文章编号: 1000-8152(2002)05-0759-04

一类非匹配不确定性非线性系统的鲁棒镇定

孙 衢, 李人厚
(西安交通大学 系统工程研究所,西安 710049)

摘要: 研究了非线性系统存在非匹配不确定性时控制器的鲁棒镇定问题.基于对象的模糊动态模型,提出了一种状态反馈控制器的设计,给出控制器在建模不确定性等各种非匹配不确定性存在下仍能够镇定非线性系统的一个充分条件.仿真结果表明了设计方法的正确性.

关键词: 模糊动态模型; 非匹配不确定性; 状态反馈; 稳定性
中图分类号: TP184　　　**文献标识码**: A

Robust stabilization of nonlinear systems with unmatched uncertainties

SUN Qu, LI Ren-hou
(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: This paper investigates the robust stabilization of fuzzy model-based controllers against unmatched uncertainties. Using fuzzy dynamic model, we present a state feedback controller design method. The proposed controller can stabilize nonlinear systems with unmatched uncertainties such as modeling uncertainty under given conditions. The simulation results show the validity of the design method.

Key words: fuzzy dynamic model; unmatched uncertainties; state feedback; stability

1 引言(Introduction)

本文针对非线性连续系统存在非匹配不确定性[1~3]时给出模糊动态模型的表示方法,提出一种状态反馈控制器的设计,并利用 Lyapunov 方法对其稳定性进行分析,给出在非匹配不确定性存在下闭环模糊系统是全局渐近稳定的充分条件.在本文中,$\|\cdot\|$ 表示矩阵或向量的 2-范数, $\lambda_M(X)$ 和 $\lambda_m(X)$ 分别表示矩阵 X 的最大和最小特征值.

2 模糊自适应控制律(Fuzzy adaptive control law)

利用 T-S 模糊模型为非线性连续控制对象建立模糊动态模型,并采用标准模糊计算方法[1],可以构造全局模糊动态模型:

$$\dot{x}(t) = A(\mu(t))x(t) + B(\mu(t))u(t), \tag{1}$$

$$A(\mu(t)) = \sum_{k=1}^{m}\mu_k(t)A_k,\ B(\mu(t)) = \sum_{k=1}^{m}\mu_k(t)B_k. \tag{2}$$

被控对象的模糊动态模型,可以通过对已知复杂非线性模型分段线性化,或对未知动态系统应用聚类辨识算法得到.系统动力学方程的近似化,以及参数的时变、不确定性等因素会给系统引入不确定性[3].考虑在系统矩阵中存在非匹配不确定性,非线性对象可以表示为

$$\dot{x}(t) = A(\mu(t))x(t) + B(\mu(t))u(t) + \Delta A(x,p,t). \tag{3}$$

其中 $A(\mu(t))$ 和 $B(\mu(t))$ 如式(2)定义,$\Delta A(x,p,t)$ 是依赖于系统状态 x 和参数 p 及时间 t 的非匹配不确定性,满足

$$\Delta A(0,p,t) \equiv 0, \tag{4}$$

$$\|\Delta A(x,p,t)\| \leqslant \delta\|x\|,\ \delta \geqslant 0. \tag{5}$$

如果模糊系统(1)是局部能控的,即 (A_k, B_k) 是能控对, $k = 1,\cdots,m$, 对每一局部的线性模型设计如下形式的模糊状态反馈控制律

$$R^k:\ \text{IF } z_1 \text{ is } F_1^k \text{ AND},\cdots,\text{AND } z_p \text{ is } F_p^k,$$

$$\text{THEN } u^k(t) = -K_k x(t). \tag{6}$$

其中 K_k 表示第 k 个局部子系统的反馈增益矩阵.取整个系统的控制为起主导作用的局部模糊子系统的控制,即

$$u(t) = u^l(t),\ l = \arg\max_k\{\mu_k(z(t)), k = 1,\cdots,m\}. \tag{7}$$

收稿日期:2000-04-21; 收修改稿日期:2001-04-23.

