文章编号: 1000 - 8152(2002)04 - 04 - 0615

在闭环极点约束条件下研究控制系统最大鲁棒稳定界*

王耀青
(武汉科技大学 自动化系,武汉 430081)

摘要: 不仅研究了一类扰动控制系统鲁棒稳定界的定义、优化等问题,而且通过研究控制系统鲁棒稳定界与 Riccati 矩阵方程解的关系,提出了在闭环极点约束条件下研究鲁棒稳定界的方法,并给出了基于 LQ 逆问题参数化解的极大化鲁棒稳定界的优化算法.

关键词: 鲁棒稳定界; Riccati 矩阵方程; 优化; LQ 逆问题
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Studies on the robust stable bounds of control systems with constraints of closed-loop poles

WANG Yao-qing
(Department of Automation, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: The definitions and optimization problem of robust stable bound, as well as the relations between robust stable bound and the solution of Riccati matrix equation, are studied for a class of systems with nonlinear disturbance. The robust stable bound of control systems is optimized with constraints of closed loop poles. Related optimization algorithms are also presented based on the parametric solution to the LQ inverse problem.

Key words: robust stable bound; Riccati matrix equation; optimization; LQ inverse problem

1 问题的提法(Problem statement)

设具有非线性扰动控制系统的状态空间表示为

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \tag{1}$$

式中 $f(x,u) \in \mathbb{R}^n$ 为包含了不确定参数在内的非线性扰动, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 分别是状态变量和控制变量, A, B 均为适当维数的实数矩阵. 系统(1) 在状态反馈 $u = -Kx$ 控制下的闭环控制系统可以表示为

$$\dot{x} = (A - BK)x + f(x, K) \triangleq A_c x + f(x, K). \tag{2}$$

其中 $f(x,K) = f(x,u)\mid_{u=-Kx}$ 表示非线性扰动与状态变量 x 和反馈系数矩阵 K 有关. 本文所要研究的问题是 $f(x,K)$ 满足什么条件,系统(3) 稳定.

为了保证系统分析的完整性,假设系统的状态完全可控,并且定义矢量 x 的 2-范数为 $\|x\|_2$, $\|x\|_2^2 = x^{\mathrm{T}}x$,系统的鲁棒稳定指数 κ_{w0},

$$\kappa_{w0} = \frac{\lambda_{\min}[Q + PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P]}{\lambda_{\max}[P]}, \tag{3}$$

也可以称 κ_{w0} 为控制系统的鲁棒稳定界, P 是 Riccati 矩阵方程

$$\begin{gathered} A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0, \\ Q = Q^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ R = R^{\mathrm{T}} > 0 \end{gathered} \tag{4}$$

的唯一对称正定解. $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

引理 1　对于上述控制问题,如果 $u = -Kx$, $K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$,则当 $\|f(x,K)\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\kappa_{w0}\|x\|_2$ 时,闭环控制系统(2)是稳定的.

证　直接定义 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ 就可以证明这个结论.

就目前的研究情况来看,引理 1 的研究思想具有很大的代表性[1],其理论基础是 Lyapunov 稳定性理论. 尽管鲁棒稳定界的表达形式各异,但没有本质区别,只是构造方法不同,需要进一步研究的问题很多. 一般来说,直接由此设计的控制系统具有很大的保守性[2]. 尽管文献[2]利用插值法研究了极大化鲁棒稳定界的方法,但仍然是属于构造范畴. 文献[3,4]则在保证闭环稳定的前提下,通过极小化控制器增益达到降低鲁棒控制系统设计保守性的目的,但"最小"特性也只是相对的. 由于保守性最终体现在

* 基金项目:湖北省教委科学基金(99B024)资助项目.
收稿日期:2000 - 07 - 04; 收修改稿日期:2001 - 03 - 05.

闭环极点的分布上,增加闭环极点约束,研究鲁棒稳定界的极大化才变得具有实际意义.但这方面得研究较少,具有一定的难度.为了阐明上述观点,本文将研究矩阵 P 和 Q 的变化率与鲁棒稳定界的关系,进而提出在闭环极点约束条件下极大化鲁棒稳定界的方法.

重新定义控制系统鲁棒稳定界 κ_w

$$\begin{cases}\kappa_w = \lambda_{\min}[P^{-1/2}(Q + PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)P^{-1/2}],\\ P = P^{1/2}P^{1/2}.\end{cases} \tag{5}$$

由此可见,控制系统的鲁棒稳定界 κ_w 与 Riccati 矩阵方程中矩阵 Q 和与之对应的对称正定解 P 有关.研究对 κ_w 的优化,必须研究矩阵 Q 和 P 的关系.

