文章编号：1000－8152(2002)04－04－0591

跟踪系统的满意控制研究*

钱龙军[1]，佘　炎[2]，郭　治[1]
（1. 南京理工大学 自动化系，南京 210094；2. 上海交通大学 信息与控制系，上海 200030）

摘要：动态误差系数是工程技术人员所熟悉的概念，它是描述输出对输入信号跟踪精度的重要指标．本文首次把该指标约束融入含有跟踪误差稳态协方差和稳定裕度约束的满意控制中来．

关键词：稳态误差系数；LMI 方法；满意控制

中图分类号：TP13　　　**文献标识码**：A

On satisfactory control for tracking systems

QIAN Long-jun[1]，SHE Yan[2]，GUO Zhi[1]
（1. Department of Automation，Nanjing University of Science and Technology，Nanjing 210094，China；
2. Department of Information & Control Engineering，Shanghai Jiaotong University，Shanghai 200030，China）

Abstract：Dynamic error coefficient is a well known concept for technicians，which is the important perfermance specification measuring the precision for the system output to track input signal．For the first time，this perfermance spcecification is adopted as a constraint for satisfactory tracking control，together with constraints on covariance of tracking error and stability margin．

Key words：dynamic error coefficient；LMI method；satisfactory control

1　引言(Introduction)

动态误差系数和稳态协方差，是随机线性系统控制精度的一种度量，所以是衡量跟踪系统性能的重要指标．在系统稳定的前提下，如何设计控制器使动态误差系数和跟踪误差稳态协方差小于某一容许值是跟踪控制系统设计的重要课题．除了这两个精确指标以外，闭环跟踪系统还应满足一定的稳定裕度指标要求．由于这些性能指标之间存在某种竞争关系，在工程实践中，不必刻求指标的最优化．所设计的控制器只要使系统的这些性能指标满足需要即可，这样的控制器称为满意控制器．这一方面为系统设计满足其他的性能指标留有自由度，另一方面在理论上保证了满意控制器的存在性[1]．

已经有许多文献[2~6]研究了含有极点配置、H_∞指标、协方差约束的控制问题．本文首次把动态误差系数指标这一控制准确度指标融入这类控制问题中来．动态误差系数是工程技术人员所熟悉的概念，它具有非常明确的物理意义．作者希望利用现代控制理论的概念和方法，使这类古典控制问题的研究进一步深入，又不过多地依赖经验和直观，所以强调满意控制律的算法应该可用计算机完成．文中给出一个基于 LMI 方法的算法，最后给出一个数值说明算法的有效性．

2　问题叙述和主要结果(Problem statement and main result)

考虑单输入单输出的随机线性控制系统 Σ

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Br(t) + D\omega(t),\\ y(t) = Cx(t).\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$，$u(t) \in \mathbb{R}$ 为控制信号，$r(t) \in \mathbb{R}$ 为输入信号，$y(t) \in \mathbb{R}$ 为输出信号，$\omega(t) \in \mathbb{R}$ 为零均值，强度为 $W = W^{\mathrm{T}} > 0$ 的白噪声，A, B, C, D 为适维的常数矩阵．

系统 Σ 在控制器 $u(t) = Kx(t)$ 的作用下，带有单位负反馈的闭环跟踪控制系统可以描述如下：

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = (A_c - BC)x(t) + Br(t) + D\omega(t),\\ e(t) = r(t) - Cx(t).\end{cases} \tag{2}$$

其中 $e(t)$ 为输出对输入信号的跟踪误差，$A_c = A +$

* 基金项目：国家自然科学基金(60174028)资助项目．
收稿日期：2000－03－23；收修改稿日期：2001－02－09．

$BK, K = (k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}) \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

那么输入 $r(t)$ 到跟踪误差 $e(t)$ 的传递函数为

$$\Phi_e(s) = 1 - C(sI - A_c + BC)^{-1}B. \tag{3}$$

由于实际输入信号往往可以分解为白噪声和由阶跃、斜坡、加速度函数的线性组合所构成的确定函数两部分,所以它们对跟精度的影响分别可由动态误差系数的前三项 c_0, c_1, c_2 和跟踪误差 $e(t)$ 的稳态协方差 X_e 的大小来描述.在工程实际中,通常还要求跟踪闭环系统是无静差的,即 $c_0 = 0$.如果在系统设计过程中 c_1 或 c_2 也被配置到零值,这意味着在开环系统中将出现两个以上的积分环节,出现这种情况一般会对跟踪系统的暂态性能产生不利的影响.所以跟踪系统的极点分布必须使跟踪闭环系统(2)满足一定的稳定裕度指标.具有这些期望性能指标的跟踪控制系统设计问题可以归结为如下满意控制问题.

