文章编号: 1000-8152(2002)04-04-0631

具有几何约束条件的飞机纵向运动数学模型研究*

王 红[1], 戴冠中[2], 潘 泉[2], 尹国栋[2]
(1. 南开大学 数学科学学院,天津 300071; 2. 西北工业大学 自动控制系,西安 710072)

摘要: 研究了具有球面约束条件的飞机纵向运动数学模型.导出了飞机纵向运动控制系统在五维球面上的整体化方程,展示了几何约束条件对飞机纵向运动控制系统的影响.并且讨论了具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统的局部能控性和局部能观测性以及飞机纵向运动控制系统的平衡态与五维球面测地线之间的关系.这些研究结果对于进一步研究大范围飞机运动控制系统的设计和实现提供了理论依据.

关键词: 飞机运动系统; 状态空间; 几何结构; 能控性; 能观测性
中图分类号: TP273; V249 **文献标识码:** A

Mathematical model of airplane longitudinal motion with a geometrical limitation

WANG Hong[1], DAI Guan-zhong[2], PAN Quan[2], Yin Guo-dong[2]
(1. College of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, China;
2. Science and Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: We study the mathematical model of airplane longitudinal motion with a geometrical limitation. At first, we deduce the generalized equation of the control system of airplane longitudinal motion on five-dimension sphere and show that the geometrical limit condition affects on control system of airplane longitudinal motion. Secondly, we discuss the local controllability and local observability of control system of airplane longitudinal motion with a geometrical limitation, and study the relation between the equilibrium state of control system of airplane longitudinal motion and the geodesic of the five-dimension sphere. These results give a theoretical foundation for further studying the design and realization of control system of airplane's large-scale motion.

Key words: control system of airplane's motion; state space; geometrical structure; controllability; observability

1 引言(Introduction)

近年来,飞机的发展相当迅速.飞机不仅是人类生活中重要的交通运输工具,而且是现代军事战斗中重要的武器之一.在现代飞机的发展中,飞机的飞行控制系统是非常重要的,寻求能精确描述飞机飞行控制系统的方法是飞机发展的迫切要求. 随着现代控制理论的深入发展和飞机质量的提高,人们在寻求各种方法来精确控制飞机飞行.特别是大范围非线性控制系统的深入研究,使人们逐步认识到状态空间的几何结构对控制系统有着重要的影响,并且在理论方面已有一些研究成果,参见文献[1~6].我们注意到,通常飞机控制系统总是以欧氏空间为背景建立的.如果飞机在小范围内飞行,地球可以近似看成平坦的;如果飞机在大范围内飞行,如跨越洲际飞行,在工程计算中,总是加入地球表面的曲率以克服飞机飞行控制系统的误差.我们的想法是对于大范围飞行的飞机,直接建立一个在弯曲空间上的飞机飞行控制系统,而且在系统的状态方程中直接包含有与弯曲空间的几何结构相关的量.我们还要求这种整体化方法建立的飞机飞行控制系统的状态方程当限制在局部小范围内时,与通常我们以欧氏空间为背景建立的飞机飞行控制系统的状态方程是一致的.

本文,作为一种应用,大范围考虑飞机保持稳定高度的飞行控制系统.为了刻画状态空间的几何结构对飞机飞行控制系统的影响,我们研究了具有球面约束条件的飞机纵向运动数学模型.首先,将在地面和航迹坐标系下给出的飞机纵向运动方程转化为

* 基金项目:国家自然科学基金(10171081),陕西省自然科学基金(97CS0101)和西北工业大学"双新计划"项目资助.
收稿日期:1999-11-29; 收修改稿日期:2001-05-21.

飞机纵向运动控制系统的状态方程.其次,将具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统转化为建立在五维球面上的飞机纵向运动的非线性控制系统.给出了在球面的局部坐标系下,飞机纵向运动控制系统的整体化方程,展示了球面的几何结构对飞机纵向运动控制系统的影响.最后,我们讨论了具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统的平衡态与球面测地线之间的内在联系.这些研究结果对于进一步讨论大范围飞机运动控制系统的设计和实现提供了理论依据.

