文章编号：1000-8152(2002)04-04-0623

不确定脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制*

关治洪，廖俊锋，廖锐全
（华中科技大学 控制科学与工程系，武汉 430074）

摘要：首次提出并研究了不确定脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制问题.基于代数 Riccati 方程正定矩阵解的存在性，建立了不确定脉冲闭环系统具有鲁棒 H_∞ 特性的充分性准则，同时给出了相应的状态反馈控制设计方法，并用数值例子说明了所得结果的有效性.

关键词：脉冲系统；不确定性；H_∞ 控制；Riccati 方程；鲁棒性
中图分类号：TP271$^+$.81 **文献标识码**：A

Robust H_∞ control of uncertain impulsive systems

GUAN Zhi-hong, LIAO Jun-feng, LIAO Rui-quan
(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: H_∞ robust control of uncertain impulsive systems which has not been studied up to now is introduced and investigated. On the basis of algebraic Riccati equation, several sufficient conditions for robust H_∞ criteria of the corresponding impulsive closed loop systems are established. A simple approach to the design of a robust impulsive controller is then presented. A numerical example is given for illustration of the theoretical results.

Key words: impulsive systems; uncertainty; H_∞ control; Riccati equation; robustness

1 引言(Introduction)

在近代科学技术如神经网络、机器人、通讯、经济、控制，特别是生物、生态、物理等众多领域中普遍存在着脉冲与瞬动现象.脉冲微分系统是描述和刻划这类现象的较为合适的数学模型.比如某些最优控制问题、生物种群的生长模型、经济预测与宏观分析模型等均可归结为脉冲微分系统模型[1~3].对于传统的连续系统模型，恰当的引入脉冲控制，也可以得到好的控制效果[1~3].脉冲系统是一类不连续系统，迄今为止，其控制理论尚在发展之中.特别地，建立不确定性脉冲系统的控制理论和方法具有重要的理论意义和很强的实际背景[4].众所周知，普通不确定性系统的控制理论，特别是鲁棒 H_∞ 控制已取得丰富的成果[5~8]，但关于不确定性脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制的研究尚不多见.为此，本文研究不确定线性脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制问题.基于代数 Riccati 方程正定矩阵解的存在性[5,8]，分析了相应不确定脉冲闭环系统具有鲁棒 H_∞ 特性的充分性条件，同时讨论了该系统的状态反馈控制设计问题.

2 问题描述(Problem statement)

通常线性脉冲控制系统可以描述为

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + Bu,\ t \neq t_k, \\ \Delta x = I_k(t,x),\ t = t_k. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 x 为系统状态变量，u 为系统控制输入，$\Delta x = x(t_k^+) - x(t_k)$，$A, B$ 为适当维数的矩阵，t_k 为脉冲跳跃点.系统(2.1)实际上可看作是对系统 $x'(t) = Ax$ 施加了不连续(第一类)控制：即当 $t \neq t_k$ 时，控制为 $u(t)$，而在 $t = t_k$ 时，对系统状态 x 施加了作用 $I_k(t,x)$. 因此，当系统(2.1)具有不确定扰动时，我们可以利用鲁棒 H_∞ 控制的理论和方法研究该系统的控制设计问题.

考虑具有如下形式的线性脉冲系统：

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu + Dw,\ t \neq t_k, \\ z = E_1 x + E_2 u + Hw, \\ \Delta x = c_k x(t_k),\ t = t_k, \\ x(t) = 0,\ t = t_0 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态变量，$u \in \mathbb{R}^m$ 为 m 维控制

* 基金项目：国家自然科学基金(60074009)，高校博士点基金(199048718)和高校骨干教师资助计划资助项目.
收稿日期：2001-06-23；收修改稿日期：2002-01-14.

输入，$w \in \mathbb{R}^l$ 是外部干扰，$z \in \mathbb{R}^p$ 表示系统的受控输出变量，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$D \in \mathbb{R}^{n\times l}$，$E_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}$，$E_2 \in \mathbb{R}^{p\times m}$，$H \in \mathbb{R}^{p\times l}$ 为常数矩阵，c_k 为常数，$\Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-)$，$\lim\limits_{h\to 0^+} x(t-h) = x(t^-)$，$\lim\limits_{h\to 0^+} x(t+h) = x(t^+)$，$t_k$ 是脉冲跳跃点，$k = 1,2,\cdots$，$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots \to \infty (k\to\infty)$，并总假定 $\lim\limits_{h\to 0^+} x(t_k - h) = x(t_k^-) = x(t_k)$，即脉冲系统(2.2)的解 $x(t)$ 在 t_k 左连续.

