文章编号：1000-8152(2002)02-0207-04

灰色广义预测控制算法及仿真研究*

罗开元　高　峰　胡俐蕊
(贵州大学数学系·贵阳,550025)

摘要：基于灰色系统模型，构造了一种新的广义预测控制算法．该算法仅在线估计两个参数，不用求解 Diophantine 方程．从而大大减少了计算量，增强了实时性．仿真实验说明，该算法单步和多步情况均可获得较好的控制跟踪效果．

关键词：灰色系统；广义预测控制；算法；鲁棒性；系统辨识
文献标识码：A

Grey Generalized Predictive Control Algorithm and Simulation

LUO Kaiyuan,　GAO Feng　and　HU Lirui
(Department of Mathematics, Guizhou University · Guiyang, 550025, P.R China)

Abstract: A new generalized predictive control algorithm based on grey system model is presented. The algorithm only estimates two parameters without on-line solving the Diophantine equation. So the computation of the algorithm can be greatly reduced. Good one-step and long-range predictive control results can be obtained from simulation experiments.

Key words: grey system; generalized predictive control; algorithm; robustness; system identification

1　引言(Introduction)

广义预测控制(GPC)的综合性能优于其他形式的自校正控制器，已是被广泛接受的事实[1,2]．然而在应用中仍存在计算量大，难于适应快速实时性要求等缺点，不利于推广应用[3]．本文基于灰色系统模型，构造了一种新的广义预测控制算法．与其他广义预测控制算法比较，该算法所需估计的参数少，仅两个，而且所用原始数据也可很少(本研究在仿真实验时，仅取5个)，同时该算法回避了求解 Diophantine 方程，因而该算法大大减少了计算量，极大的提高了这一控制方法的实时性、经济性．大量仿真实验研究还表明，该算法能取得对稳定系统、非最小相位系统、非线性系统、某些不稳定系统的很好的控制效果，显示了较强的鲁棒性．

2　单步灰色广义预测控制算法(One-step grey generalized predictive control algorithm)

2.1　预测模型(Predictive model)

任一实际系统由于有随机干扰等不确定因素存在，因而都可视为灰色系统[4]．

对单输入单输出系统，设可测得其输入和输出时间序列如下：

$$u^{(0)}(1), u^{(0)}(2), \cdots, u^{(0)}(n), \cdots, \tag{2.1.1}$$

$$x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n), \cdots. \tag{2.1.2}$$

由于受到随机干扰的序列(2.1.1)和(2.1.2)都是灰数据列．可对灰数据列(2.1.1)和(2.1.2)进行生成累加，得一次生成累加数据列：

$$u^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^{i} u^{(0)}(k),\ i = 1,2,\cdots,n,\cdots, \tag{2.1.3}$$

$$x^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^{i} x^{(0)}(k),\ i = 1,2,\cdots,n,\cdots. \tag{2.1.4}$$

利用一次生成累加数据列(2.1.3)和(2.1.4)可建立 GM(1,2)灰微分方程[4]

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bu^{(1)}(k). \tag{2.1.5}$$

其中 $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$．并得方程(2.1.5)的白化方程如下

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = bu^{(1)}(t), \tag{2.1.6}$$

系数 a,b 可用下式进行估计

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y. \tag{2.1.7}$$

* 基金项目：贵州省自然科学基金(983074)资助项目
收稿日期：1999-12-24；收修改稿日期：2001-12-17

其中

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & u^{(1)}(2) \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)) & u^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)) & u^{(1)}(n) \end{pmatrix}, \tag{2.1.8}$$

$$Y=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n))^{\mathrm{T}}. \tag{2.1.9}$$

白化微分方程(2.1.6)是连续型的,而广义预测控制是一种计算机控制算法.因此,必须将式(2.1.5)离散化.离散化后得:

$$x^{(1)}(k+1)=(1-Ta)x^{(1)}(k)+Tbu^{(1)}(k). \tag{2.1.10}$$

其中,T 为采样周期.