引理 2 设矩阵 P_1 和 P_2 分别是方程

$$\begin{cases}A^{\mathrm{T}}P_i + P_iA - P_iBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_i + Q_i = 0,\\ Q_i = Q_i^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ i = 1,2\end{cases} \tag{6}$$

的唯一对称正定解.如果 $Q_1 \geqslant Q_2$,则有 $P_1 \geqslant P_2$.

证 设矩阵 P_1 是方程

$$\begin{cases}A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A - P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1+Q_1=0,\\ Q_1=Q_1^{\mathrm{T}} \geqslant 0\end{cases} \tag{7}$$

的唯一对称正定解,矩阵 P_2 是方程

$$\begin{cases}A_c^{\mathrm{T}}P_2+P_2A_c-P_2BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_2 + Q_2 = 0,\\ Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} \geqslant 0\end{cases} \tag{8}$$

的唯一对称正定解.式中 $A_c = A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1$.将(15)式和(16)式相加,经过变换得

$$A^{\mathrm{T}}(P_1 + P_2) + (P_1 + P_2)A - (P_1 + P_2)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(P_1 + P_2) + (Q_1 + Q_2) = 0. \tag{9}$$

这表明矩阵 $(P_1 + P_2)$ 是方程(10)的唯一对称正定解.根据 $(Q_1 + Q_2) \geqslant Q_1$,$(P_1 + P_2) \geqslant P_1$ 的事实,由(8)式和(10)式可以证明引理2.

由于矩阵 P 是随着矩阵 Q 的增大而增大.考查矩阵 P 对 Q 的变化率对研究 κ_w 的极值,即 κ_w 的极大界具有实际意义.

定理 1 设矩阵 $\bar{P}_1$ 和 $\bar{P}_2$ 分别是方程

$$\begin{array}{l}A^{\mathrm{T}}\bar{P}_i + \bar{P}_iA - \bar{P}_iBR^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{P}_i + \bar{Q}_i = 0,\\ \bar{Q}_i = \bar{Q}_i^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ i = 1,2\end{array} \tag{10}$$

的唯一对称正定解.如果 $\bar{Q}_1$ 和 $\bar{Q}_2$ 满足 $\bar{Q}_2 = 2\bar{Q}_1$ 时,则不等式 $\bar{P}_2 \leqslant 2\bar{P}_1$ 成立.

证 设矩阵 P_1 和 P_2 分别是方程(7)和(8)的唯一对称正定解,当 $Q_1 = Q_2$ 时,将(9)式和(10)式相减得

$$A_c^{\mathrm{T}}(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A_c + P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1 + P_2BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_2 = 0. \tag{12}$$

将(7)式和(8)式相加得

$$A^{\mathrm{T}}(P_1 + P_2) + (P_1 + P_2)A - (P_1 + P_2)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(P_1 + P_2) + 2Q_1 = 0. \tag{13}$$

由于 A_c 稳定,由(12)式可知 $P_1 \geqslant P_2$,从而有 $(P_1 + P_2) \leqslant 2P_1$.定义 $\bar{Q}_1 = Q_1$,$\bar{Q}_2 = 2Q_1$,$\bar{P}_1 = P_1$,$\bar{P}_2 = (P_1 + P_2)$,则有 $\bar{Q}_2 = 2\bar{Q}_1$,且 $\bar{P}_2 \leqslant 2\bar{P}_1$ 这就是定理2的结论.

由定理2可知,增大矩阵 Q,矩阵 P 并没有同步增大,这表明增大矩阵 Q 可以增大 κ_w.另一方面,由于矩阵 Q 的增大导致矩阵 P 的增大,进而增大了控制系统的反馈增益.这表明通过增大矩阵 Q 的方法增大 κ_w 是以增大控制器的增益为代价的.因此,不加约束地通过矩阵 Q 对 κ_w 进行优化是没有实际意义的.只有在闭环极点约束的条件下分析 κ_w 的优化问题才具有真正的价值.

2 矩阵 P, Q 的参数化(Parametrization of matrices P and Q)

为了研究闭环极点约束条件下 κ_w 的优化问题,给出满足闭环极点要求的矩阵 P 和 Q 的参数化解是有必要的.这是LQ最优控制逆问题研究的范畴[5].