下面的讨论中，要用到范数 $\|\cdot\|_T$ 和 $L_2[0,T]$ 空间的概念. 对任意给定的常数 $T > 0$，$w(t) \in \mathbb{R}^l$，定义

$$\|w\|_T = \left(\int_0^T \|w(t)\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int_0^T w^{\mathrm{T}}(t) w(t) \mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

其中向量范数 $\|w\| = (\sum\limits_{i=1}^{l} w_i^2)^{1/2}$，$w = (w_1,\cdots,w_l)^{\mathrm{T}}$. 并记所有满足 $\|w\|_T < \infty$ 且使系统(2.2)有解的 $w(\cdot)$ 全体为 $L_2[0,T]$.

本文要研究的问题是：设 $\gamma > 0$ 预选给定，对控制系统(2.2)设计一状态反馈控制律

$$u = -Lx \tag{2.4}$$

使得相应的闭环系统

$$\begin{cases} x' = A_L x + Dw,\ t \neq t_k, \\ z = E_L x + Hw, \\ \Delta x = c_k x(t_k),\ t = t_k, \\ x(t) = 0,\ t = t_0 = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

满足如下的鲁棒 H_∞ 控制准则：

a) 当 $w = 0$ 时，闭环系统渐近稳定；

b) 对任意的 $T > 0$ 和任意 $w(\cdot) \in L_2[0,T]$ 均有

$$\|z\|_T \leqslant \gamma \|w\|_T. \tag{2.6}$$

其中 $A_L = A - BL$，$E_L = E_1 - E_2 L$，L 是 $m\times n$ 维待定的常矩阵.

后面我们要用到以下记号：$A \geqslant B(A > B)$ 表示 $A - B$ 为半正定矩阵(正定矩阵)，其中 A 和 B 为同阶对称矩阵；矩阵 C^{T} 表示 C 的转置；$\lambda_{\max}(D)$ 和 $\lambda_{\min}(D)$ 分别表示 D 的最大和最小特征值；I 表示单位矩阵，$\mathbb{N}$ 表示自然数的全体，$x := x(t)$.

3 主要结果(Main results)

首先给出一个引理. 由文献[9]中的定理4.13.3，容易得到下述结果.

引理 1 设 P 为 n 阶正定矩阵，Q 为 n 阶对称矩阵，则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\lambda_{\min}(P^{-1}Q)x^{\mathrm{T}}Px \leqslant x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant \lambda_{\max}(P^{-1}Q)x^{\mathrm{T}}Px. \tag{3.1}$$

对于系统(2.5)，记

$$\beta = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{(1+c_k)^2\},\quad R = \gamma^2 I - H^{\mathrm{T}}H. \tag{3.2}$$

其中 $\gamma > 0$ 为常数.

定理 1 若对给定的常数 $\gamma > 0$ 有 $R > 0$，$-2 \leqslant c_k \leqslant 0$，$k \in \mathbb{N}$，且对给定的矩阵 $Q > 0$ 和常数 $\epsilon > 0$，矩阵方程

$$A_L^{\mathrm{T}}P + PA_L + (PD + E_L^{\mathrm{T}}H)R^{-1}(H^{\mathrm{T}}E_L + D^{\mathrm{T}}P) + E_L^{\mathrm{T}}E_L + \epsilon Q = 0 \tag{3.3}$$

有正定矩阵解 P，则闭环脉冲系统(2.5)具有鲁棒 H_∞ 性能准则 a)和 b).

证 对于系统(2.5)，构造其 V 函数为

$$V(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t). \tag{3.4}$$

其中 P 为(3.3)式的正定矩阵解.