2 飞机纵向运动控制系统(The control systems of airplane longitudinal motion)

飞机在空间的运动可以分为纵向运动和侧向运动.本文,我们仅考虑飞机的纵向运动,即假定飞机的横向运动为零.分别取飞机飞行运动的地面坐标系和航迹坐标系,参见文献[7~9],由牛顿第二定律和动量矩定理可以推出飞机纵向运动方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\gamma,\ \dot{z} = v\sin\gamma, \\ \dot{v} = \dfrac{T}{m}\cos\alpha - \dfrac{D}{m} - g\sin\gamma, \\ \dot{\gamma} = \dfrac{L}{mv} + \dfrac{T}{mv}\sin\alpha - \dfrac{g}{v}\cos\gamma, \\ \dot{q} = \dfrac{M}{J},\ \dot{\theta} = q. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 (x,z) 是飞行地面坐标,v 是飞行速度(米/秒),γ 是航迹倾斜角(弧度),α 是迎角(弧度),θ 是俯仰角(弧度),T 是引擎推力(牛顿),D 是空气动力阻力(牛顿),L 是空气动力升力(牛顿),m 是飞机质量(公斤),g 是重力加速度(9.8 米/秒^2),q 是俯仰角速度(弧度/秒),J 是飞机的转动惯量(公斤·米^2),M 是力矩(牛顿·米).这里,我们假定各变量变化都在通常适用的范围内,比如迎角 α 为小角度等.由于我们仅考虑飞机的纵向运动,假定侧滑角和机体航向角均为零,并且机体无滚转.

下面将飞机纵向运动方程转化为飞机纵向运动控制系统的状态方程.在飞机飞行运动的地面坐标系和航迹坐标系下,设飞机运动的轨迹坐标为 $(x(t),z(t))$.实际中,为了保持飞机运动具有稳定的高度,飞机运动的航迹倾斜角 γ 和俯仰角加速度 $\dfrac{M}{J}$ 可以由引擎推力和力矩等来确定.根据运动方程(2.1),为了考虑问题的方便,我们直接假定飞机的航迹倾斜角 γ 和俯仰角加速度$\dfrac{M}{J}$ 是可以控制调节的,于是令

$$\begin{cases} X^1(t) = x(t),\ X^2(t) = z(t),\ X^3(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \\ X^4(t) = \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t},\ X^5(t) = \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}, \\ u^1(t) = \cos\gamma(t),\ u^2(t) = \sin\gamma(t),\ u^3(t) = \dfrac{M}{J}. \end{cases} \tag{2.2}$$

记 $X(t) = (X^1(t),X^2(t),X^3(t),X^4(t),X^5(t))$ 为状态向量,$u(t) = (u^1(t),u^2(t),u^3(t))$ 为输入控制量,由(2.1)式可以推出飞机纵向运动控制系统为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = f(X(t),u(t)), \\ Y(t) = h(X(t)). \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $Y(t) = h(X(t))$ 是输出方程,

$$f(X(t),u(t)) = (f^1(t),f^2(t),f^3(t),f^4(t),f^5(t)),$$

$$f^1(t) = X^3(t),\ f^2(t) = X^4(t),$$

$$f^3(t) = \frac{T}{m}\cos\theta(t) - \frac{D}{m}u^1(t) - \frac{L}{m}u^2(t),$$

$$f^4(t) = \frac{T}{m}\sin\theta(t) + \frac{D}{m}u^2(t) - \frac{L}{m}u^1(t) - g,$$

$$f^5(t) = u^3(t).$$

3 飞机纵向运动控制系统的整体化方程(The generalized equations of the control systems of airplane longitudinal motion)

如果大范围考虑飞机绕地球飞行运动的轨迹,由于地心引力的作用,飞机运动的轨迹总是一条三维空间中的曲线.为了大范围研究飞机保持稳定高度的飞行运动,我们用几何方法研究:如果飞机的飞行运动的轨迹受到某些条件约束的话,飞机的纵向运动控制系统将受到哪些限制,即我们将给出具有几何约束条件的飞机纵向运动控制系统的整体化方程.

