文章编号: 1000 - 8152(2002)04 - 04 - 0595

输入多采样率数字控制系统的同时极点配置*

肖 建, 唐 磊
(西南交通大学 电气工程学院, 成都 610031)

摘要: 在利用提升(lifting)技术所构造出来的多采样率数字控制系统的线性时不变状态空间模型的基础上,讨论 l 个被控对象通过输入多采样率数字控制系统的同时极点配置问题.分别引入了解决这一问题的状态空间方法和多项式矩阵插值方法.通过适当的变换,将同时极点配置问题归结为一系列线性方程组的求解问题.指出,当系统的输入采样率满足一定条件时,可以利用输入多采样率的输出静态反馈控制系统,实现对 l 个被控对象的同时极点配置.

关键词: 多采样率数字控制系统; 同时极点配置; 鲁棒控制; 线性系统

中图分类号: TP273　　　**文献标识码:** A

Simultaneous pole assignment of input multirate digital control systems

XIAO Jian, TANG Lei
(School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: Based on the linear time-invariant state space model of multirate digital control systems constructed by lifting techniques, this paper discusses the problem of simultaneous pole assignment of l plants by multirate input sampling digital control systems. Both the state space method and the polynomial matrix interpolation method are introduced to solve the problem. Through suitable transformations, the solution of the simultaneous pole assignment problem is resort to the solution of a number of linear equations. It is pointed out, simultaneous pole assignment of l plants is generally solvable by a static output feedback mutirate digital controller, if the input sampling rates of the multirate digital control system satisfying certain conditions.

Key words: multirate digital control system; simultaneous pole assignment; robust control; linear systems

1 引言(Introduction)

同时极点配置问题讨论的是用一个固定的控制器,使得 l 个被控对象的闭环极点分别为预先指定的值.如果只要求这 l 个被控对象为闭环稳定,则相应的问题称为同时稳定问题.同时极点配置问题和同时稳定问题是文献[1,2]最先提出来的,近年来,这一问题得到了广泛的研究[3~7].另一方面,随着控制理论研究的不断深入,关于容许系统各处以不同的速率进行采样的多采样率数字控制系统的研究正在方兴未艾[7~9].

本文讨论采用输入多采样率的数字控制系统实现同时极点配置问题.分别讨论了状态空间方法和多项式矩阵插值方法.利用将输出反馈分解成 l 项之和的方法,使状态空间求解方法得到了简化.两种方法都将同时极点配置控制器的设计过程,最终归结为线性方程组的求解.

2 输入多采样率数字控制系统(Input multirate digital control system)

考虑图 1 所示的输入多采样率数字控制系统.

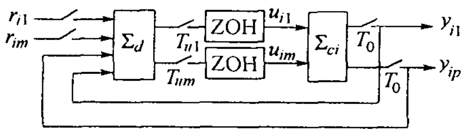

图 1　第 i 个被控对象对应的输入多采样率数字控制系统

Fig. 1　The input multirate digital control system corresponding to the ith plant

其中 Σ_{ci} 为第 i 个连续时间的被控对象; Σ_d 为离散时间的数字控制器; $r_i = [r_{i1} \quad r_{i2} \quad \cdots \quad r_{im}]^T$ 为系统参考输入; $y_i = [y_{i1} \quad y_{i2} \quad \cdots \quad y_{ip}]^T$ 为系统输出.假定各被控对象 Σ_{ci} 的第 j 个输入 u_{ij} 和第 j 个参考输入 r_{ij} 的采样周期均为 $T_{uj} = q_{uj}T, j = 1,\cdots,m$; 各被控对象所有输出通道的采样周期均为 $T_0 = qT$, 其中 q 为所有的 q_{uj} 的最小公倍数.定义

* 基金项目:国家自然科学基金(69774024)资助课题.
收稿日期:2000 - 06 - 12; 收修改稿日期:2001 - 03 - 09.

$n_{uj} = q/q_{uj}$,以及 $n_u = \sum_{j=1}^{m} n_{uj}$.