将式(7)代入式(1)，得到未考虑不确定性的闭环全局模糊系统

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(\mu(t))x(t), \tag{8}$$

$$\bar{A}(\mu(t)) = \sum_{k=1}^{m}\mu_k(t)A_{kl},\ A_{kl} = A_k - B_kK_i. \tag{9}$$

将闭环系统划分成 m 个子区间，它满足

$$S_l = \{z(t) \mid \mu_l(z(t)) \geqslant \mu_k(z(t)), k = 1,2,\cdots,m, k \neq l\},\quad l = 1,2,\cdots,m. \tag{10}$$

在每一个子区间中模糊系统表示成

$$\dot{x}(t) = (A_{ll} + \Delta A_l)x(t), \tag{11}$$

$$\Delta A_l = \sum_{k=1}^{m}\mu_k(t)\Delta A_{kl},\ \Delta A_{kl} = A_{kl} - A_{ll}. \tag{12}$$

起主导作用的标称闭环子系统

$$\dot{x}(t) = A_{ll}x(t) \tag{13}$$

渐近稳定的充要条件是：对任意给定的正定对称矩阵 Q_l，存在唯一正定对称矩阵 P_l 满足 Lyapunov 方程

$$A_{ll}^{\mathrm{T}}P_l + P_lA_{ll} = -Q_l. \tag{14}$$

为了镇定模糊系统(3)，文献[2]在模糊状态反馈控制的基础上增加一个监督控制项，得到整个系统的控制为

$$u(t) = u_f(t) + u_s(t). \tag{15}$$

其中 $u_f(t) = u^l(t)$，如式(7)定义．如果选择监督控制具有如下形式

$$u_s(t) = \begin{cases} -\mathrm{sgn}(x^{\mathrm{T}}PB)\dfrac{(\|2P\Delta A_l+\bar{Q}\|+2\|P\|\cdot\delta\|x\|^2}{\|2x^{\mathrm{T}}PB\|}, & \|2x^{\mathrm{T}}PB\| \neq 0, \\ 0, & \|2x^{\mathrm{T}}PB\| = 0. \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$P = \sum_{k=1}^{m}P_k,\ \bar{P} = \sum_{k=1,k\neq l}^{m}P_k,\ \bar{Q}_l = A_{ll}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{P}A_{ll}. \tag{17}$$

文献[4]给出闭环模糊系统确保渐近稳定的定理．

3　模糊状态反馈控制器的鲁棒镇定(Robust stabilization of fuzzy state feedback controller)

文献[4]中，我们采用增加监督控制使系统在非匹配不确定性下具有鲁棒稳定性．然而，该监督控制项是一种高增益控制，可能会产生一些人们不期望的后果．因此，监督控制只应作为一种辅助的安全措施，而不是基本的控制策略．也就是说，只要基本的模糊状态反馈控制律(7)能镇定系统，监督控制就不起作用．

模糊动态模型可以用较少的规则表示高阶非线性系统，描述系统的动态行为达到给定的精度．显然，建模的精度要求越高，用于模糊逼近的局部线性模型需要的越多，相应的模糊规则数越多．为了将局部模型的数量控制在一个相对较少的水平，不可避免地在全局模糊模型中引进了建模误差．我们在设计基本自适应模糊控制器时忽略了这种建模不确定性；然而，当根据模糊动态模型(1)和(2)设计的控制器用于控制实际非线性对象(3)时(如图 1 所示)，建模不确定性的存在可能会导致整个闭环系统不稳定．

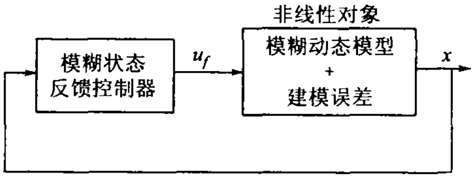

图 1　基于模糊模型的状态反馈控制系统

Fig. 1　The state feedback control system based on fuzzy model

这里，我们考虑一种特殊情况下基本的模糊状态反馈控器对建模不确定性的鲁棒镇定．为讨论方便，定义：

$$A_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}A_k,\ B_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}B_k. \tag{18}$$