定理 2[5] 矩阵 Q(在 $R = I$ 的条件下)参数化表示为

$$Q = -(\alpha_1\xi_1 \quad \alpha_2\xi_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\xi_n)\cdot (\Psi_1\xi_1 \quad \Psi_2\xi_2 \quad \cdots \quad \Psi_n\xi_n)^{-1} \tag{14}$$

的充要条件是闭环控制系统 $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)x$ 的特征值 λ_{ci},$\lambda_{ci} \in \mathbb{C}_{\mathrm{opt}}^-$,$i = 1,2,\cdots,n$,且 λ_{ci} 的几何重根个数等于它的代数重根个数.

其中 $\xi_i \in \mathbb{C}^n (i = 1,2,\cdots,n)$ 为使得 $Q = Q^{\mathrm{T}} \geqslant 0$,且 $\Psi_i\xi_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 在复数空间 $\mathbb{C}^n$ 上线性独立的自由参数;当 $\lambda_{ci} = \lambda_{cj}^*$ 时,$\xi_i = \xi_j^*$,$*$ 表示复数共轭.定义 $\lambda_{ci} \in \mathbb{C}_{\mathrm{opt}}^-$ 是为了保证矩阵 $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$.

定理 3[6] 方程(4)的唯一对称、正定解 P 可以表示为

$$P = (\varphi_1\xi_1\ \varphi_2\xi_2 \cdots \varphi_n\xi_n)(\Psi_1\xi_1\ \Psi_2\xi_2 \cdots \Psi_n\xi_n)^{-1}. \tag{15}$$

定理2和3中有关参数的定义可以参阅文献[5,6].

性质 1 对于 $\forall\,\xi_i$,$\Psi_i\xi_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 线性独立,则不论矩阵 P 对称正定与否,矩阵 A_c 总具有特征值 λ_{ci},$i = 1,2,\cdots,n$.

性质1提供了闭环系统特征值约束的充分保证.利用方程(4),方程(6)可以重新表示为

$$\kappa_w P + A_c^{\mathrm{T}} P + P A_c \leqslant 0. \tag{16}$$

由于(16)式只与矩阵 P 有关,对于优化 κ_w 更加方便.定义

$$Y = (Y_1\ Y_2 \cdots y_n) = (\varphi_1\xi_1 \quad \varphi_2\xi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n\xi_n),$$
$$X = (X_1\ X_2 \cdots X_n) = (\Psi_1\xi_1 \quad \Psi_2\xi_2 \quad \cdots \quad \Psi_n\xi_n),$$

则(15)式可以表示为

$$P = YX^{-1}, \tag{17}$$

式中 X 为闭环控制系统(3)的特征矢量[6].

引理 3[7] 当矩阵对(A,B)可控,λ_{ci} 互异时,几乎对于所有的 $\xi_i \in \mathbb{C}^{n\times 1}$,$\Psi_i\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 空间上线性独立.

该引理表明几乎可以认为$\{\xi_i\}_{i=1}^n$ 是优化 κ_w 的自由参数.

3 κ_w 的优化问题(Optimization problem of κ_w)

为了保证 P 矩阵具有对称、正定性,定义

$$\Psi = -[(0.5\kappa_w I + A_c)^{\mathrm{T}} P + P(0.5\kappa_w I + A_c)]. \tag{18}$$

并定义具有逼近性质的目标函数

$$J = \mathrm{Tr}[(\Psi - \Psi_s)^{\mathrm{T}}(\Psi - \Psi_s)]. \tag{19}$$

式中 $\Psi_s = U\mathrm{diag}[\sigma_1\ \sigma_2 \cdots \sigma_n]U^{\mathrm{T}}$,$U = [U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_n]$,$U_i(i=1,2,\cdots,n)$为矩阵$[\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]$属于其特征值 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$的特征矢量.$J$ 具有极小值零.利用矩阵 X 对(18)式进行变换得

$$\bar{\Psi} = X^{\mathrm{T}}\Psi X =$$
$$-[(0.5\kappa_w I + \Lambda_c)^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{P}(0.5\kappa_w I + \Lambda_c)].$$

式中 $\bar{P} = X^{\mathrm{T}}PX$,$\Lambda_c = \mathrm{diag}[\lambda_{c1}\ \lambda_{c2} \cdots \lambda_{cn}]$.由此可见,当 $J \to 0$ 时,一定存在 κ_w 的极大值使得 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$,$\Psi \geqslant 0$.

性质 2 对于 $\forall \kappa \neq 0$,(15)式中的 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$扩大或缩小 κ 倍不改变矩阵 P 的结果.