问题 1 寻找控制增益矩阵 K,使得在 $u = Kx$ 作用下的闭环跟踪系统(2)

1) 对于给定的 $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$,动态误差系数满足 $c_0 = 0, |c_1| < \theta_1, |c_2| < \theta_2$;

2) 对于给定的 $\sigma > 0$,跟踪误差 $e(t) = r(t) - cx(t)$ 的稳态协方差满足 $X_e < \sigma^2$;

3) 对于给定的 $\gamma > 0$,矩阵 $A_c - BC$ 的特征根 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda) < -\gamma$.

由于在非奇异线性变换作用下,系统 Σ 的输入和输出信号不变,所以不妨假设系统满足

假设 1 系统(1)完全能控,且 (A, B) 具有能控标准型.系统(2)的相关矩阵有如下形式

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$B = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}},\ C = (b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}).$$

其中 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$,并且 $b_0 > 0$.

注 因为满意控制问题要求开环系统中有一个积分环节,所以必须有 $b_0 > 0$ 才能保证跟踪闭环系统(2)的稳定性.

下面将问题 1 中的三个期望性能指标转化为矩阵不等式约束.

当 $c_0 = 0$,经计算其余两个动态误差系数 c_1 和 c_2 可表示为

$$\begin{cases} c_1 = a_1/b_0, \\ c_2 = (-a_1^2 - a_1 b_1 + b_0 a_2)/b_0^2. \end{cases} \tag{4}$$

由式(4)可以证明问题 1 中的第一个指标等价于对矩阵 $A_c = A + BK$ 的不等式约束,即

$$\begin{cases} e_n^{\mathrm{T}}(A + BK)e_1 = 0, \\ -b_0\theta_1 < e_n^{\mathrm{T}}(A + BK)e_2 < b_0\theta_1, \\ \theta_3 < e_n^{\mathrm{T}}(A + BK)e_3 < \theta_4. \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\theta_3 = \begin{cases} -b_0\theta_2 + b_0\theta_1^2 - \theta_1 |b_1|, & b_0\theta_1 < \frac{1}{2}|b_1|, \\ -b_0\theta_2 - \dfrac{b_1^2}{4b_0}, & b_0\theta_1 \geqslant \frac{1}{2}|b_1|, \end{cases}$$

$$\theta_4 = b_0\theta_2 + b_0\theta_1^2 + \theta_1 |b_1|.$$

由于 $\omega(t)$ 是零均值,强度为 W 的白噪声,$r(t)$ 是确定性输入信号,所以根据文[3]中的结论,系统(2)的稳态状态协方差矩阵定义为

$$X_0 = \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{x(t)x^{\mathrm{T}}(t)\} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ X_0 = X_0^{\mathrm{T}} > 0,$$

且满足 Riccati 方程

$$(A_c - BC)X_0 + X_0(A_c - BC)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} = 0. \tag{6}$$

所以跟踪误差 $e(t)$ 的稳态协方差满足

$$X_e = \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{e(t)e^{\mathrm{T}}(t)\} = \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{Cx(t)x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}\} = CX_0C^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

满意控制问题 1 的第二个指标要求跟踪误差 $e(t) = r(t) - Cx(t)$ 的稳态协方差 $X_e < \sigma^2$.为此讨论如下 Riccati 不等式

$$(A_c - BC)X + X(A_c - BC)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} < 0 \tag{8}$$

的对称正定解 X.根据文献[7]的有关结果如果不等式(8)存在对称正定解 X,则方程(6)存在唯一的对称正定解 X_0 而且满足 $X_0 < X$.所以只要 $CXC^{\mathrm{T}} < \sigma^2$ 成立,则问题 1 中的第二个跟踪精确度性能指标就可满足.

对于给定的 $\gamma > 0$,满意控制问题 1 的第三个指标要求闭环系统(2)具有稳定裕度 γ.根据文[7],这等价于要求矩阵不等式

$$(A_c - BC + \gamma I)Y + Y(A_c - BC + \gamma I)^{\mathrm{T}} < 0 \tag{9}$$

存在对称正定矩阵解 $Y > 0$,其中 $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为单位矩阵.

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 n 维欧氏空间的标准正交基底,满足 $[e_1\, e_2 \cdots e_n] = I$.综合以上分析可以得到结论.

定理 1 问题 1 存在满意解的充分条件是存在向量 K,和对称正定矩阵 X, Y 满足约束条件(5),(8)和(9).

