

基于模型辨识的非线性连续系统的迭代学习控制

李晓东

(中山大学 电子系, 广州 510275)

摘要: 基于非线性连续动态的模型辨识算法, 给出了非线性连续系统的一种非常有效的迭代学习控制方案. 该控制方案不要求非线性连续系统中具体的非线性关系, 并且容许系统初始误差的存在.

关键词: 模型辨识; 非线性连续系统; 迭代学习控制.

中图分类号: TP273 + .22 **文献标识码:** A

Approach of iterative learning control for nonlinear continuous system based on model identification

LI Xiao-dong

(Department of Electronics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Based on the proposed algorithm for model identification, this paper presents a very efficient approach of iterative learning control (ILC) for nonlinear continuous system, in which the concrete nonlinear relation of the nonlinear continuous system is not required, and the initial error of the system is permitted.

Key words: model identification; nonlinear continuous system; iterative learning control

1 引言 (Introduction)

在控制不确定性系统方面, 迭代学习控制 (ILC) 是一种非常简单有效的方法, 引起了人们的极大兴趣^[1-4]. 目前, 传统的 ILC 控制器 (如 PID 结构的) 在应用中经常受到一些严重的限制, 往往需要较多次的迭代才能达到要求的控制精度^[1]. 另外, 在已有的 ILC 方法中, 大都要求系统的迭代初态严格等于期望初态^[1-3], 实际上这往往是不可能的^[4]. 为此, 本文将基于非线性连续动态的模型辨识, 引入一种新的 ILC 方法.

2 非线性连续动态的模型辨识算法 (An algorithm of model identification for nonlinear continuous system)

首先说明任意非线性连续系统, 当其输入为 $u(t) \in \mathbb{R}^m (t \in [0, \infty))$ 时, 相应的输出 $y(t) \in \mathbb{R}^n$ 可以被如下形式时变系统

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = -\alpha \bar{y}(t) + \sigma(W_1(t)\bar{y}(t) + W_2(t)u(t)) \quad (1)$$

的输出 $\bar{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ 近似到任何程度. 时变系统 (1) 中, $W_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $W_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是时变系数矩

阵; $\alpha > 0$ 是时间常数; σ 为连续可微的向量函数, 且满足 $0 < c < \sigma'(\cdot) < 1$. 时变系统 (1) 称为非线性动态关系 $u(t)$ 和 $y(t)$ 的辨识模型.

为了用辨识模型 (1) 的输出 $\bar{y}(t)$ 逼近非线性动态 $y(t)$, 在每一个时间点 t 上, $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 需要被实时辨识, 这里采用迭代算法, 即:

$$\begin{aligned} W_1(t, k+1) &= W_1(t, k) + \Delta W_1(t, k), \\ W_2(t, k+1) &= W_2(t, k) + \Delta W_2(t, k). \end{aligned} \quad (2)$$

在 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 的实时迭代计算过程中, 系统 (1) 的每一个变量都依赖于两个不同的动态: 连续时间 t 和迭代次数 k , 它们是相互间独立的变量. 因此, 用二维系统的表述方法, (1) 式变为

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}(t, k)}{dt} &= \\ &= -\alpha \bar{y}(t, k) + \sigma(W_1(t, k)\bar{y}(t, k) + W_2(t, k)u(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

下面我们来决定迭代算式 (2) 中的 ΔW_1 和 ΔW_2 .

令

$$e(t, k) = y(t) - \bar{y}(t, k), \quad (4)$$

在辨识模型 (3) 的系数矩阵迭代辨识过程中, 其初始条件为

$$\bar{y}(0, k) = y(0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

和随机均匀分布的 $W_1(t, 0), W_2(t, 0)$. 令

$$\eta(t, k) = \int_0^t [\bar{y}(\tau, k+1) - \bar{y}(\tau, k)] d\tau, \quad (6)$$

那么 $\eta(0, k) = 0$, 并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(t, k)}{\partial t} = & \int_0^t \frac{\partial \bar{y}(\tau, k+1)}{\partial \tau} d\tau - \int_0^t \frac{\partial \bar{y}(\tau, k)}{\partial \tau} d\tau = \\ & -\alpha \eta(t, k) + \int_0^t F(\tau, k) [W_1(\tau, k)(\bar{y}(\tau, k+1) - \bar{y}(\tau, k)) + \\ & \Delta W_1(\tau, k)\bar{y}(\tau, k+1) + \Delta W_2(\tau, k)u(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

上式中, $F(t, k) = \text{diag}(\sigma'(\xi_1), \dots, \sigma'(\xi_n))$. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ 是介于 $W_1(t, k+1)\bar{y}(t, k+1) + W_2(t, k+1)u(t)$ 和 $W_1(t, k)\bar{y}(t, k) + W_2(t, k)u(t)$ 之间的向量.

