文章编号: 1000-8152(2002)02-0311-02

闭排队网络当性能函数与参数相关时的性能灵敏度分析 *

殷保群　周亚平　奚宏生　孙德敏
(中国科学技术大学自动化系·合肥,230026)

摘要: 借助于无穷小矩阵摄动方法,讨论了一类 Markov 过程,其稳态性能关于参数摄动的灵敏度分析问题.然后研究了闭排队网络的稳态性能灵敏度分析问题,并在参数相关性能函数的情况下,给出了网络的几种稳态性能的灵敏度公式.这些公式表明稳态性能灵敏度很容易通过网络势能进行计算.

关键词: 闭排队网络; 参数摄动; 灵敏度分析; 势能

文献标识码: A

Sensitivity Analysis of Performance with Parameter-Dependent Performance Functions in Closed Queueing Networks

YIN Baoqun, ZHOU Yaping, XI Hongsheng and SUN Demin
(Department of Automation, China University of Science and Technology · Hefei, 230026, P.R.China)

Abstract: By using the approach of the infinitesimal generator perturbation, the problems of sensitivity analysis of the steady-state performance with respect to the parameter perturbation are discussed for a class of Markov processes. Then the sensitivities of steady-state performance are studied in closed state-dependent queueing networks. Sensitivity formulas of several kinds of the steady-state performance are given for parameter-dependent performance functions. These formulas show that the sensitivities of steady-state performance can be easily calculated by the potentials of networks.

Key words: closed queueing networks; parameter perturbation; sensitivity analysis; potential

1 引言(Introduction)

离散事件动态系统的摄动分析(PA)方法已日益成为一个重要的研究领域.PA 方法采取动态观点来研究系统的行为,其主要目标是为了获得系统性能关于参数摄动的灵敏度.PA 方法中的摄动实现概念已被成功地应用于排队网络的性能灵敏度分析,借助于实现因子,解决了系统的稳态性能关于服务率摄动的灵敏度分析问题[1].然而,这个方法难于应用到系统的稳态性能关于路径概率摄动的灵敏度分析问题[2].此外,在以前的讨论中都假设性能函数与网络参数无关[3,4].

曹希仁教授和陈翰馥教授在文献[3]中提出的 Markov 过程无穷小矩阵摄动方法可用于解决上述困难.该方法提供了 Markov 过程稳态性能关于其无穷小矩阵摄动的一种新的导数公式.涉及在导数公式中的量,性能势,容易通过分析 Markov 过程的一条单一样本轨道获得其估计量.通过使用这种方法、文献[4]研究了一类闭排队网络的稳态性能关于参数(服务率和路径概率)的灵敏度分析问题,并且给出了灵敏度公式.本文将在参数相关性能函数的情况下,研究闭排队网络稳态性能关于网络参数的灵敏度分析问题,并导出网络几种常用稳态性能的灵敏度公式.

2 灵敏度公式(Sensitivity formulas)

考虑一个正常返的、不可约的 Markov 过程 $Y=\{Y(t);t\geq 0\}$,它有一个有限的状态空间 $\Phi=\{1,2,\cdots,K\}$,无穷小矩阵为 $A=[a_{ij}]$.由 Markov 过程理论可知,Y 存在唯一的稳态分布.用 $P=(p(1),p(2),\cdots,p(K))$ 表示 Y 的稳态概率向量.设 $e=(1,1,\cdots,1)'$ 为一 K 维列向量,"B'"表示矩阵 B 的转置.

设 $f:\Phi\to\mathbb{R}$ 为一个性能函数,定义稳态性能 η_f 为 f 关于稳态概率 P 的期望值,即

$$\eta_f=\sum_{i=1}^{K}p(i)f(i)=Pf. \tag{1}$$

上式中最后一个 $f=(f(1),f(2),\cdots,f(K))'$(这里 f

* 基金项目:国家自然科学基金(69974037)和国家高性能计算基金(00212)资助项目.
收稿日期:1999-06-09; 收修改稿日期:2001-03-02.

既表示函数,也表示向量,可参看文献[3]或[5]).现在设无穷小矩阵 A 为在区间 $J \subset \mathbb{R}$ 上变化的参数 θ 的函数,性能函数 f 也依赖于参数 θ,且所有 $a_{ij} = a_{ij}(\theta), i,j = 1,2,\cdots,K$,及 f 均为 θ 的可微函数.有关势能 $x^{(f)}$,实现矩阵 $D^{(f)}$ 及无穷小矩阵群逆 $A^{\#}$ 等概念,请参看文献[3 ~ 5].

引理 势能 $x^{(f)}$ 是 Poisson 方程

$$Ax = -f + \eta_f e \tag{2}$$

的一切解,且 $x^{(f)} = -A^{\#}f + \beta e, \beta \in \mathbb{R}$.

从(2)式,我们容易证明下列定理1成立.