在上述不等式中,未知矩阵是以 K,X,KX,KY 的形式出现的.为了能够应用成熟有效的 LMI 方法求解,必须把这些矩阵不等式转化为线性矩阵不等式.由于要配置动态误差系数,变量 K 必须作为一个独立的未知变量处理,文献中常用的通过变量替把非线性不等式 LMI 化的处理方法[7,8],在本文中已不适用.注意到 KK^{T} 是一个标量,对其进行估计和搜索在算法中是可行的,在理论上又不会带来保守性.从而可以利用现有 Matlab 中的 LMI 工具箱搜索求解.下面将定理 1 转换为满意解能用 LMI 方法解算的形式.

定理 2 如果存在正数 $\varepsilon>0,\kappa>0$,对称正定矩阵 X,Y 和向量 K 满足 $\kappa<KK^{\mathrm{T}}$ 及线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} \varepsilon I & K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon X \\ BK+\varepsilon K & \frac{\kappa}{\varepsilon}BB^{\mathrm{T}}-(A-BC)X-X(A-BC)^{\mathrm{T}}-DWD^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}>0, \quad CXC^{\mathrm{T}}<\sigma^2 \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon I & K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon Y \\ BK+\varepsilon Y & \frac{\kappa}{\varepsilon}BB^{\mathrm{T}}-(A-BC+\gamma I)Y-Y(A-BC+\gamma I)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}>0, \tag{11}$$

$$\begin{cases} e_n^{\mathrm{T}}(A+BK)e_1=0, \\ -b_0\theta_1<e_n^{\mathrm{T}}(A+BK)e_2<b_0\theta_1, \\ \theta_3<e_n^{\mathrm{T}}(A+BK)e_3<\theta_4, \end{cases} \tag{12}$$

则定理 1 的条件成立,问题 1 求解是可行的.

证 证明只涉及不等式约束(8)和(9),以第一组 LMI(10)为例进行讨论.

由于存在正数 $\varepsilon>0,\kappa>0$ 和 $X>0$ 满足

$$\begin{pmatrix} \varepsilon I & K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon X \\ BK+\varepsilon K & \frac{\kappa}{\varepsilon}BB^{\mathrm{T}}-(A-BC)X-X(A-BC)^{\mathrm{T}}-DWD^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}>0,$$

$$\kappa<KK^{\mathrm{T}},\ CXC^{\mathrm{T}}<\sigma^2,$$

则利用矩阵 Schur 补性质,可见上式等价于

$$(BK+\varepsilon X)(\varepsilon^{-1}I)(K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon X)<$$
$$\varepsilon^{-1}\kappa BB^{\mathrm{T}}-(A-BC)X-X(A-BC)^{\mathrm{T}}-DWD^{\mathrm{T}},$$
$$\kappa<KK^{\mathrm{T}},\ CXC^{\mathrm{T}}<\sigma^2,$$

所以

$$(BK+\varepsilon K)(\varepsilon^{-1}I)(K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon X)<$$
$$\varepsilon^{-1}BKK^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-(A-BC)X-X(A-BC)^{\mathrm{T}}-DWD^{\mathrm{T}},$$
$$CXC^{\mathrm{T}}<\sigma^2.$$

整理后可见上式等价于

$$(A-BC)X+X(A-BC)^{\mathrm{T}}+BKX+$$
$$XK^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}+\varepsilon XX<0,$$
$$CXC^{\mathrm{T}}<\sigma^2,$$

从而下列不等式成立

$$(A_c-BC)X+X(A_c-BC)^{\mathrm{T}}DWD^{\mathrm{T}}<0,\ CXC^{\mathrm{T}}<\sigma^2.$$

证毕.

算法 问题 1 的满意解可依以下步骤搜索

步骤 1 给出充分小的 $\varepsilon>0$ 和 $\kappa>0$ 做为初始值;

步骤 2 利用 LMI 软件求解 LMIs(10),(11)和(12)成功;否则减小 ε 的值,以 κ 的初始值重新解算,直至 ε 接近 LMI 软件精度值,满意解解算失败,转步骤 4;

步骤 3 如果 $\kappa<KK^{\mathrm{T}}$,解算成功,转步骤 4;否则增加 κ,转步骤 2;

步骤 4 搜索结束.

3 例子(Example)

考虑一个数值例子,在系统(1)中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12.627 & -18.299 & -12.912 & -4.6715 \end{pmatrix},$$

$$B=D=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}},\ W=0.9,$$
$$C=(1.0346\ \ 6.4324\ \ -5.5136\ \ -2.1229).$$

期望性能指标要求,跟踪误差协方差 $\sigma^2<0.5$;动态误差系数 $c_0=0,c_1<0.1$;稳定裕度 $\gamma=0.2$.