如果 $\{A_0, B_0\}$ 是能控对，在设计局部线性模型的状态反馈控制器时不妨取相同的增益矩阵 K，使得闭环系统 $\bar{A} = A_0 - B_0K$ 所有极点的实部均小于负常数 $-\sigma(\sigma > 0)$，即对任意给定对称正定矩阵 Q，则存在唯一的对称正定矩阵 P 满足 Lyapunov 方程

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + 2\sigma P = -Q. \tag{19}$$

从而，在建模不确定性存在下的闭环模糊系统可以表示为

$$\dot{x} = (\bar{A} + \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Delta A_k)x + \Delta A(x), \tag{20}$$

$$\Delta A_k = A_k - B_kK - \bar{A},\ k = 1,2,\cdots,m. \tag{21}$$

其中不确定性项满足如下范数不等式

$$\|\Delta A(x)\| \leqslant \delta\|x\|,\ \delta \geqslant 0. \tag{22}$$

用 $H(X)$ 表示矩阵 X 的 Hermite 部分[5]，并定义

$$\upsilon = \max_{k=1,\cdots,m}\lambda_M(H(P\Delta A_k)). \tag{23}$$

先给出两个需要用到的不等式．P 是正定矩阵，当 $\delta > 0$ 时有

$$(\delta^{1/2}x - \delta^{-1/2}\Delta A(x))^{\mathrm{T}}P(\delta^{1/2}x - \delta^{-1/2}\Delta A(x)) \geqslant 0, \tag{24}$$

即

$$\delta x^{\mathrm{T}}Px - (\Delta A(x))^{\mathrm{T}}Px - x^{\mathrm{T}}P\Delta A(x) + \delta^{-1}(\Delta A(x))^{\mathrm{T}}P\Delta A(x) \geqslant 0, \tag{25}$$

整理得到

$$(\Delta A(x))^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\Delta A(x) \leqslant \delta x^{\mathrm{T}}Px + \delta^{-1}(\Delta A(x))^{\mathrm{T}}P\Delta A(x). \tag{26}$$

根据 Rayleigh 不等式,对任意实对称矩阵 M 有

$$\lambda_m(M)\|x\|^2 \leqslant x^{\mathrm{T}}Mx \leqslant \lambda_M(M)\|x\|^2. \tag{27}$$

定理 假设非线性受控对象可以用模糊系统(1)描述,并采用模糊动态模型(2)和(3)逼近,建模误差由式(22)给出.设计模糊状态反馈控制器(7)和(15)满足条件(19)和(20),如果以下条件成立

$$\frac{\lambda_m(Q) + 2\sigma\lambda_m(P) - 2\upsilon}{2\lambda_M(P)} > \delta, \tag{28}$$

则模糊系统(1)在状态反馈控制器作用下构成的闭环模糊系统是全局渐近稳定的.

证 选择 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ 作为闭环模糊系统的 Lyapunov 函数,沿式(21)的轨迹求 Lyapunov 函数对时间的导数,有

$$\begin{aligned}
\dot V(x) &= \dot x^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\dot x = \\
&((\bar A + \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Delta A_k)x + \Delta A(x))^{\mathrm{T}}Px + \\
&x^{\mathrm{T}}P((\bar A + \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Delta A_k)x + \Delta A(x)) = \\
&x^{\mathrm{T}}\bar A^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\bar Ax + x^{\mathrm{T}}(\sum_{k=1}^{m}\mu_k\Delta A_k)^{\mathrm{T}}Px + \\
&x^{\mathrm{T}}P(\sum_{k=1}^{m}\mu_k\Delta A_k)x + (\Delta A(x))^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\Delta A(x) = \\
&x^{\mathrm{T}}(\bar A^{\mathrm{T}}P + P\bar A)x + 2x^{\mathrm{T}}(\sum_{k=1}^{m}\mu_kP\Delta A_k)x + \\
&(\Delta A(x))^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\Delta A(x) \leqslant \\
&-x^{\mathrm{T}}Qx - 2\sigma x^{\mathrm{T}}Px + 2\sum_{k=1}^{m}\mu_kx^{\mathrm{T}}H(P\Delta A_k)x + \\
&\delta x^{\mathrm{T}}Px + \delta^{-1}(\Delta A(x))^{\mathrm{T}}P\Delta A(x).
\end{aligned}$$