我们考虑飞机飞行运动的轨迹是一条球面曲线,为了便于整体化处理,假定飞机纵向运动控制系统的状态向量是五维球面 $S^5(r)$ 上的切向量场,参见文献[5,6,10,11].$S^5(r)$ 上具有从 R^6 上诱导的黎曼度量 G,设 D 为$S^5(r)$ 上度量 G 的 Levi-Civita 联络.取 $S^5(r)$ 的局部坐标邻域:

$$(U,\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\varphi^5) = \{(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\varphi^5) \in U, 0 < \varphi^i < 2\pi,$$
$$i = 1,2,3,4,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi^5 < \frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

在此坐标邻域下,球面 $S^5(r)$ 可以参数表示为:

$$\vec{r}(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\varphi^5) =$$

$$\{r\cos\varphi^1\cos\varphi^2\cos\varphi^3\cos\varphi^4\cos\varphi^5,\ r\sin\varphi^1\cos\varphi^2\cos\varphi^3\cos\varphi^4\cos\varphi^5,\ r\sin\varphi^2\cos\varphi^3\cos\varphi^4\cos\varphi^5,\ r\sin\varphi^3\cos\varphi^4\cos\varphi^5,\ r\sin\varphi^4\cos\varphi^5, r\sin\varphi^5\}. \quad (3.2)$$

对于飞机纵向运动控制系统(2.3),其状态向量场 $X(t)$ 是球面 $S^5(r)$ 的一个切向量场. 设 $X(t)$ 的附属曲线 $\lambda(t):[a,b]\to S^5(r)$ 是 $S^5(r)$ 上一条嵌入曲线,$\lambda([a,b])\subset U$,并且 $X(t)=X(\lambda(t))$. 利用 $S^5(r)$ 上的 Levi-Civita 联络 D,则 $\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=D_{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}X(t)$,于是,飞机纵向运动控制系统(2.3)的状态方程在 $S^5(r)$ 上的局部坐标邻域$(U,\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\varphi^5)$下可以表示为:

$$\frac{\mathrm{d}X^k(t)}{\mathrm{d}t}+\sum_{i,j=1}^{5}\Gamma_{ij}^k(\lambda(t))X^i(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^j}{\mathrm{d}t}=f^k(t),\ k=1,\cdots,5, \quad (3.3)$$

经计算 $S^5(r)$ 的联络系数可得:在球面约束条件下,飞机纵向运动控制系统的整体化方程为:

$$\frac{\mathrm{d}X^1(t)}{\mathrm{d}t}-\tan\lambda^2(t)(X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\mathrm{d}t}+X^2(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t})-\tan\lambda^3(t)(X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{\mathrm{d}t}+X^3(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t})-\tan\lambda^4(t)(X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^4}{\mathrm{d}t}+X^4(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t})-\tan\lambda^5(t)(X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^5}{\mathrm{d}t}+X^5(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t})=X^3(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}X^2(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\sin2\lambda^2(t)X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t}-\tan\lambda^3(t)(X^2(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{\mathrm{d}t}+X^3(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\mathrm{d}t})-\tan\lambda^4(t)(X^2(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^4}{\mathrm{d}t}+X^4(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\mathrm{d}t})-\tan\lambda^5(t)(X^2(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^5}{\mathrm{d}t}+X^5(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\mathrm{d}t})=X^4(t).$$