由于白化微分方程(2.1.6)是由一次累加生成数据列所建立,因此,由式(2.1.6)或式(2.1.10)所得数据必须经累减生成,作还原后才能用[5].为减少在线计算量,也为便于优化处理.对式(2.1.10)作简单数学处理,用差分算子 Δ 两次乘该式两边,整理得:

$$x^{(0)}(k+1)=$$
$$[(2-Ta)-(1-Ta)z^{-1}]x^{(0)}(k)+Tb\Delta u^{(0)}(k). \tag{2.1.11}$$

其中 z^{-1} 为滞后算子.

若在式(2.1.11)中代以 $\Delta u^{(0)}(k)$ 的优化值,计算结果即为一步最优预测值 $x_{\mathrm{p}}^{(0)}(k+1)$ 或一步最优模型输出 $x_{\mathrm{m}}^{(0)}(k+1)$. 即

$$x_{\mathrm{m}}^{(0)}(k+1)=x_{\mathrm{p}}^{(0)}(k+1)=$$
$$[(2-Ta)-(1-Ta)z^{-1}]x^{(0)}(k)+Tb\Delta u^{(0)}(k). \tag{2.1.12}$$

2.2 自校正控制算法(Self-adjusting control algorithm)

灰色系统模型 GM(1,2)的主要优点之一是,可用少数几个数据建模,计算量很少,且可获得较高的短期预测精度[4].为此,采用 5 个数据,用有限记忆法在线递推估计参数 a,b,方法是每采得一个新数据就淘汰一个最早的数据,即首先用:

$$u^{(0)}(1),u^{(0)}(2),u^{(0)}(3),u^{(0)}(4),u^{(0)}(5);$$
$$x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),x^{(0)}(4),x^{(0)}(5)$$

估计 a,b

$$\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & u^{(1)}(2) \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)) & u^{(1)}(3) \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(3)+x^{(1)}(4)) & u^{(1)}(4) \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(4)+x^{(1)}(5)) & u^{(1)}(5) \end{pmatrix},$$

$$Y=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),x^{(0)}(4),x^{(0)}(5))^{\mathrm{T}}.$$

当采得新数据 $u^{(0)}(6)$, $x^{(0)}(6)$, 则用新数据组

$$u^{(0)}(2),u^{(0)}(3),u^{(0)}(4),u^{(0)}(5),u^{(0)}(6);$$
$$x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),x^{(0)}(4),x^{(0)}(5),x^{(0)}(6)$$

重新估计参数 a,b.

如此不断循环,从而及时地校正预测方程的参数以适应被控对象因随机扰动等原因引起的时变,保持符合实际的准确预测值.

2.3 最优控制律计算(Optimal control law)

引入以下目标函数[6]

$$J=q[x^{(0)}(k+1)-x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k+1)]^2+\lambda[\Delta u^{(0)}(k)]^2, \tag{2.3.1}$$

其中 $x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k+1)$ 为对象输出的期望值,q,λ 为输出误差及增量控制的权系数.

$$x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k+1)=-\frac{(1-\alpha_{\mathrm{r}})w}{1-\alpha_{\mathrm{r}}z^{-1}},0<\alpha_{\mathrm{r}}<1,$$

w 为输入设定值或记为

$$\begin{cases} x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k+1)=\alpha x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k)+(1-\alpha_{\mathrm{r}})w, \\ x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k)=x^{(0)}(k). \end{cases} \tag{2.3.2}$$

将式(2.1.7)代入式(2.3.1),得:

$$J=q\{[(2-Ta)-(1-Ta)z^{-1}]x^{(0)}(k)+$$
$$Tb\Delta u^{(0)}(k)-x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k+1)\}^2+\lambda[\Delta u^{(0)}(k)]^2. \tag{2.3.3}$$

令 $\frac{\partial J}{\partial[\Delta u^{(0)}(k)]}=0$, 解出最优控制增量为

$$\Delta u^{(0)}(k)=\frac{qTb}{qT^2b^2+\lambda}[x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k+1)-$$
$$(2-Ta-(1-Ta)z^{-1})x^{(0)}(k)], \tag{2.3.4}$$