采用 Matlab 软件中 LMI 工具箱,通过算法搜索参数 ε,κ.取 $\varepsilon=0.0001,\kappa=331$ 时,满意控制增益 K 可以取为 $K=(12.627\ \ 18.1957\ \ 0.0048\ \ -0.0213)$.

在控制器 $u=Kx$ 的作用下,跟踪闭环系统(2)跟踪误差协方差满足 $\sigma^2<0.3752$;动态误差系数满足 $c_0=0,c_1<0.09985$;极点集合为 $\Lambda=(-0.7237\pm2.2494\mathrm{j}\ \ -0.9214\ \ -0.2011)$.而未控的该单位负反馈跟踪系统是不稳定的,其极点集合为 $\Lambda=(0.35194\pm2.8019\mathrm{j}\ \ -2.5914\ \ -0.66109)$.

4 结论(Conclusion)

当我们设计一个满足多个性能指标的满意控制系统时,必须考虑这些指标的竞争关系.不能对单个指标提过高的要求,而应根据实际需要提出使各个指标都满意的指标集.从文中的例子可以看出由于跟踪精度要求系统是无静差的,跟踪闭环系统(2)的

极点实部不可能均小于 - 1.0085.在一般情况下指标集中的各个给定的性能指标可以相应转换为等价的矩阵方程或不等式约束.当这些矩阵方程或不等式是非线性的时候,如何有效地解算还需进一步研究.

参考文献(References)

[1] Guo Zhi. A survey of satisfying control and estimation [A]. Proceedings of the 14th IFAC World Congress [C]. Beijing, China, 1999,443 - 447

[2] Hotz A, Skelton R E. Covariance control theory [J]. Int. J. Control, 1987,46(1):13 - 32

[3] Skelton R E, Iwasaki T. Lyapunov and covariance controllers [J]. Int. J. Control, 1993,57(3):519 - 536

[4] Zhu J, Guo Zhi. Robust constrained variance control for a class of uncertain stochastic systems [J]. Control Theory and Applications, 1996,13(2):230 - 234

[5] Wang Z, Tang G, Chen X. Robust controller design for uncertain linear systems with circular pole constraints [J]. Int. J. Control, 1996,65(6):1045 - 1054

[6] Wang Z, Chen X, Guo Zhi. Control design for continuous systems with variance and circular pole constraints [J]. Int. J. Systems Science, 1995,26(5):1249 - 1256

[7] Chilali M, Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1996,41(3): 358 - 367

[8] Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed H_2/H_∞ control; a convex optimation approach [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1991,36 (7):824 - 837

[9] Boyd S L, Ghaoui E, Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory [M]. SIAM books, 1994

本文作者简介

钱龙军 1964年生.1998年于东北大学信息学院获工学博士学位,随后进入南京理工大学控制与工程博士后流动站工作,现任南京理工大学自动化系副教授.目前感兴趣的研究领域是满意控制与估计.

佘 炎 1968年生.1995年于武汉大学数学系获理学博士学位,并进入东北大学自动控制博士后流动站进行博士后研究工作.现任上海交通大学信息与控制系副教授.目前感兴趣的研究领域是非线性控制.

郭 治 1937年生.1961年毕业于哈尔滨军事工程学院.现为国务院学位委员会学科评议组成员,南京理工大学自动化系教授,博士生导师.目前主要研究领域为随机控制的建模以及期望性能指标集下的满意控制的工程实现.

(上接第590页)

[7] Tesi A, Vicino A. Robust absolute stability of Lurie control system in parameter space [J]. Automatica, 1991,27(1):147 - 151

[8] Nian Xiaohong. Robust stability for Lurie control systems with several stationary components [J]. Acta Automatica Sinica, 1998,24(4): 562 - 565

[9] Nian Xiaohong. Robust stability for Lurie control systems with several independent stationary components [J]. Control Theory and Applications, 1998,16(1):43 - 46

[10] Yang Bin, Pan Dehui. On the robust absolute stability of Lurie control systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1998,24(6):816 - 819

[11] Gan Zuoxin, Ge Weigao, Zhao Suxia, et al. Robust absolute stability of generel Lurie type nonlinear control systems [J]. Mathematics Application, 1999,12(1):121 - 124

[12] Park P, Kim S W. A revisited Tsypkin criterion for discrete-time nonlinear Lur's systems with monotonic sector-restrictions [J]. Automatica, 1998,34(11):1417 - 1420

[13] Soc C B. Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices [J]. Int. J. Control, 1990,51(2):243 - 248

[14] Sun Jitao. Stability and decay rate of interval time-varying dynamical system with multidelay [J]. Chinese J. of Automation, 1996,8 (3):243 - 247

本文作者简介

孙继涛 见本刊2002年第1期第108页.

张银萍 见本刊2002年第1期第108页.