文章编号: 1000-8152(2002)04-05-0516

一类抛物型脉冲调宽采样控制系统的稳态控制*

李全国, 赵 怡
(中山大学 数学系,广州 510275)

摘要: 文[1]中讨论了一类线性抛物型脉冲调宽采样控制系统的稳态控制,本文在较弱的条件下得到类似的结果,并证明了一类半线性抛物型脉冲调宽采样控制系统的稳态的存在性.

关键词: 稳态; 稳态稳定; 抛物型系统
中图分类号: TP271.81 **文献标识码**: A

Steady-state control of a class of parabolic pulse-width sampler systems

LI Quan-guo, ZHAO Yi
(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The paper [1] studies the steady-state control of a class of liner parabolics pulse-width sampler systems. This paper obtains the same conclusion under the weak condition, and studies the existence of the steady-state of the semilinear parabolic pulse-width sampler system.

Key words: steady-state; steady-state stability; parabolic system

有关线性系统的稳态控制在文[1~6]中已有研究.本文在较弱的条件下得到类似的结果,并研究了半线性系统的稳态控制.

在文[1]中考虑了如下由抽象抛物型方程描述的系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = Ay(t) + Bu(t) + f(t),\\ z(t) = Cy(t).\end{cases} \tag{1}$$

其中状态变量 $y(t)$ 在自反 Banach 空间 X 中取值: $y(t)\in X$, A 是 X 上解析紧半群 $S(t)$ 的生成元, $u(t)$ 是 q 维控制: $u(t)\in\mathbb{R}^q$, B 是从$\mathbb{R}^q$到 X 的有界线性算子, $f(t)$ 是系统的阶跃扰动: $f(t) = f\cdot 1(t)$, $f\in X$. 在系统(1)中, $z(t)$ 是 p 维输出, C 是从 X 到 $\mathbb{R}^p$ 的有界线性算子.

在系统(1)中,假设控制信号 $u(t)$ 是从一个 q 维脉冲调宽采样器得到的,即它是调宽采样器的输出,而调宽采样器的 q 维输入信号为 $v(t)$, 它满足如下方程

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = Jv(t) + Kz(t). \tag{2}$$

即 $v(t)$ 是动态控制器(2)的输出,其中 J 与 K 分别是$q\times q$ 与$q\times p$ 矩阵,通常,矩阵 J 是由控制器的动态特性所确定,而矩阵 K 称为反馈阵,它可以由设计者来选择其参数,调宽采样器的输出 $u(t)$ 与输入 $v(t)$ 之间满足下面的动态关系:

$$u_i(t) = \begin{cases}\mathrm{sign}\alpha_{n_1},\ nT\leqslant t<(n+|\alpha_{n_i}|)T,\\ 0,\ (n+|\alpha_{n_1}|)T\leqslant T<(n+1)T,\end{cases} \tag{3}$$

$$\alpha_{n_i} = \begin{cases}v_i(nT),\ |v_i(nT)|\leqslant 1,\\ \mathrm{sign}v_i(nT),\ |v_i(nT)|\geqslant 1.\end{cases}$$

$$i = 1,2,\cdots,q,\ n\in I^+\triangleq\{0,1,2,\cdots\}.$$

其中 $T>0$ 是调宽采样器的采样周期.记由系统(3)描述的关系为 $u(t) = F(v)(t)$. 系统(1)~(3)称为抛物型脉冲调宽采样控制系统或简称为抛物型 PWM 系统.

称 $\alpha_n = (\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_q})^{\mathrm{T}}$为 PWM 采样器在第 n 个采样周期的导通率, $n\in I^+$,记 $\Omega = \{\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_q)\}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^q$, $|\alpha_i|\leqslant 1, i = 1,2,\cdots,q\}$,则 $\alpha_n\in\Omega$, $n\in I^+$.

在系统(1)~(3)中,如果存在 q 维向量 $\alpha\in(\alpha_1,$

* 基金项目:国家自然科学基金(19871094)和广东省自然科学基金(990229)资助项目.
收稿日期:2000-07-28; 收修改稿日期:2001-06-11.