或

$$u^{(0)}(k)=\frac{qTb}{qT^2b^2+\lambda}[x_{\mathrm{r}}^{(0)}(k+1)-(2-Ta-$$
$$(1-Ta)z^{-1})x^{(0)}(k)]+u^{(0)}(k-1). \tag{2.3.5}$$

综合上述,算法步骤可总结如下:

Step 1 给定参数和初值，$q,\lambda,a,T,w,u^{(0)}(k)$；

Step 2 读取被控对象输出数据 $x^{(0)}(k)$；

Step 3 由式(2.1.3)和式(2.1.4)计算累加生成数据列；

Step 4 由式(2.1.7)，(2.1.8)构造数据矩阵 B 和数据向量 Y，并由式(2.1.6) 估计模型(2.1.5) 的参数 a,b；

Step 5 由式(2.3.2)计算对象输出期望值；

Step 6 由式(2.3.4)计算最优控制增量；

Step 7 返回 Step 2.

3 多步灰色广义预测控制算法(Long-range grey generalized predictve control algorithm)

3.1 预测模型(Predictive model)

为求得多步预测模型对式(2.1.10)作如下处理，两边同乘以算子 z^{j-1}，得

$$x^{(0)}(k+j)=[(2-Ta)-(1-Ta)z^{-1}]x^{(0)}(k+j-1)+Tb\Delta u^{(0)}(k+j-1).\quad(3.1.1)$$

将式(3.1.1)按 $j=1,2,\cdots,P$ 展开：

$$\begin{cases}x^{(0)}(k+1)=Tb\Delta u^{(0)}(k)-(1-Ta)x^{(0)}(k-1)+(2-Ta)x^{(0)}(k),\\ x^{(0)}(k+2)=Tbu^{(0)}(k+1)-(1-Ta)x^{(0)}(k)+(2-Ta)x^{(0)}(k+1),\\ \vdots\\ x^{(0)}(k+M)=Tbu^{(0)}(k+M-1)-(1-Ta)x^{(0)}(k+M-2)+(2-Ta)x^{(0)}(k+M-1),\\ x^{(0)}(k+M+1)=-(1-Ta)x^{(0)}(k+M-1)+(2-Ta)x^{(0)}(k+M),\\ \vdots\\ x^{(0)}(k+P)=-(1-Ta)x^{(0)}(k+P-2)+(2-Ta)x^{(0)}(k+P-1).\end{cases}\quad(3.1.2)$$

其中 M 为控制时域长度，P 为多步预测时域长度，取 $M\leqslant P$，当 $j>M$ 时，$\Delta u^{(0)}(k+j-1)=0$.

将式(3.1.2)进行整理，并令

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\-(2-Ta)&1&0&\cdots&0&0&0\\1-Ta&-(2-Ta)&1&\cdots&0&0&0\\0&1-Ta&-(2-Ta)&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1-Ta&-(2-Ta)&1\end{pmatrix}_{P\times P},$$

$$X^{(0)}(k+1)=(x^{(0)}(k+1),\cdots,x^{(0)}(k+2),x^{(0)}(k+P))^{\mathrm T},$$

$$X^{(0)}(k-1)=(x^{(0)}(k-1),x^{(0)}(k))^{\mathrm T},$$

$$\Delta U^{(0)}=(\Delta u^{(0)}(k),\Delta u^{(0)}(k+1),\cdots,\Delta u^{(0)}(k+M-1))^{\mathrm T},$$

$$G=TbA^{-1}\begin{pmatrix}I_{M\times M}\\0\end{pmatrix}_{P\times M},$$

$$S=A^{-1}\begin{pmatrix}-(1-Ta)&2-Ta\\0&-(1-Ta)\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\end{pmatrix}_{P\times 2}.$$

得如下多步预测模型的向量形式：

$$X^{(0)}(k+1)=G\Delta U^{(0)}(k)+SX^{(0)}(k-1).\quad(3.1.3)$$

当代以 $\Delta U^{(0)}(k)$ 的优化值时式(3.1.3)所得即为多步最优预测值或多步最优模型输出

$$X_{\mathrm m}^{(0)}(k+1)=X_{\mathrm P}^{(0)}(k+1)=G\Delta U^{(0)}(k)+SX^{(0)}(k+1).\quad(3.1.4)$$

3.2 自校正控制算法(Self-adjusting control algorithm)

多步灰色广义预测控制的自校正控制算法同单步情况，在此不再赘述.