再利用式(26)及 $\sum_{k=1}^{m}\mu_k = 0$, 进一步得到

$$\begin{aligned}
\dot V(x) \leqslant \\
&-\lambda_m(Q)\|x\|^2 - 2\sigma\lambda_m(P)\|x\|^2 + \\
&2\max_{k=1,\cdots,m}\lambda_M(H(P\Delta A_k))\|x\|^2 + \\
&\delta\lambda_M(P)\|x\|^2 + \delta^{-1}\lambda_M(P)\|\Delta A(x)\|^2.
\end{aligned}$$

注意到式(22)和(23),可得

$$\begin{aligned}
\dot V(x) \leqslant \\
&-\lambda_m(Q)\|x\|^2 - 2\sigma\lambda_m(P)\|x\|^2 + 2\upsilon\|x\|^2 + \\
&\delta\lambda_M(P)\|x\|^2 + \delta^{-1}\lambda_M(P)\cdot\delta^2\|x\|^2 \leqslant \\
&-(\lambda_m(Q) + 2\sigma\lambda_m(P) - 2\upsilon - 2\delta\lambda_M(P))\|x\|^2.
\end{aligned}$$

因此,在定理给出的条件下,闭环模糊系统是全局渐近稳定的. 证毕.

从上述定理中可以看出,根据模糊动态模型(1)和(2)设计的基本自适应模糊控制器用于镇定模糊系统(3),可以提供一定的稳定裕量,即能够容忍由下式给定的建模误差

$$\|\Delta A(x)\| \leqslant \frac{\lambda_m(Q) + 2\sigma\lambda_m(P) - 2\upsilon}{2\lambda_M(P)}\|x\|. \tag{29}$$

4 仿真实例(Simulations)

考虑一个典型的非线性对象——倒立摆[6],其状态方程为

$$\begin{cases}
\dot x_1 = x_2, \\
\dot x_2 = \dfrac{g\sin(x_1) - amlx_2^2\sin(x_1)\cos(x_1) - a\cos(x_1)u}{4l/3 - aml\cos^2(x_1)}, \\
\dot x_3 = x_4, \\
\dot x_4 = \\
\dfrac{-amg\sin(x_1)\cos(x_1) + 4amlx_2^2\sin(x_1)/3 + 4au/3}{4/3 - am\cos^2(x_1)}.
\end{cases} \tag{30}$$

系统参数如下:

$$a = \frac{1}{m+M},\ m = 2.0\mathrm{kg},\ M = 8.0\mathrm{kg},$$
$$2l = 1.0\mathrm{m},\ g = 9.8\mathrm{m/s^2}.$$

可以用如下 2 条规则为其建立模糊动态模型:

R^1: IF x_1 is about 0, THEN $\dot x = A_1x + B_1u$,

R^2: IF x_1 is about $\pm\pi/4$, THEN $\dot x = A_2x + B_2u$.

其中 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ 是系统状态,u 是系统输入,且

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2941 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7294 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1756 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14.3077 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.0117 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1147 \\ 0 \\ 0.1081 \end{bmatrix}.$$

规则的隶属函数为

$$\mu_1(x_1) = \frac{1 - 1/(1 + \exp(-14(x_1 - \pi/8)))}{1 + \exp(-14(x_1 + \pi/8))},$$
$$\mu_2(x_1) = 1 - \mu_1(x_1).$$

式(23)中定义的建模误差满足 $\delta = 0.02$.

采用标称矩阵 $A_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ 和 $B_0 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$,设计状态反馈控制器使闭环系统 $\bar{A} = A_0 - B_0K$ 的极点配置在[-3, -3, -3, -3],求得反馈增益矩阵为

$$K = [519.0465 \quad 135.2772 \quad 51.1500 \quad 68.2000].$$

反馈控制律 $u = -Kx$ 能够镇定模糊模型,将系统状态 x 由初始状态 $[\pi/3,0,0,0]$ 调节到平衡状态,如图2中虚线所示.在 Lyapunov 方程(20)中取 $\sigma = 3$,令 Q 为4阶单位阵,求得 P,由式(23)计算得到 $\upsilon = 0.4627$,则 $\frac{\lambda_m(Q) + 2\sigma\lambda_m(P) - 2\upsilon}{2\lambda_M(P)} = 0.0207$,满足条件(29).因此,反馈控制律 $u = -Kx$ 能够镇定考虑建模误差的实际非线性对象,仿真结果如图2中实线所示.