$\cdots,\alpha_q)^{\mathrm{T}} \in \Omega$,以及相应的由下式定义的周期性矩形波控制信号,$u(t) = u(t;\alpha)$:

$$u_i(t) = u_i(t;\alpha_i) = \begin{cases} \mathrm{sign}\alpha_i, nT \leqslant t < (n+|\alpha_i|)T, \\ 0, (n+|\alpha_i|)T \leqslant T < (n+1)T, \end{cases}$$
$$i = 1,2,\cdots,q, n \in I^+, \tag{4}$$

使得闭环系统(1)~(3)有一相应的周期轨道, $y(\cdot) = y(\cdot;\alpha): y(t+T;\alpha) = y(t;\alpha), t \geqslant 0$ 则称控制(4)为(关于扰动 $f \cdot 1(t)$)稳态控制,周期轨道 $y(\cdot)$ 称为相应于稳态控制 $u(\cdot)$ 的稳态,称稳态控制(4)的常值向量 $\alpha(\in \Omega)$ 为稳态导通率.

在抛物型 PWM 系统(1)~(3)中,如果存在 $\alpha \in \Omega$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$,则称该系统关于扰动 $f(t)$ 是稳定稳态的,其中

$$\alpha_n = (\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_q}),\ \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_q).$$

同时文[1]中,在如下假设下讨论了稳态的存在性及稳态的稳定性

$$\mathrm{i}\omega_n \in \rho(A), \omega_n = \frac{2n\pi}{T}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{5}$$

$$\mathrm{i}\omega_n \in \rho(J), \omega_n = \frac{2n\pi}{T}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{6}$$

其中 $\mathrm{i}^2 = -1$.

本文作者认为文[1]中, A 生成紧解析半群的假设及假设(5)太强,可以在更弱的条件下得到文[1]中类似的结果,我们可以将这两个假设改为:

1) A 在 X 上生成一 C_0 半群 $S(t), t \geqslant 0$,且存在常数 $M, \omega > 0$, 使得

$$\| S(t) \| \leqslant M\mathrm{e}^{-\omega t}, t \geqslant 0.$$

现在 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上引入一等价范数

$$\| x \|_0 = \sup_{s\geqslant 0} \| \mathrm{e}^{\omega s} S(s)x \|, \tag{7}$$

则

$$\| S(t)x \|_0 = \sup_{s\geqslant 0} \| \mathrm{e}^{-\omega t}\mathrm{e}^{\omega(t+s)} S(t+s)x \| \leqslant \sup_{s\geqslant 0} \| \mathrm{e}^{-\omega t}\mathrm{e}^{\omega s}S(s)x \| \leqslant \mathrm{e}^{-\omega t} \| x \|_0.$$

显然 $\| x \| \leqslant \| x \|_0, \| x \|_0 \leqslant M \| x \|$.

假设 $\| B \|$ 表示从 $\mathbb{R}^q$ 到 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|_0)$ 的有界线性算子 B 的范数, $\| C \|$ 表示从 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|_0)$ 到 $\mathbb{R}^p$ 的有界线性算子 C 的范数. $\| u \|$ 表示 u 在空间 $\mathbb{R}^q$ 中的范数.

2) $f(t)$ 为一个以 T 为周期的阶跃扰动. (8)

其余条件不变.

引理 1　假设系统(1)中的控制信号 $u(t)$ 是周期为 T 的由式(4)定义的矩形波信号 $u(t;\alpha), \alpha \in \Omega$,同时假设(7),(8)成立,则系统(1)存在唯一的相应于控制 $u(t;\alpha)$ 的周期解 $y(t;\alpha)$,其周期为 T.

证　式(1)的 mild 解为

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^T S(t-s)(Bu(s) + f(s))\mathrm{d}s.$$

我们定义映射

$$S_1(t): y_0(\in X) \to y(t)(\in X),\ t \geqslant 0.$$

易验证

$$S_1(nT) = S_1(T)^n, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

即 $\{S_1(nT) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为离散半动力系统.

又易知 $\bar{V} y_1, y_2 \in X$ 有

$$\| S_1(t)y_1 - S_1(t)y_2 \|_0 = \| S(t)y_1 - S(t)y_2 \|_0 \leqslant \mathrm{e}^{-\omega t} \| y_1 - y_2 \|_0,\ t \geqslant 0. \tag{10}$$

从而知 $S_1(T)$ 在 $(X, \|\cdot\|_0)$ 上的压缩映射,由 Banach不动点定理, $S_1(T)$ 在 $(X, \|\cdot\|_0)$ 中存在唯一的不动点 $y^*: S_1(T)y^* = y^*$.

由式(10)知 $y^*(t) = y(t;y^*)$ 为系统(1)的以 T 为周期的唯一周期解,且该周期解是全局指数稳定的.