根据性质 2,不妨设矢量 ξ_i 的 2-范数 $\|\xi_i\|_2$ 满足 $\|\xi_i\|_2 = 1, i = 1,2,\cdots,n$.由此,求解极大化 κ_w 的问题可以通过迭代求解优化问题

$$\begin{cases} \underset{\xi_i}{\mathrm{Min}} J = \underset{\xi_i}{\mathrm{Min}}\mathrm{Tr}[(\Psi - \Psi_s)^{\mathrm{T}}(\Psi - \Psi_s)], \\ \mathrm{s.t.}\ \|\xi_i\|_2 = 1, i = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{20}$$

来实现.当 $\kappa_w = 0$ 时,通过对目标函数 J 的优化求得的是 LQ 逆问题的解.在 $P = YX^{-1}$ 的条件下,确定使得 $\Psi \geqslant 0$ 的最大 κ_w 是本文的目的.κ_w 的值域范围是$(0, 2\mathrm{Min}\{\mathrm{Re}[\lambda_{ci}]\}_{i=1}^n)$.

定理 4 对于由(20)式定义的一类优化命题,其一阶递度函数 $\partial J/\partial\xi_i$ 可以表示为

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_i^{\mathrm{T}}} = -(\overbrace{0 \ \cdots \ 0 \ 1}^{i} \ 0 \ \cdots \ 0)X^{-1}F(\varphi_i - P\Psi_i)\Big[I - \frac{\xi_i\xi_i^{\mathrm{T}}}{\xi_i^{\mathrm{T}}\xi_i}\Big], \tag{21}$$

式中

$$F = 2[(\Psi - \Psi_s)^{\mathrm{T}}(0.5\kappa_w I + A_c)^{\mathrm{T}} + (0.5\kappa_w I + A_c)(\Psi - \Psi_s)^{\mathrm{T}}].$$

证 证明方法类似于文献[8],在此略.

求解 κ_w 极大值的计算过程如下:

1) 取初值 $\kappa_w = 0.5\mathrm{Min}\{\mathrm{Re}[\lambda_{ci}]\}_{i=1}^n$(也可以任意取 $\kappa_w > 0$ 的初值),$h = \kappa_w$;

2) 求解优化命题(20)确定变量 ξ_i,并取 $h := 0.5h$,如果 $\Psi \geqslant 0$,$\kappa_w := \kappa_w + h$,否则 $\kappa_w := \kappa_w - h$;

3) 重复第二步,直到先后两次的 κ_w 近似相等即可进入下一步;

4) 求得 κ_w 具有极大值时的 $u = -Kx$,$K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$,$P = YX^{-1}$.

4 算例(Numerical example)

考虑一线性时不变可控连续时间系统

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t).$$

取 $R = I$,$\lambda_{c1} = -2$,$\lambda_{c2} = -3$,$\lambda_{c3} = -4$,求控制系统最大鲁棒稳定界 κ_w 和矩阵 K.

解 开环系统的特征多项式为

$$\alpha(s) = (s+1)(s^2+4) = s^3 + s^2 + 4s + 4,$$
$$\alpha(\lambda_{c1}) = -8,\ \alpha(\lambda_{c2}) = -26,\ \alpha(\lambda_{c3}) = -60,$$
$$\alpha(-\lambda_{c1}) = 24,\ \alpha(-\lambda_{c2}) = 52,$$
$$\alpha(-\lambda_{c3}) = 100,$$
$$\alpha_1 = \alpha(\lambda_{c1})\alpha(-\lambda_{c1}) = -192,$$
$$\alpha_2 = \alpha(\lambda_{c2})\alpha(-\lambda_{c2}) = -1352,$$
$$\alpha_3 = \alpha(\lambda_{c3})\alpha(-\lambda_{c3}) = -6000,$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{192}\begin{pmatrix} 64 & 16 & 32 \\ -16 & 8 & 16 \\ 32 & -16 & -32 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{1352}\begin{pmatrix} 169 & 39 & 52 \\ -39 & 63 & 84 \\ 52 & -84 & -112 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{6000}\begin{pmatrix} 64 & 16 & 32 \\ -16 & 8 & 16 \\ 32 & -16 & -32 \end{pmatrix},\quad \varphi_1 = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 13 & 3 & 4 \\ 0 & 12 & 16 \\ 0 & -4 & 12 \end{pmatrix},\quad \varphi_3 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 4 & 4 \\ 0 & 20 & 20 \\ 0 & -5 & 20 \end{pmatrix}.$$