设第 i 个连续时间的线性时不变被控对象 Σ_{ci} 由以下状态方程描述:

$$\Sigma_{ci}: \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{ci}x_i(t) + B_{ci}u_i(t), \\ y_i(t) = C_{ci}x_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $i = 1,2,\cdots,l$, $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $y_i(t) \in \mathbb{R}^p$ 和 $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为第 i 个被控对象的状态变量,输出变量和输入变量.假定系统是完全能控和完全能观的,C_{ci} 为行满秩,且 T 满足

$$T \neq \frac{2k\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j)},\ k = 1,2,\cdots. \quad (2)$$

其中 λ_i 和 λ_j 表示 A_{ci} 的特征值集合中任意两个实部相等的特征值.输入多采样率控制系统同时极点配置问题为:选择固定的数字控制器 Σ_d,使得对 $i = 1,2,\cdots,l$,由连续时间的线性时不变被控对象 Σ_{ci} 和数字控制器 Σ_d 组成的如图1所示的输入多采样率闭环控制系统,分别具有指定的极点.

定义输入扩展向量和参考输入扩展向量

$$U_i(k) = \begin{bmatrix} u_{i1}(kT_0) \\ u_{i1}(kT_0 + T_{u1}) \\ \vdots \\ u_{i1}(kT_0 + (n_{u1} - 1)T_{u1}) \\ \vdots \\ u_{im}(kT_0) \\ \vdots \\ u_{im}(kT_0 + (n_{um} - 1)T_{um}) \end{bmatrix},$$

$$R_i(k) = \begin{bmatrix} r_{i1}(kT_0) \\ r_{i1}(kT_0 + T_{u1}) \\ \vdots \\ r_{i1}(kT_0 + (n_{u1} - 1)T_{u1}) \\ \vdots \\ r_{im}(kT_0) \\ \vdots \\ r_{im}(kT_0 + (n_{um} - 1)T_{um}) \end{bmatrix}.$$

可以得到关于第 i 个被控对象 Σ_{ci} 在输入多采样率下的状态空间描述:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_ix_i(k) + B_iU_i(k), \\ y_i(k) = C_ix_i(k), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $i = 1,2,\cdots,l$.若 Σ_{ci} 完全能控和完全能观测,且式(2)成立,则式(3)所示系统也是完全能控和完全能观测的.文[10]指出,设 $\{\mu_i^1,\cdots,\mu_i^m\}$ 是式(1)所示的第 i 个连续时间的线性时不变被控对象 Σ_{ci} 的一组局部能控性指标,且

$$n_{uj} \geqslant \mu_i^j,\ j = 1,2,\cdots,m, \quad (4)$$

则在式(3)中各 B_i 均为行满秩.假定采用输出反馈控制器:

$$\Sigma_d:\ U_i(k) = Ky_i(k) + R_i(k), \quad (5)$$

可以得到图1所示的 l 个输入多采样率控制系统闭环系统状态方程:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = (A_i + B_iKC_i)x_i(k) + B_iR_i(k), \\ y_i(k) = C_ix(k), \\ i = 1,2,\cdots,l. \end{cases} \quad (6)$$

3 状态空间方法(State space method)

同时极点配置问题为:选择输出反馈矩阵 K 使得式(6)所示 l 个闭环系统的系统矩阵 $A_i + B_iKC_i$ 具有任意指定的特征值.为使这一问题的求解过程得到简化,将 K 分解成 l 项之和: $K = K_1 + K_2 + \cdots + K_l$,其中 K_i 满足

$$B_jK_i = 0,\ 若\ j \neq i, \quad (7)$$

且 $A_i + B_iK_iC_i$ 具有任意指定的特征值.则问题又转化为对 $i = 1,2,\cdots,l$,分别针对由式(3)所描述的被控对象 Σ_{ci} 寻找满足以上条件的 K_i.

为简单起见,对第 i 个闭环系统来说,设待配置的极点 $\{\lambda_i^1,\cdots,\lambda_i^{n_i}\}$ 都是单重的,且都不等于开环系统(3)的极点.设 t_i^j 是第 i 个闭环系统相应于 λ_i^j 的左特征向量,成立

$$t_i^j(A_i + B_iK_iC_i) = \lambda_i^jt_i^j. \quad (8)$$

令 $g_i^j = t_i^jB_iK_i$,则有

$$t_i^j = g_i^jC_i(\lambda_i^jI - A_i)^{-1}. \quad (9)$$

构造 $n_i \times n_u$ 维矩阵

$$R_i = \begin{bmatrix} g_i^1G_i(\lambda_i^1) \\ g_i^2G_i(\lambda_i^2) \\ \vdots \\ g_i^{n_i}G_i(\lambda_i^{n_i}) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