定理 1

$$\partial \eta_f/\partial\theta = -P\partial A/\partial\theta A^{\#}f + P\partial f/\partial\theta = \tag{3}$$

$$-P\partial A/\partial\theta D^{(f)}P' + P\partial f/\partial\theta = \tag{4}$$

$$P\partial A/\partial\theta x^{(f)} + P\partial f/\partial\theta. \tag{5}$$

下面考虑文献[4]中所描述的状态相关闭排队网络,并且所用记号也与文献[4]相同.但现在假设性能函数 f 依赖于网络参数 $\mu_{i,n}, q_{i,j}, i,j \in \Gamma, n \in \Phi$.也用 f 表示一个列向量,其第 n 个分量为 $f(n)$.定义

$$\eta_T^{(f)} = \eta_f = \sum_{n\in\Phi} p(n)f(n) = Pf, \tag{6}$$

$$\eta = \sum_{n\in\Phi} p(n)\mu(n) = P\mu, \tag{7}$$

$$\eta^{(f)} = \eta_{f_T}/\eta. \tag{8}$$

这里 μ 是一个列向量,其第 n 个分量为 $\mu(n)$. $\eta_T^{(f)}$ 和 $\eta^{(f)}$ 分别称为稳态时间平均性能和稳态顾客平均性能,η 称为稳态通过量(throughput).

由定理1,我们可以得到下列推论.

推论 1 对所有 $i \in \Gamma, n \in \Phi$,有

$$\mu_{i,n}\partial\eta_T^{(f)}/\partial\mu_{i,n} = p(n)[\eta_T^{(f)} - f(n) - \beta_{i,n}x^{(f)} + \mu_{i,n}P\partial f/\partial\mu_{i,n}, \tag{9}$$

$$\mu_{i,n}\partial\eta/\partial\mu_{i,n} = p(n)[\eta - \mu(n) - \beta_{i,n}x^{(\mu)} + \varepsilon(n_i)\mu_{i,n}], \tag{10}$$

$$\mu_{i,n}/\eta^{(e)}\partial\eta^{(f)}/\partial\mu_{i,n} = p(n)[(\alpha_n - \beta_{i,n})(x^{(f)} - \eta^{(f)}x^{(\mu)}) - \varepsilon(n_i)\mu_{i,n}\eta^{(f)}] + \mu_{i,n}P\partial f/\partial\mu_{i,n} = \tag{11}$$

$$p(n)\{[\mu(n) - \varepsilon(n_i)\mu_{i,n}]\eta^{(f)} - f(n) - \beta_{i,n}(x^{(f)} - \eta^{(f)}x^{(\mu)})\} + \mu_{i,n}P\partial f/\partial\mu_{i,n}. \tag{12}$$

这里 $x^{(f)}$ 是网络的势能向量(即网络的状态过程 Y 关于 f 的势能);$\eta^{(e)} = \eta_T^{(e)}/\eta = 1/\eta$.

推论 2 对所有 $i,j \in \Gamma$,有

$$\partial\eta_T^{(f)}/\partial q_{i,j} = P\partial A/\partial q_{i,j}x^{(f)} + P\partial f/\partial q_{i,j}, \tag{13}$$

$$\partial\eta/\partial q_{i,j} = P\partial A/\partial q_{i,j}x^{(\mu)}, \tag{14}$$

$$1/\eta^{(e)}\partial\eta^{(f)}/\partial q_{i,j} = P[\partial A/\partial q_{i,j}(x^{(f)} - \eta^{(f)}x^{(\mu)}) + \partial f/\partial q_{i,j}]. \tag{15}$$

3 结论(Conclusions)

本文借助于无穷小矩阵摄动方法,研究了一类闭排队网络的稳态性能灵敏度分析问题,并对参数相关的性能函数给出了系统性能关于参数摄动的灵敏度公式.这些公式为闭排队网络基于单样本轨道的性能灵敏度分析提供了一个理论基础.由于Markov系统是离散事件动态系统最基本的模型,故该方法可望运用到一类更广泛的系统,比如半Markov系统与广义半Markov系统.在公式中的势能可从系统的一条单一样本轨道上获得其精确估计量,故它可被直接用于闭排队网络的优化问题.

参考文献(References)

[1] Cao X R. Realization Probabilities: The Dynamics of Queueing Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1994

[2] Cao X R. An overview of perturbation analysis [A]. Qin Huashu, ed. Proceedings of Chinese Control Conference [C]. Beijing: China Science and Technology Press, 1995,22 – 39

[3] Cao X R and Chen H F. Perturbation realization, potentials, and sensitivity analysis of Markov processes [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997,42(10):1382 – 1393

[4] Yin Baoqun, Zhou Yaping, Yang Xiaoxian, et al. Sensitivity formulas of performance in closed state-dependent queueing networks [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16 (2): 255 – 257 (in Chinese)

[5] Yin B Q, Zhou Y P, Xi H S, et al. Sensitivity formulas of performance in two-server cyclic queuing networks with phase-type distributed service times [J]. Int. Trans. in Operation Research, 1999, 6(6):649 – 663

本文作者简介

殷保群 1962年生.1985年毕业于四川大学数学系.现为中国科学技术大学自动化系副教授、博士.主要从事非线性系统展开理论,随机离散事件系统性能分析、优化及在通讯网络中应用等方面的研究工作. Email:bqyin@ustc.edu.cn

周亚平 1963年生.1984年毕业于中国科学技术大学自动化系.现为中国科学技术大学管理科学系副教授,并在中国科学技术大学自动化系攻读在职博士学位.从事经济管理系统、排队网络性能灵敏度仿真估计及优化等方面的研究.

奚宏生 1950年生.1977年毕业于中国科学技术大学数学系.现为中国科学技术大学自动化系教授,博士生导师.长期从事鲁棒控制,离散事件动态系统及其应用等方面的研究.

孙德敏 1939年生.1964年毕业于中国科学技术大学,并留校任教至今.现为中国科学技术大学自动化系教授,博士生导师,中国自动化学会理事,中国自动化学会控制理论专业委员会委员.长期从事工业控制过程先进控制和优化及伺服系统综合方面的研究.