采用梯度法,取 $\kappa_w = 1$,步长 step = 0.001,$(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3) = I$. 在 Matlab 下仿真得

$$(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3) = \begin{pmatrix} 0.4365 & 0.9942 & 0.3978 \\ -0.8948 & -0.0527 & 0.8860 \\ -0.0933 & 0.0939 & 0.2385 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 2.1777 & 1.0604 & 0.1296 \\ 1.0604 & 5.8223 & 0.8906 \\ 0.1296 & 0.8906 & 0.9448 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 11.7905 & 10.6250 & 2.6230 \\ 10.6250 & 57.0998 & 11.7982 \\ 2.6230 & 11.7982 & 2.4564 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$K = \begin{pmatrix} 2.1777 & 1.0604 & 0.1296 \\ 1.0604 & 5.8223 & 0.8906 \end{pmatrix},$$

此时 $\lambda_{\max}[P] = 6.2587, \lambda_{\min}[Q + PBB^{\mathrm{T}}P] = 0.7974, \kappa_{w0} = 0.1274, \kappa_{w0} < \kappa_w = 1$.

根据本文算法对 κ_w 做进一步优化,最后的计算结果为 $\kappa_w = 2.1260$,

$$(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3) = \begin{pmatrix} 0.8502 & 0.3825 & 0.2146 \\ -0.4834 & 0.9240 & 0.9739 \\ 0.2086 & 0.0035 & 0.0744 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1.4175 & 0.8915 & -0.3423 \\ 0.8908 & 6.5825 & 1.4974 \\ -0.3436 & 1.4978 & 2.1620 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 3.6455 & 8.0421 & 1.4777 \\ 8.0425 & 62.2723 & 13.8536 \\ 1.4757 & 13.8542 & 3.1183 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$K = \begin{pmatrix} 1.4175 & 0.8915 & -0.3423 \\ 0.8908 & 6.5825 & 1.4974 \end{pmatrix},$$

而此时 $\lambda_{\max}[P] = 7.1418, \lambda_{\min}[Q + PBB^{\mathrm{T}}P] = 2.7996, \kappa_{w0} = 0.3920$.

就 κ_w 和 κ_{w0} 而言,当 $\kappa_w = 1.0$ 时,$\kappa_{w0} = 0.1274$. 当 $\kappa_w = 2.1260$ 时,$\kappa_{w0} = 0.3920$. 这个仿真结果表明,κ_{w0} 随着 κ_w 的增大而增大,优化 κ_w 对增大 κ_{w0} 具有一定的效果.

5 结束语(Conclusion)

本文的研究思想表明,通过以鲁棒控制系统稳定界作为优化指标,对 LQ 逆问题中的自由参数进行再一次优化,不仅使控制系统保持了线性二次型意义下的最优性,而且增加了控制系统鲁棒稳定界. 实际上,从 LQ 逆问题的观点出发,分析控制系统的鲁棒性,研究 LQ 最优控制系统加权矩阵 Q 中的自由参数与控制系统鲁棒性之间的内在联系,对寻求鲁棒控制系统稳定界的极大化方法具有直接指导的意义. 同时,研究直接通过 LQ 逆问题的求解以及 LQ 逆问题解与系统特征之间的关系获得具有极大控制系统鲁棒稳定界的鲁棒控制器设计方法更具有理论和实际应用价值. 这将有待于进一步研究. 本文的研究仅仅是一个开端.

参考文献(References)

[1] Qu Z. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties [J]. Systems & Control Letters, 1992, 18(2): 301 - 307

[2] Chen H G, Han K W. Improved quantitative measures of robustness for multivariable systems [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39(4): 807 - 810

[3] Wang Y Q. Design of optimal robust controller with minimal gain [J]. Control Theory & Applications, 1995, 12(3): 290 - 296

[4] Wang Y Q. Analysis of robustness for a class of discrete uncertain control systems [J]. Control Theory & Applications, 1997, 14(4): 531 - 536

[5] Wang Y Q, Lu Y Z. Design of discrete optimal regulators with assigned eigenvalues [J]. Control Theory & Applications, 1991, 8(2): 135 - 141

[6] Wang Y Q. A note on the solution of the algebraic Riccati equation [J]. Systems & Control Letters, 1989, 12(12): 465 - 472

[7] O'Reilly J, Fahmy M M. The minimum number of degrees of freedom in state feedback control [J]. Int. J. Control, 1985, 41(3): 749 - 768

[8] Wang Y Q. A parametrization method for robust pole assignment [J]. Control and Decision, 1995, 10(3): 210 - 215

本文作者简介

王耀青 1961 年生. 1989 年在浙江大学获工学博士学位. 1989 ~ 1991 年在浙江大学能源工程研究所从事博士后研究工作. 现为武汉科技大学自动化系教授. 主要研究领域为最优控制,鲁棒控制系统设计,控制系统参数化设计方法.