另外, 由(4)式、(6)式和(7)式得

$$e(t, k+1) - e(t, k) = -\frac{\partial \eta(t, k)}{\partial t}. \quad (8)$$

令

$$\begin{aligned} F(t, k) [W_1(t, k)(\bar{y}(t, k+1) - \bar{y}(t, k)) + \\ \Delta W_1(t, k)\bar{y}(t, k+1) + \Delta W_2(t, k)u(t)] = \\ K_1 \frac{\partial \eta(t, k)}{\partial t} + K_2 \frac{\partial e(t, k)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

其中系数矩阵 K_1, K_2 待定. 考虑到 $\eta(0, k) = 0$ 和 $e(0, k) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$, 结合(7), (8)式, 则有下面的二维线性连续-离散型 Roesser 系统^[5]

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \eta(t, k)}{\partial t} \\ e(t, k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I + K_1 & K_2 \\ \alpha I - K_1 & I - K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(t, k) \\ e(t, k) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

其中 I 是恰当维数的单位矩阵. 附录中证明了下面的定理.

定理 1 对于二维线性连续-离散型系统

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(t, k)}{\partial t} \\ y(t, k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t, k) \\ y(t, k) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

这里 $x(t, k) \in \mathbb{R}^{n_1}, y(t, k) \in \mathbb{R}^{n_2}, A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, A_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, A_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}, A_4 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$. 边界条件为 $x(0, k) = 0 (k = 1, 2, 3, \dots)$ 和 $y(t, 0), t \in [0, \infty)$. 如果矩阵 A_4 是稳定的, 那么,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x(t, k) \\ y(t, k) \end{pmatrix} = 0 \quad (t \in [0, \infty)).$$

从上面的定理及系统(10)可以看出: $\lim_{k \rightarrow \infty} e(t,$

$k) = 0$ 是仅由 K_2 决定的, 与 K_1 无关. 不妨取 $K_1 = 0$, 同时取 $K_2 = F(t, k)$, 因为 $F(t, k) = \text{diag}(\sigma'(\xi_1), \dots, \sigma'(\xi_n))$ 且 $0 < c < \sigma'(\cdot) < 1$, 所以 $F(t, k)$ 和 $I - F(t, k)$ 都是稳定的非奇异矩阵. 由(9)式可得

$$\begin{aligned} (\Delta W_1(t, k) \quad \Delta W_2(t, k)) = \\ \left(\frac{\partial e(t, k)}{\partial t} + W_1(t, k)(\bar{y}(t, k) - \bar{y}(t, k+1)) \right) \cdot \\ \left(\begin{pmatrix} \bar{y}(t, k+1) \\ u(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}(t, k+1) \\ u(t) \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{y}(t, k+1) \\ u(t) \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (12)$$

由(2)式及(12)式构成辨识模型(3)的二维实时辨识算法, 该实时辨识算法可保证在 $t \in [0, \infty)$ 上, 辨识模型(3)的输出 $\bar{y}(t)$ 任意逼近非线性动态 $y(t)$. 其过程是: 在每一个时间点 t 上, 用辨识算法迭代决定 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$, 使辨识模型(3)的输出 $\bar{y}(t)$ 逼近非线性动态 $y(t)$, 然后, 转向下一个时刻 $t + \Delta t$, 重复前面的过程, 继续辨识 $W_1(t + \Delta t)$ 和 $W_2(t + \Delta t)$.

3 非线性连续系统的 ILC 方法 (An approach of ILC for nonlinear continuous system)

基于前一部分的辨识模型及其实时辨识算法, 考虑非线性连续系统的 ILC 问题. 对于下列一般的非线性连续系统

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(y(t), u(t), t). \quad (13)$$

这里 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}^n$ 分别是系统的输入和输出向量, 具体的映射关系 F 可以是未知的. $d(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)$ 是系统可微的期望输出向量. 初始条件为 $y(0) = d(0)$.