引理 2　设 $\alpha \in \Omega, u(t;\alpha)$ 是由式(4)定义的矩形波控制,如果假设(6),(7),(8)成立,则下面的开环控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y(t;\alpha)}{\mathrm{d}y} = Ay(t;\alpha) + Bu(t;\alpha) + f(t), \\ z(t;\alpha) = Cy(t;\alpha), \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t;\alpha)}{\mathrm{d}t} = Jv(t;\alpha) + Kz(t;\alpha). \end{cases} \tag{11}$$

具有唯一以 T 为周期的周期解 $v(t;\alpha)$.

证　在假设(6)下有, $\mathrm{e}^{i\omega_n T} = \mathrm{e}^{i2n\pi} = 1$,即 $1 \in \rho(\mathrm{e}^{JT})$,从而可将 $(I - \mathrm{e}^{JT})^{-1}$ 看成 $\mathbb{R}^q$ 上的有界线性算子.

$$v(t;\alpha) = \mathrm{e}^{Jt}v_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{J(t-s)}Kz(s;\alpha)\mathrm{d}s. \tag{12}$$

其中 $v_0 = v(0;\alpha)$.

即要使系统(11)存在以 T 为周期的周期解 $v(t;\alpha)$,则有应用 $v(T;\alpha) = v_0$, 即

$$(I - \mathrm{e}^{JT})v_0 = \int_0^T \mathrm{e}^{J(T-s)}Kz(s;\alpha)\mathrm{d}s,$$

$$v_0 = (I - \mathrm{e}^{JT})^{-1}\int_0^T \mathrm{e}^{(J(T-s)}Kz(s;\alpha)\mathrm{d}s.$$

由引理 1 知

$$z(t+T;\alpha)=z(t;\alpha),\ t\geqslant 0.$$

从而易知系统(11)的相应于初始值 v_0 的解 $v(t;\alpha)$ 必定是以 T 为周期的唯一周期解。

为了讨论系统(1)的稳态的存在性,考虑由下式定义的从 $\Omega\in\mathbb{R}^q$ 到$\mathbb{R}^q$ 的映射 $G(\cdot)$:

$$G(\alpha)=(I-\mathrm{e}^{JT})^{-1}\int_0^T\mathrm{e}^{J(T-t)}KCy(t;\alpha)\mathrm{d}t,\ \alpha\in\Omega.$$

其中 $y(t;\alpha)$ 是系统(1) 相应于 $\alpha\in\Omega$ 的开环周期解,此时有下面的引理。

引理 3 在假设(6),(7),(8)下,则存在常数 $M_1>0$ 使得

$$\|G(\alpha)-G(\bar\alpha)\|\leqslant M_1\|K\|\ \|\alpha-\bar\alpha\|,\alpha,\bar\alpha\in\Omega.$$

证 设 $y_1(t),y_2(t)$ 分别是系统(1) 相应于 α, $\bar\alpha(\in\Omega)$ 的以 T 为周期的周期解,其初始值分别为 y_1,y_2, 则有

$$\|y_1-y_2\|_0\leqslant \frac{\|B\|p}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}\int_0^{\mathrm{T}}\|u(s;\alpha)-u(s;\bar\alpha)\|\mathrm{d}s,$$

$$\|G(\alpha)-G(\bar\alpha)\|\leqslant M_0T\mathrm{e}^{\lambda T}\|C\|\ \|(I-\mathrm{e}^{JT})^{-1}\|\ \|K\|\ \|y_1-y_2\|_0+M_0Te^{\lambda T}\|C\|\ \|B\|\ \|I-(\mathrm{e}^{JT})^{-1}\|\ \|K\|\int_0^T\|u(s;\alpha)-u(s;\bar\alpha)\|\mathrm{d}s\leqslant M_2\|K\|\int_0^{\mathrm{T}}\|u(s;\alpha)-(s;\bar\alpha)\|\mathrm{d}s.$$

其中

$$M_2=M_0T\mathrm{e}^{\lambda t}\|C\|\ \|B\|\ \|(I-\mathrm{e}^{JT})^{-1}\|(1+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}),$$

$$\|\mathrm{e}^{JT}\|\leqslant M_0\mathrm{e}^{\lambda t},\ M_0,\lambda>0,\ t\geqslant 0.$$