a) 当 $w = 0$ 时，证明系统(2.5)渐近稳定. 当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时，沿着系统(2.5)的解轨道，并注意到(3.3)式，有

$$\begin{aligned} &\dot V(t) = \\ &x^{\mathrm{T}}(A_L^{\mathrm{T}}P + PA_L)x + 2x^{\mathrm{T}}PDw = \\ &-x^{\mathrm{T}}[(PD + E_L^{\mathrm{T}}H)R^{-1}(H^{\mathrm{T}}E_L + \\ &D^{\mathrm{T}}P) + E_L^{\mathrm{T}}E_L + \epsilon Q]x + 2x^{\mathrm{T}}PDw = \\ &-[Rw - (D^{\mathrm{T}}P + H^{\mathrm{T}}E_L)x]^{\mathrm{T}}R^{-1}[Rw - \\ &(D^{\mathrm{T}}P + H^{\mathrm{T}}E_L)x] - (E_Lx + \\ &Hw)^{\mathrm{T}}(E_Lx + Hw) + \gamma^2 w^{\mathrm{T}}w - x^{\mathrm{T}}\epsilon Qx \leqslant \\ &-\|E_Lx + Hw\|^2 + \gamma^2\|w\|^2 - x^{\mathrm{T}}\epsilon Qx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

根据引理1，即(3.1)式，

$$x^{\mathrm{T}}\epsilon Qx \geqslant \lambda_{\min}(\epsilon P^{-1}Q)x^{\mathrm{T}}Px = \lambda_{\min}(\epsilon P^{-1}Q)V(t).$$

于是由(3.5)式知当 $w = 0$ 时有

$$\dot V(t) + \mu V(t) < 0,\quad t \in (t_k, t_{k+1}].$$

其中 $\mu = \lambda_{\min}(\epsilon P^{-1}Q) > 0$. 进而

$$V(t) \leqslant V(t_k^+)\exp[-\mu(t - t_k)],\quad t \in (t_k, t_{k+1}]. \tag{3.6}$$

由系统(2.5)和(3.4)式知

$$\begin{aligned} &V(t_k^+) = x^{\mathrm{T}}(t_k^+)Px(t_k^+) = \\ &(1+c_k)^2 x^{\mathrm{T}}(t_k)Px(t_k) = (1+c_k)^2 V(t_k). \end{aligned} \tag{3.7}$$

当 $t \in [t_0, t_1]$ 时，

$$V(t) \leqslant V(t_0)\exp[-\mu(t - t_0)],$$

从而有

$$V(t_1) \leqslant V(t_0)\exp[-\mu(t_1 - t_0)]. \tag{3.8}$$

类似地,对于 $t \in (t_1, t_2]$, 由(3.6),(3.7)和(3.8)式得

$$V(t) \leqslant V(t_1^+)\exp[-\mu(t - t_1)] = (1 + c_1)^2 V(t_1)\exp[-\mu(t - t_1)] \leqslant \beta V(t_0)\exp[-\mu(t - t_0)].$$

其中 β 由(3.2)式给出.依此类推并注意到 $\beta \leqslant 1$,则对 $t \in (t_{k-1}, t_k]$ 时有

$$V(t) \leqslant \beta^{k-1} V(t_0)\exp[-\mu(t - t_0)] \leqslant V(t_0)\exp[-\mu(t - t_0)],\ t \in (t_{k-1}, t_k],$$

也即对于 $t \geqslant t_0$ 有

$$V(t) \leqslant V(t_0)\exp[-\mu(t - t_0)].$$

注意到 $V(t)$ 的表达式,由于 $V(t)$ 是正定的,$\mu > 0$,故上式意味着系统(2.5)当 $w = 0$ 时渐近稳定.

b) 要证明不等式 $\int_0^T \| z(t) \|^2 \mathrm{d}t \leqslant \gamma^2 \| w \|_T^2$ 成立,这里不妨设 $T \in (t_k, t_{k+1}]$. 由(3.5)式知 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时

$$\dot V(t) \leqslant - \| E_L x + Hw \|^2 + \gamma^2 \| w \|^2 - x^{\mathrm T}\varepsilon Q x,$$

于是得

$$\dot V(t) \leqslant - \| z \|^2 + \gamma^2 \| w \|^2 - x^{\mathrm T}\varepsilon Q x,$$

或

$$\| z \|^2 \leqslant - \dot V(t) + \gamma^2 \| w \|^2,\ t \in (t_k, t_{k+1}].$$

从0到 T 积分上式得

$$\int_0^T \| z \|^2 \mathrm{d}t \leqslant - \int_0^T \dot V(t)\mathrm{d}t + \gamma^2 \int_0^T \| w \|^2 \mathrm{d}t,\quad T \in (t_k, t_{k+1}]. \tag{3.9}$$