3.3 最优控制律计算(Optimal control law)

仍采用输出预测误差和控制增量加权的二次型性能指标[6]：

$$J=\sum_{i=1}^{P}q_i[x^{(0)}(k+i)-x_{\mathrm r}^{(0)}(k+i)]^2+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j[\Delta u^{(0)}(k+j)]^2.\quad(3.3.1)$$

P 为最大预测时域长度；M 为控制时域长度. 其中 q_i,λ_j 为输出预测误差及控制增量加权系数.

$$\begin{cases}x_{\mathrm r}^{(0)}(k)=x^{(0)}(k),\\x_{\mathrm r}^{(0)}(k+j)=a_{\mathrm r}x_{\mathrm r}^{(0)}(k+j-1)+(1-a_{\mathrm r})w,\\\quad j=1,2,\cdots,P\end{cases}\quad(3.3.2)$$

为对象输出的期望值，其中 w 为设定值.

式(3.3.1)的向量形式为

$$J=[X^{(0)}(k+1)-X_{\mathrm r}^{(0)}(k+1)]^{\mathrm T}Q[X^{(0)}(k+1)-X_{\mathrm r}^{(0)}(k+1)]+[\Delta U^{(0)}(k)]^{\mathrm T}\Lambda[\Delta U^{(0)}(k)].\quad(3.3.3)$$

$X^{(0)}(k+1)$ 的意义同前，

$$X_{\mathrm r}^{(0)}(k+1)=(x_{\mathrm r}^{(0)}(k+1),x_{\mathrm r}^{(0)}(k+2),\cdots,x_{\mathrm r}^{(0)}(k+p))^{\mathrm T},$$

$$Q = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \cdots, q_p),$$
$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m).$$

将式(3.1.3)代入式(3.3.3),得

$$J = [G\Delta U^{(0)}(k) + SX^{(0)}(k-1) - X_r^{(0)}(k+1)]^{\mathrm{T}} Q [G\Delta U^{(0)}(k) + SX^{(0)}(k-1) - X_r^{(0)}(k+1)] + [\Delta U^{(0)}(k)]^{\mathrm{T}} \Lambda [\Delta U^{(0)}(k)]. \quad (3.3.4)$$

令 $\frac{\partial J}{\partial(\Delta U^{(0)}(k))} = 0$, 解得最优控制增量的向量形式

$$\Delta U^{(0)}(k) = [G^{\mathrm{T}} Q G + \Lambda]^{-1} G^{\mathrm{T}} Q [X_r^{(0)}(k+1) - SX^{(0)}(k-1)]. \quad (3.3.5)$$

若采用只执行当前一步,下一时刻的控制增量按式(3.3.5)递推重算的策略,则只需算出式(3.3.5)的第一行

$$\Delta u_1^{(0)}(k) = (1,0,\cdots,0)(G^{\mathrm{T}} QG + \Lambda)^{-1} G^{\mathrm{T}} Q [X_r^{(0)}(k+1) - SX^{(0)}(k-1)]. \quad (3.3.6)$$

算法步骤类似于2.3.

4 仿真(Simulation)

大量仿真实验说明,单步及多步的灰色广义预测控制算法均可获得相当好的控制效果.