$$\frac{\mathrm{d}X^3(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\cos^2\lambda^2(t)\sin2\lambda^3(t)X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\sin2\lambda^3(t)X^2(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\mathrm{d}t}-\tan\lambda^4(t)(X^3(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^4}{\mathrm{d}t}+X^4(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{\mathrm{d}t})-\tan\lambda^5(t)(X^3(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^5}{\mathrm{d}t}+X^5(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{\mathrm{d}t})=\frac{T}{m}\cos\theta(t)-\frac{D}{m}u^1(t)-\frac{L}{m}u^2(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}X^4(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\cos^2\lambda^2(t)\cos^2\lambda^3(t)\cdot\sin2\lambda^4(t)X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\cos^2\lambda^3(t)\sin2\lambda^4(t)X^2(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\sin2\lambda^4(t)X^3(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{\mathrm{d}t}-\tan\lambda^5(t)(X^4(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^5}{\mathrm{d}t}+X^5(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^4}{\mathrm{d}t})=\frac{T}{m}\sin\theta(t)+\frac{D}{m}u^2(t)-\frac{L}{m}u^1(t)-g,$$

$$\frac{\mathrm{d}X^5(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\cos^2\lambda^2(t)\cdot\cos^2\lambda^3(t)\cos^2\lambda^4(t)\sin2\lambda^5(t)X^1(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\cos^2\lambda^3(t)\cos^2\lambda^4(t)\sin2\lambda^5(t)X^2(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\cos^2\lambda^4(t)\sin2\lambda^5(t)X^3(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\sin2\lambda^5(t)X^4(t)\frac{\mathrm{d}\lambda^4}{\mathrm{d}t}=u^3(t)$$

为了方便,记上述方程组为(3.4). 这是一个一阶非线性常微分方程组,根据常微分方程组理论,见文献[12],在给定了初始值 $X(\lambda(0))=X_0$,则局部存在满足初值的唯一解 $X(t)$. 方程组(3.4)展示了球面约束条件对飞机纵向运动控制系统的影响,也刻画了大范围考虑飞机保持稳定高度的飞行运动规律. 特别,当对系统取消这种球面约束条件,局部考虑飞机纵向飞行运动,此时,联络系数 $\Gamma_{ij}^k\equiv0,i,j,k=1,\cdots,5$. 从方程组(3.4)就可以得到通常欧氏空间下的飞机纵向运动控制系统的状态方程组.

4 飞机纵向运动控制系统的能控性和能观测性(The controllability and observability of system of airplane longitudinal motion)

为了更精确地描述飞机纵向飞行运动,在五维球面 $S^5(r)$ 的局部坐标邻域$(U,\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\varphi^5)$下,考虑状态向量场 $X(t)$ 的附属曲线 $\lambda(t)$ 为 $X(t)$ 的状态曲线,即

$$X(t)=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{5}\frac{\mathrm{d}\lambda^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\varphi^i}(\lambda(t)).$$

于是 $X^i(t)=\frac{\mathrm{d}\lambda^i}{\mathrm{d}t},i=1,\cdots,5$,将此式代入方程组(3.4)可得状态曲线 $\lambda(t)$ 满足的一个二阶非线性常微分方程组,根据常微分方程组理论,见文献[12],在给定了初值 $\lambda(0)=p,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(0)=X_0$,则局部总存在满足初值的唯一解. 由于状态曲线是状态向量场的积分曲线,所以状态曲线满足的方程组是大范围

考虑飞机保持稳定高度的飞行运动轨迹曲线所满足的方程.

状态曲线满足的方程组是非常重要的,从此方程组出发,我们可以进一步研究飞机纵向运动控制系统的平衡态与五维球面测地线之间的关系,以及具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统的局部能控性和局部能观测性,参见文献[5,6].

如果我们考虑飞机纵向运动控制系统的平衡态,即 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(X(t),u(t)) = 0$,那么,利用微分几何知识可知:此时,状态向量场 $X(t)$ 的状态曲线 $\lambda(t)$ 是五维球面 $S^5(r)$ 上的测地线,即中心在球心的大圆弧.反之,若状态曲线 $\lambda(t)$ 为球面 $S^5(r)$ 上的测地线,则沿着 $\lambda(t)$ 的切向量场 $X(t) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}$ 必为飞机纵向运动控制系统的平衡态.因此,我们可以将此结果总结为下述定理:

定理 1 具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统(3.4)的状态向量场 $X(t)$ 是系统的平衡态的充要条件是 $X(t)$ 的积分曲线是球面 $S^5(r)$ 上中心在球心的大圆弧.