由于非线性关系 F 和期望轨迹 $d(t)$ 形式的复杂性, 我们希望首先用两个辨识模型(1)分别对它们进行建模辨识, 使非线性系统(13)和期望轨迹 $d(t)$ 都具有模型(1)的结构形式, 在此模型基础上推导出非线性连续系统的 ILC 公式. 于是有以下的 ILC 策略:

在时间点 t 上, 任给非线性系统(13)的初始输入 $u(t)$, 记录其相应的输出 y . 用一个辨识模型及前面的辨识算法, 这种非线性动态关系可以被近似为

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = -\alpha \bar{y}(t) + \sigma(W_1(t)\bar{y}(t) + W_2(t)u(t)). \quad (14)$$

对于同样的输入 $u(t)$, 相应的期望输出 d 也可以用另一个辨识模型及辨识算法近似为

$$\frac{d\bar{d}(t)}{dt} = -\alpha \bar{d}(t) + \sigma(W_1^*(t)\bar{d}(t) + W_2^*(t)u(t)). \quad (15)$$

当辨识算法的迭代次数足够多时,近似地有

$$\bar{y}(t) = y(t), \bar{d}(t) = d(t). \quad (16)$$

在每一个时间点 t 上,一旦前面时刻的输入 u 使得 $y(t) = d(t)$,我们希望本时间点上实际输出与期望输出的变化率相等,即 $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \frac{d\bar{d}(t)}{dt}$.比较(14)和(15)式,结合(16)式,如果 W_2 的广义逆 W_2^* 存在,我们应用下面的迭代控制算法决定新的 $u(t)$.

$$u(t, l + 1) = W_2^*(t)[(W_1^*(t) - W_1(t))d(t) + W_2^*(t)u(t, l)]. \quad (17)$$

l 代表在时间 t 的迭代控制次数.对于(17)式新产生的 $u(t)$,重复式(14),(15)和(17)的过程,直至最后产生的 $u(t)$ 满足要求为止.然后转向下一个时间点重新考虑 ILC 问题.以上的过程是实时控制过程.

ILC 的思想要求的是迭代逼近的过程.本文提出的 ILC 策略包括对非线性动态的辨识算法(12)式和 ILC 控制律(17)式,(17)式是基于(12)式的,它们都是收敛逼近的过程.大量的仿真实验表明无论(12)式还是(17)式的收敛速度都是很快的,要达到要求的控制精度,(12)和(17)式都仅需要几次迭代即可.

注:1) 因为模型辨识算法(12)和 ILC 规律(17)都是按连续时间方式逐点依次向后进行的,且非线性系统(13)和期望轨迹具有初始关系 $y(0) = d(0)$,所以上述的 ILC 策略可保证非线性连续系统(13)在后续的时间间隔内跟踪期望输出.2) 当 $y(0) \neq d(0)$ 时,即系统存在固定迭代初始误差,此时以上 ILC 策略的条件遭到破坏,为了克服初始误差的影响,引入一个很小的时间参数 $h > 0$,构造系统(13)新的期望曲线

$$d^*(t) = \begin{cases} d(t) - \left(\frac{t}{h} - 1\right)^2 (d(0) - y(0)), & 0 \leq t < h, \\ d(t), & h \leq t \leq \infty, \end{cases} \quad (18)$$

如果 $d^*(t)$ 是可控的.可以验证: $d^*(0) = y(0)$; $d^*(t)$ 在整个区间 $[0, \infty)$ 上连续可微.因此我们可以应用以上的 ILC 策略实现系统(13)对轨迹 $d^*(t)$ 在整个区间 $[0, \infty)$ 上的迭代跟踪控制,也即实现了对轨迹 $d(t)$ 在区间 $[h, \infty)$ 上的迭代跟踪控制.从而解决了系统初始条件与期望输出初始条件不一致的 ILC 问题.

4 仿真举例(Simulation example)

设非线性系统 $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_1^3 + t \cdot y_2 + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 - y_2^3 + u_2 \end{cases}$ 的初

始条件为 $y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.9$.期望输出为

$$d_1(t) = 0.5t^2, d_2(t) = \frac{1}{t+1} \cdot \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \end{pmatrix},$$

系统具有迭代初始误差,应用上节给出的 ILC 策略,取 $h = 0.06$.关于 $\sigma(x)$ 的选取,本文前面的理论推导仅要求 $\sigma(x)$ 为单调连续函数且 $0 < c < \sigma'(x) \leq 1$,这里取 $\sigma(x) = 0.5x$.