其中 $G_i(z) = C_i(zI - A_i)^{-1}B_i$,并且 $g_i^j = (g_i^k)^*$,若 $\lambda_i^j = (\lambda_i^k)^*$,而 $(\cdot)^*$ 表示复数或复数向量的共轭.令 $g_i = [g_i^1\ \ g_i^2\ \ \cdots\ \ g_i^{n_i}]^{\mathrm{T}}$,根据(8)及(9)两式,立即可以得到关于 K_i 的线性方程组

$$R_iK_i = g_i,\ i = 1,2,\cdots,l. \quad (11)$$

联立式(7)和式(11),显然,K_i 应当满足

$$B_jK_i = 0,\ 若\ j \neq i\ 及\ R_iK_i = g_i,\ i = 1,2,\cdots,l. \quad (12)$$

方程(12)有解,当且仅当

$$\operatorname{rank}[B_1^{\mathrm{T}} \quad B_{i-1}^{\mathrm{T}} \quad R_i^{\mathrm{T}} \quad B_{i+1}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad B_l^{\mathrm{T}}] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{T}} & \cdots & B_{i-1}^{\mathrm{T}} & B_i^{\mathrm{T}} & B_{i+1}^{\mathrm{T}} & \cdots & B_l^{\mathrm{T}} \\ 0 & \cdots & 0 & g_i^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

式(13)成立的一个充分条件是其左边的矩阵为行满秩.为此,首先选择

$$n_{uj} \geqslant \mu_i^j,\ j = 1,2,\cdots,n_i,\ i = 1,2,\cdots,l, \tag{14}$$

则对 $i = 1,2,\cdots,l$,输入矩阵 B_i 均为行满秩. $C_iB_i \neq 0$. 又因为系统(3)完全能控且完全能观测,固定 $z = \lambda_i^j$,则 $G_i(\lambda_i^j)$ 中的各行必然是 B_i 中所有行的线性组合.只要 $n_u \geqslant n_i$,对于任意的 g_i, R_i 以概率1为行满秩.选择

$$n_u \geqslant \sum_{i=1}^{l} n_i, \tag{15}$$

则对任意 i,式(13)左边的矩阵均为行满秩是一通有的性质.根据这一分析,我们有以下定理.

定理 1 若图1所示输入多采样率控制系统的输入采样率分别满足式(14)和(15),则对式(1)所示的 l 个连续时间的线性时不变被控对象 Σ_{ci} 几乎都能利用式(5)所示的静态输出反馈控制器,实现同时极点配置.

显然,如果选择待配置极点 $\{\lambda_i^1,\cdots,\lambda_i^{n_i}\}$ 都位于稳定区域,则可以利用同时极点配置实现同时稳定.反过来,由于同时稳定问题只要求闭环极点位于稳定区域,也就是说,闭环极点的选择具有较大的自由度,可以利用这一自由度,或者降低方程(12)在通常意义下有解的条件,或者使得闭环系统还能实现其他的控制目标.

4 多项式插值方法(Polynomial matrix interpolation method)

对 $i = 1,2,\cdots,l$,分别作出式(3)所示系统的矩阵分式描述:

$$\begin{cases} C_i(zI - A_i)^{-1} = D_i^{-1}(z)\bar{N}_i(z), \\ C_i(zI-A_i)^{-1}B_i = D_i^{-1}(z)\bar{N}_i(z)B_i = D_i^{-1}(z)N_i(z), \\ i = 1,2,\cdots,l. \end{cases} \tag{16}$$

其中 $N_i(z)$ 是 $p \times n_u$ 维多项式矩阵,$D_i(z)$ 是 $p \times p$ 维多项式矩阵,并且 $N_i(z)$ 和 $D_i(z)$ 为左互质,且 $D_i(z)$ 为行既约的.设对第 i 个闭环系统来说,待配置的极点集合为 $\{\lambda_i^1,\cdots,\lambda_i^{n_i}\}$. 令多项式矩阵 $\Phi_i(z)$ 的零点为 $\{\lambda_i^1,\cdots,\lambda_i^{n_i}\}$,即有

$$\det\Phi_i(z) = (z - \lambda_i^1)\cdots(z - \lambda_i^{n_i}),\ i = 1,2,\cdots,l. \tag{17}$$