另一方面,我们可以研究具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统的局部能控性和局部能观测性.利用状态曲线满足的常微分方程组解的局部存在唯一性和解对初值的连续依赖性,类似于文献[5]中定理的证明,可以得到下述定理:

定理 2 具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统(3.4)是局部能控的和局部能观测的.

值得注意的是:这里我们在整体化意义下谈到的“局部”和“坐标邻域”与通常意义下的“局部”和“坐标邻域”是有区别的,在整体化意义下的“局部”和“坐标邻域”可以是一个比较大的范围.例如球面的一个坐标邻域可以是不包括大圆的开半球.

5.结论(Conclusions)

本文,我们采用了黎曼几何方法研究了飞机保持稳定高度的大范围飞行控制系统的数学模型,将具有球面约束条件的飞机纵向运动控制系统转化为建立在五维球面上的飞机纵向运动的非线性控制系统.在球面的局部坐标系下,给出了飞机纵向运动控制系统的整体化方程.这样的方程中包含了与球面几何结构相关的联络系数项,反映了球面的几何结构对飞机纵向运动控制系统的影响.从这种整体化方程入手,我们进一步研究了飞机纵向运动控制系统的局部能控性、局部能观测性,以及系统的平衡态与五维球面测地线之间的关系.虽然,这里只研究了飞机纵向运动控制系统的数学模型,但是,这里所介绍的研究问题的方法具有广泛的适用性.

参考文献(References)

[1] Chen H F, Gao L. Some developments and perspective of modern control theory [J]. Chinese Science Bulletin, 1998,43(1): 1-7 (in Chinese)

[2] Isidori A. Nonlinear Control Systems [M]. 2nd Edition. Berlin: Springer Verlag, 1989

[3] Nijmeijer H, van der Schaft A. Nonlinear Dynamical Control Systems [M]. New York: Springer Verlag, 1990

[4] Wonham W M. Linear Multivariable Control: A Geometry Approach [M]. New York: Springer Verlag, 1979

[5] Wang H, Du Y W. Sphere, Cylindroid, Cone and Nonlinear Control Systems [J]. J. of Systems Science and Mathematical Scisence, 2001,21(2):163-171 (in Chinese)

[6] Wang H. Nonlinear control systems and geometrical structure of state space [J]. Control Theory and Applications, 2001,18(5):702-708 (in Chinese)

[7] Qian X S, Song J. Control Theory of Engineering [M]. Beijing: Science Press, 1984

[8] Xie X S. Optimal Control Theory and Applications [M]. Beijing: Qinghua University Press, 1986

[9] Etkin B. Dynamics of Atmospheric Flight [M]. Beijing: Science Press, 1979 (in Chinese)

[10] Chern S S, Chen W H. The Lecture of Differential Geometry [M]. Beijing: Beijing University Press, 1983 (in Chinese)

[11] Wu H X, Shen C L, Yu Y L. The Introduction of Riemannian Geometry [M]. Beijing: Beijing University Press, 1989 (in Chinese)

[12] Arnold V I. Ordinary Differential Equations [M]. Beijing: Science Press, 1985 (in Chinese)

本文作者简介

王 红 1962年生.1992年7月毕业于复旦大学数学研究所获理学博士学位.现为南开大学数学科学学院教授,博士生导师.主要研究方向:微分几何理论及其应用,非线性控制系统的几何理论. Email: hongwang@eyou.com

戴冠中 1937年生.现为西北工业大学自动控制系教授,博士生导师.主要研究领域为:大系统理论,智能控制,非线性控制等.

潘 泉 1961年生.西北工业大学自动控制系教授,博士生导师.主要研究领域为:随机最优估计与控制,多目标识别与跟踪,智能控制,非线性控制等.

尹国栋 1976年生.1999年毕业于西北工业大学应用数学系,获学士学位.