当 $\alpha_l\bar\alpha_l>0$ 时,不失一般性设 $0<\alpha_l<\bar\alpha_l$, 则有

$$M_2\|K\|\int_0^T|u_1(s;\alpha_1)-u_1(s;\bar\alpha_1)|\mathrm{d}s\leqslant M_2\|K\|\int_{\alpha_l T}^{\bar\alpha_l T}\mathrm{d}s\leqslant M_2^T\|K\|\ |\alpha_1-\bar\alpha_1|.$$

当 $\alpha_l\bar\alpha_l<0$ 时,例如 $\bar\alpha_l<0<\alpha_l$, $|\bar\alpha_l|>\alpha_l$, 则有

$$M_2\|K\|\int_0^T|u_1(s;\alpha_1)-u_1(s;\bar\alpha_1)|\mathrm{d}s\leqslant M_2\|K\|\int_{\alpha_l T}^{|\bar\alpha_l|T}2\mathrm{d}s\leqslant 2TM_2\|K\|\ |\alpha_1-\bar\alpha_1|.$$

综上存在 M_1 使得

$$\|G(\alpha)-G(\bar\alpha)\|\leqslant M_1\|K\|\ \|\alpha-\bar\alpha\|.$$

引理得证.

由上述引理,立即可得下面定理:

定理 1 在假设(6),(7),(8)下,则 PWM 系统(1)~(3)存在唯一稳态,其稳态的导通率就是映射 $G(\cdot)$ 的不动点.

证 设 $y(t;\alpha)$ 是系统(1) 相应于 $\alpha\in\Omega$ 的开环周期解,则

$$y_0=S(T)y_0+\int_0^{\mathrm{T}}S(T-s)(Bu(s;\alpha)+f(s))\mathrm{d}s.$$

由假设(8)不妨设 $\|f(t)\|\leqslant f_0,t\geqslant 0$ 则

$$\|y_0\|_0\leqslant \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\omega(T-s)}(\|B\|q+f_0)\mathrm{d}s=\frac{q\|B\|+f_0}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}\cdot\frac{1}{\omega}(1-\mathrm{e}^{-\omega T})=M_3,$$

$$G(\alpha)=(1-\mathrm{e}^{JT})^{-1}\int_0^T\mathrm{e}^{J(T-t)}KCS(t)y_0\mathrm{d}t+(1-\mathrm{e}^{JT})^{-1}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{J(T-t)}KC\mathrm{d}t\cdot\int_0^tS(t-s)(Bu(s;\alpha)+f(s))\mathrm{d}s,$$

$$\|G(\alpha)\|\leqslant M_4\|K\|.$$

其中

$$M_4=M_0T\mathrm{e}^{\lambda T}\|C\|\ \|(I-e^{JT})^{-1}\|(M_3+T\|B\|q+Tf_0).$$

易知当 $0<\|K\|<\dfrac{1}{\max(M_1,M_4)}$ 时, $G(\cdot)$ 是$\mathbb{R}^q$ 中闭凸集 Ω 到自身的压缩映射. 从而 $G(\cdot)$ 在 Ω 中存在唯一的不动点α^*: $G(\alpha^*)=\alpha^*$,则由 α^* 所对应的系统(1)的周期解就是一个唯一的稳态.

证毕.

PWM 系统(1)~(3)的稳态稳定性与文[1]中结论相同(没有使用条件: A 生成紧解析半群集及条件假设(5)).

下面来考虑半线性控制系统的稳态的存在性.

考虑如下半线性抛物型方程描述的系统.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=Ay(t)+F(y(t))+Bu(t)+f(t),\\ z(t)=Cy(t).\end{cases}\tag{13}$$

其中 $F(\cdot)$ 满足 $\|F(y_1)-F(y_2)\|_0\leqslant a\|y_1-y_2\|_0,\bar{V}y_1,y_2\in X$. 常数 a 满足 $0<a<\omega$ 且

$$1-\frac{Ta\mathrm{e}^{aT}}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}>0,\tag{14}$$

其余条件同前.

我们称系统(13),(2),(3)为抛物型 NPWM 系统.

引理 4　假设系统(13)中控制信号 $u(t)$ 是周期为 T 的由式(4)定义的矩形波信号 $u(t;\alpha)\in\Omega$. 同时假设(7),(8)成立,则系统(13)存在唯一的相应于该控制 $u(t;\alpha)$ 的周期解 $y(t;\alpha)$.