例1 设被控对象为如下非线性系统:

$$x^{(0)}(k) = 0.705x^{(0)}(k-1) - 0.124x^{(0)}(k-2) + u^{(0)}(k-1) + 0.246[u^{(0)}(k-1)]^2 + \omega(k) - 0.141\omega(k-1) + 0.0248\omega(k-2).$$

其中 $\omega(k)$ 是具有零均值的白噪声,方差为0.01.用单步算法跟踪一矩形波,参数选择:$T = 0.1, q = 1, \lambda = 0.9, \alpha_r = 0.3$,仿真结果见图1.

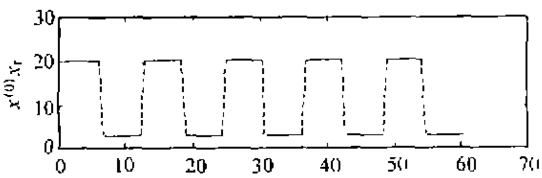

图1(a) 例1的仿真结果

Fig. 1(a) Simulation result of Example 1

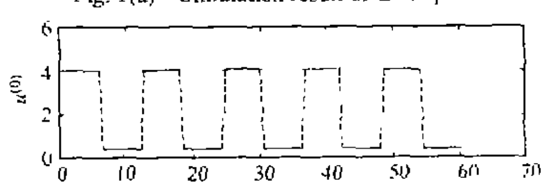

图1(b) 例1的仿真控制动作

Fig. 1(b) Simulation control action of Example 1

例2 设被控对象为如下非最小相位、纯时延为1的系统:

$$x^{(0)}(k) = 0.2x^{(0)}(k-1) + 0.48x^{(0)}(k-2) + u^{(0)}(k-2) + 1.5u^{(0)}(k-3) + \omega(k) + 0.04\omega(k-1) + 0.098\omega(k-2).$$

$\omega(k)$ 的意义同前.用多步算法跟踪一矩形波,参数选择:$T = 0.02, q = 0.01, \lambda = 1, P = 4, M = 1$.仿真结果见图2.

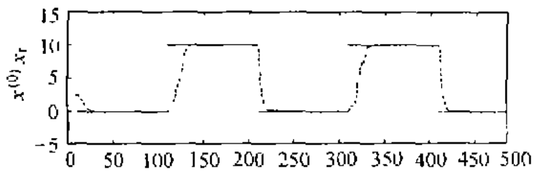

图2(a) 例2的仿真结果

Fig. 2(a) Simulation result of Example 2

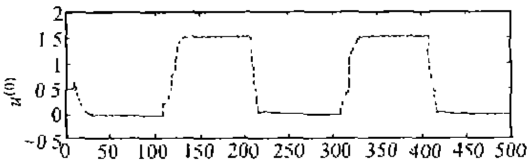

图2(b) 例2的仿真控制动作

Fig. 2(b) Simulation control action of Example 2

5 结论(Conclusion)

本文基于灰色系统模型构造了一类新的广义预测控制算法.该算法计算量很少,从而大大提高了实时性.大量仿真实验说明,该算法对非最小相位、非线性及某些不稳定系统能得到很好的跟踪控制效果.同时说明了其鲁棒性很强.

参考文献(References)

[1] Yuan Zhuzhi. Recursive generalized predictive STC [J]. Acta Automatica Sinica, 1989, 15(4): 384 – 351 (in Chinese)

[2] Xu Lihong and Feng Chunbo. Reviews of generalized predictive control [J]. Control and Decision, 1992, 7(4): 241 – 246 (in Chinese)

[3] Wang W and Henrikson R. Direct adaptive generalized predictive control [J]. Modeling, Identification and Control, 1993, 14(4): 181 – 191

[4] Deng Julong. Grey Control Systems [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1993 (in Chinese)

[5] Liu Sifeng. Grey Systems Theory and Application [M]. 2rd ed. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese)

[6] Wang W. Generalized Predictive Control Theory and Application [M]. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese)

本文作者简介

罗开元 1942年生.副教授.主要研究方向:预测控制,自适应控制等. Email: cqzluoky@x263.net

高 峰 1973年生.硕士研究生.主要研究方向:预测控制,神经网络控制等.

胡俐蕊 1970年生.硕士研究生.主要研究方向:预测控制,自适应控制等.