注意到 $V(0) = 0, V(t_k) > 0$,及 $-2 \leqslant c_k \leqslant 0$,故有

$$\begin{aligned}&\int_0^T \dot V(t)\mathrm{d}t = \\ &\int_0^{t_1} \dot V(t)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \dot V(t)\mathrm{d}t + \cdots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot V(t)\mathrm{d}t + \int_{t_k}^{T} \dot V(t)\mathrm{d}t = \\ &V(t_1) - V(0) + V(t_2) - V(t_1^+) + \cdots + \\ &V(t_k) - V(t_{k-1}^+) + V(T) - V(t_k^+) = \\ &V(t_1) - V(t_1^+) + \cdots + V(t_{k-1}) - \\ &V(t_{k-1}^+) + V(t_k) - V(t_k^+) + V(T) = \\ &- \sum_{i=1}^{k} c_i(2 + c_i)V(t_i) + V(T) \geqslant 0.\end{aligned}$$

因此(3.9)式成为

$$\| z \|_T^2 = \int_0^T \| z \|^2 \mathrm{d}t \leqslant \gamma^2 \int_0^T \| w \|^2 \mathrm{d}t = \gamma^2 \| w \|_T^2.$$

这即证明了定理1. 证毕.

对于系统(2.5),记

$$A_H = A + DR^{-1}H^{\mathrm T}E_1,$$
$$C_H = (I + HR^{-1}H^{\mathrm T})^{1/2}E_1,$$
$$D_H = DR^{-1/2},\ F_H = (I + HR^{-1}H^{\mathrm T})^{1/2}E_2,$$
$$B_H = B + DR^{-1}H^{\mathrm T}E_2,\ S = (F_H^{\mathrm T}F_H)^{-1}.$$

其中 R 由(3.2)式给出.

定理2 若对给定的常数 $\gamma > 0$ 有 $R > 0, F_H$ 可逆, $-2 \leqslant c_k \leqslant 0, k \in \mathbb{N}$,且对给定的矩阵 $Q > 0$ 和常数 $\varepsilon > 0$,矩阵方程

$$(A_H - B_H F_H^{-1} C_H)^{\mathrm T} P + P(A_H - B_H F_H^{-1} C_H) + PD_H D_H^{\mathrm T} P - PB_H S B_H^{\mathrm T} P + \varepsilon Q = 0 \tag{3.10}$$

有正定矩阵解 P,则使闭环脉冲系统(2.5)满足鲁棒 H_∞ 性能准则a)和b)的状态反馈矩阵为

$$L = SB_H^{\mathrm T}P + F_H^{-1}C_H. \tag{3.11}$$

证 在定理1中,(3.3)式经适当整理后得

$$\begin{aligned}&A_H^{\mathrm T}P + PA_H + PD_H D_H^{\mathrm T}P + C_H^{\mathrm T}C_H + \\ &L^{\mathrm T}(F_H^{\mathrm T}F_H)L - L^{\mathrm T}(F_H^{\mathrm T}C_H + B_H^{\mathrm T}P) - \\ &(F_H^{\mathrm T}C_H + B_H^{\mathrm T}P)^{\mathrm T}L + \varepsilon Q = 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

若取 $L = SB_H^{\mathrm T}P + F_H^{-1}C_H$,则

$$L^{\mathrm T}(F_H^{\mathrm T}F_H)L - L^{\mathrm T}(F_H^{\mathrm T}C_H + B_H^{\mathrm T}P) = 0,$$

从而(3.12)式成为

$$(A_H - B_H F_H^{-1} C_H)^{\mathrm T} P + P(A_H - B_H F_H^{-1} C_H) + PD_H D_H^{\mathrm T} P - PB_H S B_H^{\mathrm T} P + \varepsilon Q = 0.$$

据定理1,这意味着若矩阵方程(3.10)有正定矩阵解 P,则当状态反馈矩阵 L 取为(3.11)式时,闭环脉冲系统(2.5)具有鲁棒 H_∞ 性能准则a)和b).

证毕.

由定理2,可以给出脉冲系统(2.2)的状态反馈鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法:

1) 对系统(2.2),验证条件: $-2 \leqslant c_k \leqslant 0, k \in \mathbb{N}$;

2) 给定 $\gamma > 0$,对系统(2.2)计算 $R = \gamma^2 I - H^{\mathrm T}H, A_H, B_H, C_H, D_H, F_H, S$,验证 $R > 0$ 和 F_H^{-1} 的存在性;若不然,调整 γ 的大小;

3) 取 $\varepsilon = 1, Q = I$;

4) 计算方程(3.10)的解 P,如果 $P > 0$,则转到第5)步;如果找不出这样的 P,则减小 ε,一直到 $\varepsilon \ll 1$;如果当 $\varepsilon \ll 1$ 时仍找不到 $P > 0$,则增加 γ,转到第2)步;

5) 由(3.11)式计算 L,便得状态反馈矩阵.