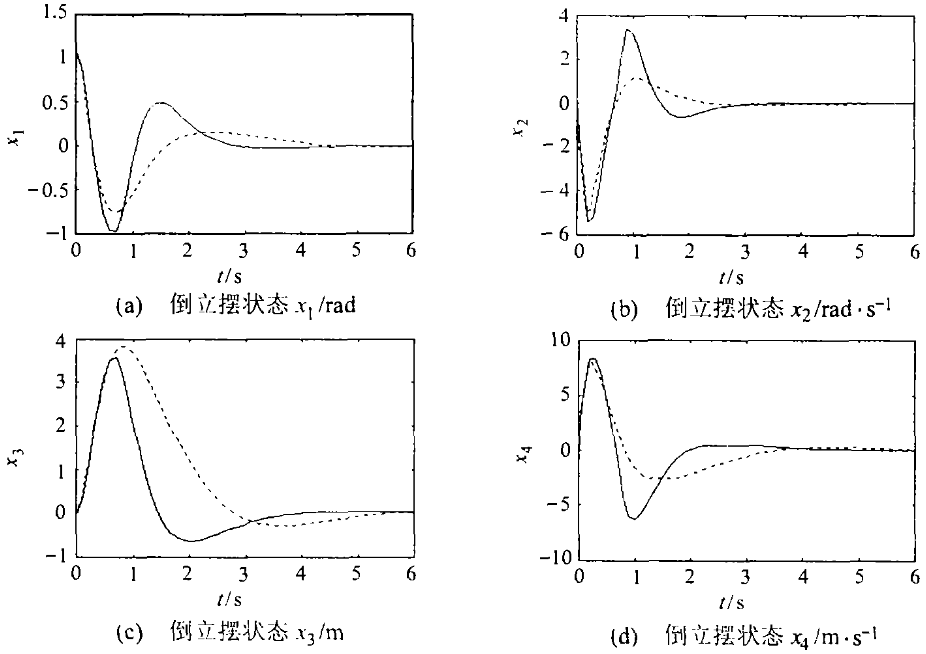

图2 仿真结果

Fig. 2 Simulation results

5 结论(Conclusion)

本文研究了基于模糊模型的控制器设计中存在的一个关键问题,即模糊设计模型是实际对象物理模型的一种近似,通常忽略了对象的高频动态特性.本文基于对象的模糊动态模型提出了一种状态反馈控制器的设计,给出了一个充分条件,使得控制器在建模不确定性等各种非匹配不确定性存在下仍能够镇定非线性系统.对倒立摆的仿真实例验证了设计方法的正确性.

参考文献(References)

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control [J]. IEEE Trans. Systems, Man, and Cybemetics, 1985, 15(1):116-132

[2] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2):135-156

[3] Gao Weibing. Variable Structure Control Theory and Application [M]. Beijing: China Scientific Technology Press, 1990

[4] Sun Qu, Li Renhou. The design of a robust adaptive fuzzy control system [J]. Control and Decision, 2000, 15(6):641-644

[5] Feng G, Cao S G, Rees N W. Design of fuzzy control systems with guaranteed stability [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 85(1):1-10

[6] Teixeira M C M, Zak S H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1999, 7(2):133-142

本文作者简介

孙 衢 1971年生.西安交通大学系统工程研究所博士生.研究领域为复杂系统的模糊控制,遗传算法,神经模糊系统在控制中的应用.

李人厚 1935年生.西安交通大学系统工程研究所教授.博士生导师.研究领域为复杂系统的智能控制,多媒体与CSCW理论与应用等. Emain: rhli@xjtu.edu.cn