}t_f\max_{0\le t\le t_f}\| X^*\Psi_{(m)}(t)-\bar x(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\\&L_{21}\sqrt{t_f}[\| U^*\Psi_{(m)}(t)-\bar u(t)\|_{L^2_{r_1}}+\\&\| V^*\Psi_{(m)}(t)-\bar v(t)\|_{L^2_{r_2}}].\end{aligned}$$

由式(37)~(39)可得

$$\lim_{m\to\infty}\mu_1=0,\ \lim_{m\to\infty}\| X_m^*-\bar x(t_f)\|=0,$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}\bar J_1(U^*,V^*)=J_1(\bar u(t),\bar v(t)).\tag{40}$$

由式(25)和(40)可得

$$\lim_{m\to\infty}\bar J_1(u^*(t),v^*(t))=J_1(\bar u(t),\bar v(t)).\tag{41}$$

同理可证:

$$\lim_{m\to\infty}\bar J_1(u^*(t),v^*(t))=J_1(\bar u(t),\bar v(t)).\tag{42}$$

由 Nash 最优解的唯一性假设可得:$\bar u(t)=u^*(t)$, $\bar v(t)=v^*(t)$ 从而 $\bar x(t)=x^*(t)$.

2) 设与 $[Wu^*(t)]$ 和 $V^*$ 对应的式(1)的解为 $\bar X^*$,与 $[Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t),v^*(t)$ 对应的式(1)的解为 $\bar x_1^*(t)$;与 $u^*(t),[Wv^*(t)]\Psi_{(m)}(t)$ 对应的式(1)的解为 $\bar x_2^*(t)$,则参照引理 4 的证明,可推得

$$|\bar{J}_1([Wu^*(t)],V^*) - J_1([Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t),v^*(t))| \leqslant L_{31}\|\tilde{X}_m^* - \tilde{x}_1^*(t_f)\|_{\mathbb{E}^n} + L_{21}t_f[\max_{0\leqslant t\leqslant t_f}\|\tilde{X}\Psi_m(t) - \tilde{x}_1^*(t)\|_{\mathbb{E}^n}] + L_{21}\int_0^{t_f}\|V^*\Psi_{(m)}(t) - v^*(t)\|_{L^2_{r_2}}\mathrm{d}t. \quad (43)$$

由于 $u^*(t)$ 和 $v^*(t)$ 具有有界的导数,故由引理2可得式(43)右边各项均为 $O(m^{-1})$. 从而

$$|\bar{J}_1([Wu^*(t)],V^*) - J_1([Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t),v^*(t))| = O(m^{-1}). \quad (44)$$

同理可证:

$$|\bar{J}_1(U^*,V^*) - J_1(U^*\Psi_{(m)}(t),v^*(t))| = O(m^{-1}). \quad (45)$$

则由式(31)可知:

$$\bar{J}_1(U^*,V^*) - J_1(u^*(t),v^*(t)) \leqslant O(m^{-1}) + M\|[Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t) - v^*(t)\|_{L^2_{r_2}}. \quad (46)$$

因为 $u^*(t)$ 的导数有界,所以

$$\|[Wu^*(t)]\Psi_{(m)}(t) - v^*(t)\|_{L^2_{r_2}} = O(m^{-1}),$$

故由式(46)可知,存在某正数 $a$, 使得

$$\bar{J}_1(U^*,V^*) - J_1(u^*(t),v^*(t)) \leqslant am^{-1}. \quad (47)$$

又因为

$$\bar{J}_1(U^*,V^*) - J_1(u^*(t),v^*(t)) \geqslant \bar{J}_1(U^*,V^*) - J_1(U^*\Psi_{(m)}(t),v^*(t)),$$

所以由式(45)可知,存在某正数 $b$, 使得

$$\bar{J}_1(U^*,V^*) - J_1(u^*(t),v^*(t)) \leqslant -bm^{-1}. \quad (48)$$

综合可知

$$|\bar{J}_1(U^*,V^*) - J_1(u^*(t),v^*(t))| = O(m^{-1}).$$

同理可证

$$|\bar{J}_2(U^*,V^*) - J_2(u^*(t),v^*(t))| = O(m^{-1}).$$

证毕.

定理1说明,用小波基函数逼近求解是合理的,其逼近解均方收敛于精确解,且逼近误差阶数为 $O(m^{-1})$,故适当选取 $m$ 即可达到精度要求.

## 参考文献(References)

[1] Zhang Chengke and Wang Xingyu. Analysis method for Nash strategy of linear time variant quadratic differential game via wavelets (I) – wavelet approximation solution [J]. Control Theory and Applications, 2002,19(1):57–60 (in Chinese)

[2] Basar T and Olsder G J. Dynamic Non-cooperative Game Theory [M]. London: Academic Press, 1982

[3] Zhang Chengke. Some studies on control theory based on wavelets analysis [D] Shanghai: East China University of Science & Technology, 1999 (in Chinese)

[4] Wang Xingyu and Jiang Weisun. Block Pulse Operator and Its Applications [M]. Shanghai: Press of East China University of Science & Technolgy, 1989 (in Chinese)

[5] Delyyon B, Judisky A and Benveniste A. Accuracy analysis for wavelet approximations [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1995,6(2):332–348

本文作者简介

张成科 见本刊2002年第1期第60页.

王行愚 见本刊2002年第1期第60页.