4 例子(Example)

例 考虑具有如下形式的不确定脉冲系统(2.2)的鲁棒 H_∞ 控制问题,其中

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0&1.5\\1.5&0\end{bmatrix}w,\ t\neq t_k,\\ \begin{bmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\end{bmatrix},\ t=t_k,\\ \begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{bmatrix}w.\end{cases}$$

这里有关变量和参数的意义如系统(2.2)所述.

取 $\gamma=1,\varepsilon=1,Q=I$.易见 $-2<c_k=-1<0,R=\gamma^2I-H^{\mathrm{T}}H=\frac{3}{4}I>0,R^{-1}=\frac{4}{3}I$.

我们可求得下列矩阵

$$A_H=A+DR^{-1}H^{\mathrm{T}}E_1=\begin{bmatrix}-1&2\\2&-2\end{bmatrix},$$

$$C_H=\{I+HR^{-1}H^{\mathrm{T}}\}^{1/2}E_1=\begin{bmatrix}2/\sqrt{3}&0\\0&2/\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

$$D_H=DR^{-1/2}=\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&0\end{bmatrix},$$

$$F_H=(I+HR^{-1}H^{\mathrm{T}})^{1/2}E_2=\begin{bmatrix}2/\sqrt{3}&0\\0&2/\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

$$B_H=B+DR^{-1}H^{\mathrm{T}}E_2=\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix},$$

$$S=(F_H^{\mathrm{T}}F_H)^{-1}=\begin{bmatrix}0.75&0\\0&0.75\end{bmatrix}.$$

将上述式子代入(3.10)式,得

$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}P+P\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}+P\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}P-P\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}P+\varepsilon Q=0.$$

该方程有解

$$P=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.25\end{bmatrix},$$

由公式(3.11)得

$$L=\begin{bmatrix}1&0.375\\0.75&1\end{bmatrix}.$$

即为我们所需的状态反馈矩阵.

5 结束语(Conclusion)

在本文中,我们研究了脉冲线性控制系统的鲁棒 H_∞ 控制问题.建立了脉冲闭环线性系统满足鲁棒 H_∞ 特性的充分性准则,并给出了基于系统的状态反馈的鲁棒控制器的算法.这一研究为脉冲系统和脉冲控制的分析与应用提供了一定的理论基础.

参考文献(References)

[1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simenov P S. Theory of Impulsive Differential Systems [M]. Singapore: World Scientific Press, 1989

[2] Liu Y Q, Guang Z H. Stability, Stabilization and Control of Measure Large-Scale Systems with Impulses [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1996

[3] Guan Z H, Chen G, Ueta T. On impulsive control of a periodically forced chaotic pendulum system [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2000,45(9):1724 - 1727

[4] Guan Z H, Chan C W, Leung A Y T, et al. Robust stabilization of singular impulsive delayed systems with nonlinear perturbations [J]. IEEE Trans. on Circuit and Systems (I), 2001,48(8):1011 - 1019

[5] Zhou K, Khargonekar P P. An algebaic Riccati equation approach to H_∞ optimization [J]. Systems & Control Letters, 1988,11(2):85 - 91

[6] Ge J H, Frank P M, Lin C F. Robust H_∞ state feedback control for linear systems with state delay and parameter uncertainty [J]. Automatica, 1996,32(8):1183 - 1185

[7] Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ Synthesis [J]. Automatica, 1996,32(7):1007 - 1014

[8] Pu Z L, Xu D Y. H_∞ robust control for a class of nonlinear delayed uncertain systems [J]. Control Theory and Applications, 2000, 17 (4):601 - 603

[9] Huang L. Linear Algebra in Systems and Control [M]. Beijing: Science Press, 1984,211 - 214

本文作者简介

关治洪 1955年生.博士.教授.博士生导师.研究兴趣为复杂系统的控制理论与应用,脉冲控制、神经网络和混沌控制等.

Email: guanzh@public.wh.hb.cn

廖俊锋 1977年生.华中科技大学控制科学与工程系在读硕士研究生.研究方向为脉冲系统的控制理论与应用.

廖锐全 1962年生.副教授,华中科技大学控制科学与工程系在读博士研究生.研究方向为复杂系统的控制理论与应用.