证　设 $y_1(t),y_2(t)$ 分别是系统(13)的两个解,其初始值分别为 $y_1=y_1(0),y_2=y_2(0)$,则

$$y_1(t)-y_2(t)=S(t)(y_1-y_2)+\int_0^t S(t-s)[F(y_1(s))-F(y_2(s))]\mathrm{d}s,$$

$$\|y_1(t)-y_2(t)\|_0\leqslant \mathrm{e}^{-\omega t}\|y_1-y_2\|_0+a\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|y_1(s)-y_2(s)\|_0\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 不等式有

$$\|y_1(t)-y_2(t)\|_0\leqslant \mathrm{e}^{(a-\omega)t}\|y_1-y_2\|_0. \tag{15}$$

我们定义映射 $S_2(t):y_0(\in X)\to y(t)(\in X)$,则易知有

$$\|S_2(T)y_1-S_2(T)y_2\|_0\leqslant \mathrm{e}^{(a-\omega)T}\|y_1-y_2\|_0.$$

由 $a-\omega<0$ 知 $S_2(T)$ 为 X 上的压缩映射,从而 $S_2(T)$ 在 X 上存在唯一的不动点 y^{**}:

$$S_2(T)y^{**}=y^{**}. \tag{16}$$

易验证

$$S_2(nT)=S_2(T)^n,n\in\mathbb{N}. \tag{17}$$

即 $\{S_2(nT)\mid n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 上的离散半动力系统.

由式(15),(16),(17)知,$y(t)=y(t;y^{**})$ 是系统(13)的唯一全局指数稳定的以 T 为周期的周期解.　证毕.

引理 5　设 $\alpha\in\Omega,u(t;\alpha)$ 是由(4)式定义的矩形波控制,如果假设(6),(7),(8)成立,则下面的开环控制系统。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y(t;\alpha)}{\mathrm{d}t}=Ay(t;\alpha)+Bu(t;\alpha)+f(t),\\ z(t;\alpha)=Cy(t;\alpha),\\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=Jv(t)+Kz(t;\alpha).\end{cases}$$

具有唯一以 T 为周期的周期解 $v(t;\alpha)$.

证明参见引理 2.

为了讨论系统(13)的稳态的存在性,考虑由式(10)定义的从 $\Omega(\subset\mathbb{R}^q)$ 到 $\mathbb{R}^q$ 的映射 $G(\cdot)$.

引理 6　在假设(6),(7),(8)下存在常数 M_5 使得

$$\|G(\alpha)-G(\bar{\alpha})\|\leqslant M_5\|K\|\ \|\alpha-\bar{\alpha}\|.$$

证　设 $y_1(t),y_2(t)$ 分别是系统(13)的相应于 $\alpha,\bar{\alpha}\in\Omega$ 的以 T 为周期的开环周期解,初始值分别为 $y_1=y_1(0),y_2=y_2(0)$.

$$y_1-y_2=S(T)(y_1-y_2)+\int_0^T S(T-s)(F(y_1(s)-F(y_2(s))\mathrm{d}s+\int_0^T S(T-s)B(u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha}))\mathrm{d}s,$$

$$\|y_1-y_2\|_0\leqslant \frac{a}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}\int_0^T\|y_1(s)-y_2(s)\|_0\mathrm{d}s+\frac{\|B\|}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}\int_0^T\|u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha})\|\mathrm{d}s.$$

若 $0\leqslant t\leqslant T$,则

$$\|y_1(t)-y_2(t)\|_0\leqslant \|y_1-y_2\|_0+a\int_0^t\|y_1(s)-y_2(s)\|_0\mathrm{d}s+\|B\|\int_0^t\|u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha})\|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{a}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}\int_0^T\|y_1(s)-y_s(s)\|_0\mathrm{d}s+\left(\frac{\|B\|}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}+\|B\|\right)\int_0^T\|u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha})\|\mathrm{d}s+a\int_0^t\|y_1(s)-y_2(s)\|_0\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 的不等式有

$$\|y_1(t)-y_2(t)\|_0\leqslant \frac{a}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}\mathrm{e}^{at}\int_0^T\|y_1(s)-y_2(s)\|_0\mathrm{d}s+\left(\frac{\|B\|}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}+\|B\|\right)\mathrm{e}^{at}\int_0^T\|u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha})\|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{a}{1-\mathrm{e}^{-\omega t}}\mathrm{e}^{aT}\int_0^T\|y_1(s)-y_2(s)\|_0\mathrm{d}s+\left(\frac{\|B\|}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}+\|B\|\right)\mathrm{e}^{aT}\int_0^T\|u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha})\|\mathrm{d}s.$$