同时极点配置问题为:对 $i = 1,2,\cdots,l$,根据给定待配置的极点集合,选择 $p \times p$ 维多项式矩阵 $\Phi_i(z)$ 满足式(17),确定定常矩阵 K 同时满足 l 个 Diophantine 方程

$$D_i(z) + N_i(z)K = \Phi_i(z),\ i = 1,2,\cdots,l. \tag{18}$$

选择输入采样率满足式(14),则对 $i = 1,2,\cdots,l$,式(3)所示的 l 个被控对象的能控性指标均为1.因此,对任意 i,以上式(18)所示的 Diophantine 方程均有解.因为 λ_i^j 是 $\Phi_i(z)$ 的零点,存在行向量 α_i^j 满足

$$\alpha_i^j\Phi_i(\lambda_i^j) = 0. \tag{19}$$

其中 $\alpha_i^j = (\alpha_i^k)^*$,若 $\lambda_i^j = (\lambda_i^k)^*$.利用 α_i^j,可以由式(18)得到

$$\begin{aligned} &\alpha_i^j N_i(\lambda_i^j)K = -\alpha_i^j D_i(\lambda_i^j), \\ &j = 1,2,\cdots,n_i,\ i = 1,2,\cdots,l. \end{aligned} \tag{20}$$

因为集合 $\{\lambda_i^1,\cdots,\lambda_i^{n_i}\}$ 中各元素互异,并且由于 C_{ci} 为行满秩,$N_i(z)$ 中的各行为线性独立,若式(15)成立,则方程(20)有解是一通有的性质.这个解矩阵 K,即是式(5)所示的,实现同时极点配置的输出反馈控制律中的输出反馈增益阵.这样,我们又从另一个角度得到了定理1.

5 结论(Conclusion)

对于输入多采样率数字系统,采用提升技术可以得到它的线性时不变状态空间模型.在此基础上,本文讨论了多采样率数字控制系统的同时极点配置控制器设计方法.我们分别考虑了利用状态空间方法和多项式矩阵插值方法.通过将输出反馈增益阵 K 分解成 l 项之和,使控制器设计的问题得到了简化.本文指出,只要多采样率数字控制系统的输入采样率满足一定的条件,则可以实现 l 个被控对象的同时极点配置.本文的结论为同时极点配置控制器的设计提供了一个新的有效的通用方法.

参考文献(References)

[1] Saek R, Murry J. Fraction representation, algebraic geometry and simultaneous stabilization problem [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1982,27(3):895 – 903

[2] Vidyasagar M, Viswanadham N. Algebraic design techniques for reliable stabilization [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1982,27(5):1085 – 1095

[3] Ghosh G K, Byrnes C I. Simultaneous stabilization and simultaneous pole placement by non-switching dynamic compensation [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1983,28(3):735 – 741

[4] Xiao J. Simultaneous stabilization with fixed closed-loop poles [J].

Control Theory and Applcations, 1990,7(1):40 – 46 (in Chinese)

[5] Xiao J. A polynomial approach for simultaneous stabilization of SISO plants [J]. Chinese Journal of Automation, 1996,8(2):133 – 137

[6] Kabamba P T, Yang C. Simultaneous controller design for linear time invariant systems [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1991, 36(1):106 – 111

[7] Araki M. Recent development in digital control theory [A]. Proc. IFAC 12th World Congress [C]. Sydney, 1993,9,251 – 260

[8] Xiao J. Output feedback eigenstructure assignment of multirate digital control systems [J]. Control and Decision, 1996,11(5):596 – 600

[9] Xiao J. Function space model of multirate digital control systems [J]. Control Theory and Applications, 2000,17(2):196 – 199 (in Chinese)

[10] Araki M, Hagiwara T. Pole assignment of multirate sampled-data output feedback [J]. Int. J. Control, 1986,44(6):1661 – 1673

[11] Kailath T. Linear Systems [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.,1980

[12] Karimi M, Tahani V, Gazor S. Matrix interpolation: Some control applications [J]. Int. J. Control, 1999,72(2):174 – 192

本文作者简介

肖 建 1950年生.西南交通大学教授,博士生导师.主要研究方向为计算机控制系统,鲁棒控制,交流传动控制系统等.

唐 磊 1968年生.1997年于西安交通大学获博士学位.现在西南交通大学从事博士后研究.主要研究方向为无损检测,计算机控制与仿真等.