两边关于 t 从 0 到 T 积分有

$$\int_0^T\|y_1(t)-y_2(t)\|_0\mathrm{d}t\leqslant \frac{M_7}{M_6}\int_0^T\|u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha})\|\mathrm{d}s.$$

其中 $M_6=1-\dfrac{Ta^2\mathrm{e}^{aT}}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}$,由式(14)知 $M_6>0$,

$$M_7=\left(\frac{T\|B\|}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}+T\|B\|\right)\mathrm{e}^{aT},$$

$$\|G(\alpha)-G(\bar{\alpha})\|\leqslant \left(\frac{aM_8}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}}+aM_8\right)\|K\|\int_0^T\|y_1(s)-$$

$$y_2(s)\|_0 \mathrm{d}s + \left(\frac{M_8\|B\|}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}} + \|B\|M_8\right)\|K\|\int_0^T \|u(s;\alpha)-u(s;\bar{\alpha})\|\mathrm{d}s.$$

令

$$M_9 = \left(\frac{aM_8}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}} + aM_8\right)\frac{M_7}{M_6} + \frac{M_8\|B\|}{1-\mathrm{e}^{-\omega T}} + \|B\|M_8,$$

$$M_8 = M_0 T\mathrm{e}^{\lambda T}\|C\|\,\|(I-\mathrm{e}^{JT})-1\|,$$

则 $\|G(\alpha)-G(\bar{\alpha})\| \leqslant M_5\|K\|\,\|\alpha-\bar{\alpha}\|$,其中 $M_5 = 2M_9$. 引理得证.

由上述引理,我们立即得下面定理.

定理 2 在假设(6),(7),(8)及 $M_6 > 0$ 下,当 $\|K\|$ 适当小时,系统(13),(2),(3)存在唯一的稳态.

证 由引理6的证明过程知,存在常数 M_{10} 使得 $\|G(\alpha)\| \leqslant M_{10}\|K\|$. 则当 $0 < \|K\| < \dfrac{1}{\max(M_5, M_{10})}$ 时,$G(\cdot)$ 为从$\mathbb{R}^q$ 中的闭凸集 Ω 到自身的压缩映射,从而存在唯一的不动点 α^{**}: $G(\alpha^{**}) = \alpha^{**}$,由 α^{**} 所对应的系统(13)的周期解就是唯一的稳态,且稳态的导通率为 α^{**}.

例 1 考虑下面半线性抛物型控制系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = Ay(t) + \beta\sin y(t) + Bu(t) + f(t),\\ z(t) = Cy(t).\end{cases} \tag{18}$$

其中 $A = \Delta$,常数 $\beta > -\lambda_1$,Ω 为$\mathbb{R}^n(n \in \mathbb{N})$ 中边界充分光滑的有界区域,$y|_{\partial\Omega} = 0$,$X = L^2(\Omega)$,$fF(t+T) = f(t)$,$\bar{V}t \geqslant 0$.

易验证系统(18),(2),(3)满足定理2,从而该NPWM系统存在一个唯一的稳态.

参考文献(References)

[1] Zhou H X, Wang L W. The Theory of Linear Semigroup and Application [M]. Shandong: Shandong Science and Technology Press, 1994

[2] Zhou H X, Xu Q L. Digital simulations on a class of pulse-width sampling control systems [A]. Proc. of the International Conference Modeling and Simulation [C]. Beijing: The High Education Press, 1989,585 - 590

[3] Zhou H X, Xu Q L. A PWM temperature control system with a distributed parameter [J]. Modeling, Simulation and Control, B, 1991,38(2):53 - 64

[4] Zhou H X, Xu Q L. An interactive system for the design of a class temperature control system [A]. Proc. of the International 90 Chengdu Conference Signals and Systems [C]. AMSE press, 1991,13,176 - 186

[5] Zhao Yi, Li Quanguo. The reduction conditions of the global attractor for a class of nonlinear second order systems and the stabilizability [J]. J. Sys. Sci. & Math. Scis.,1999,42(5):809 - 814

[6] Teman R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York: Springer-Verlag, 1988

本文作者简介

李全国 1967年生.2002年毕业于中山大学数学系获博士学位,现从事动力系统与控制系统的研究. Email:lqgp@21cn.com

赵 怡 1940年生.教授.1963年毕业于中山大学数学系,并留系任教至今.主要研究领域为无穷维动力系统与分布参数控制系统理论.