当辨识模型的辨识算法被固定迭代 4 次,图 1 和图 2 分别给出了 ILC 算法(17)执行 4 次时,系统在 $[0, 1]$ 区间段上的输出 y_1, y_2 跟踪期望输出 d_1, d_2 的情况.图 3 则给出了 ILC 算法(17)被执行不同的次数时,在 $[0, 1]$ 区间段上 y_1, y_2 跟踪期望输出 d_1, d_2 的误差指标的情况,跟踪误差指标由下面的总平方误差和表示

$$\int_0^1 (y_i(t) - d_i(t))^2 dt, i = 1, 2. \quad (19)$$

由图 3 可看出:本文呈现的实时 ILC 方法的收敛速度是很快的,并且很好地解决了 ILC 系统中的迭代初始误差问题.

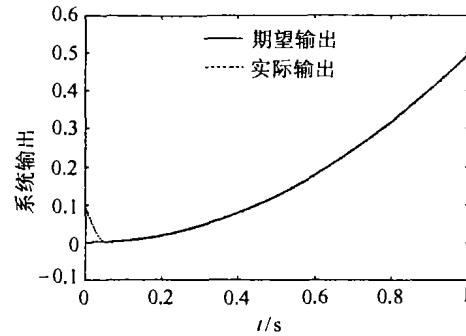


图 1 非线性系统的期望输出 d_1 及 ILC 方法的实际输出 y_1

Fig. 1 The desired output d_1 and the ILC output y_1 of a nonlinear system

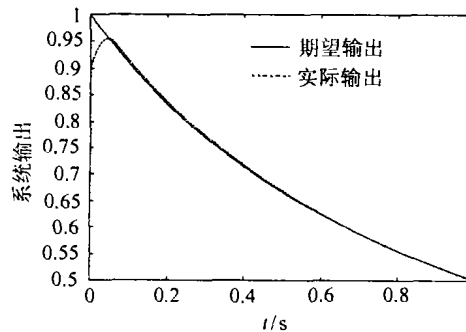


图 2 非线性系统的期望输出 d_2 及 ILC 方法的实际输出 y_2

Fig. 2 The desired output d_2 and the ILC output y_2 of a nonlinear system

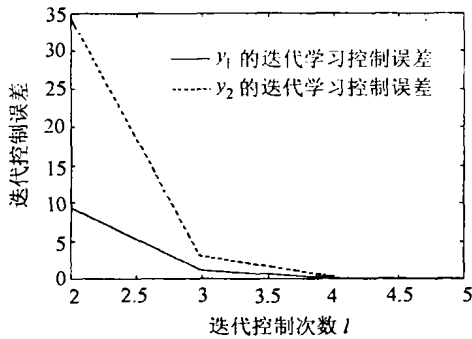


图3 各迭代次数 ILC 控制的总平方误差指标
Fig. 3 The total square errors at each iteration using the ILC approach

5 结论(Conclusion)

本文提出的基于模型辨识的非线性连续系统的 ILC 方案,实时性好,收敛速度快不要求非线性连续系统中具体的非线性关系.特别地,当非线性连续系统存在固定迭代初始误差时,此 ILC 方案可在初始时间段以外部分实现对期望轨迹的完全跟踪.

参考文献(References)

[1] Geng Z, Carroll R, Xies J. Two-dimensional model and algorithm analysis for a class of iterative learning control systems [J]. Int. J. Control, 1990,52(5):833-862

[2] Kurek J K, Zaremba M B. Iterative learning control synthesis based on 2-D system theory [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1993,38(1):121-125

[3] Sugie T, Ono T. An iterative learning control law for dynamic systems [J]. Automatica, 1991,27(4):729-732

[4] Sun Mingxuan, Huang Baojian, Zhang Xuezh. PD-type iterative learning control for a class of nonlinear systems [J]. Automation Journal, 1998,24(5):711-714(in Chinese)

[5] Kaczorek T, Stajniak A. Local reachability and minimum energy control of 2-D continuous-discrete linear systems [A]. Proc. 10th Int. Conf. Systems Engineering [C]. Coventry University, UK, 1994,558-565

附录(Appendix) 定理 1 的证明

定理 1 中系统(11)的解公式为^[5]

$$\begin{pmatrix} x(t, k) \\ y(t, k) \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_{ik} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ y(\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau + T_{0k} \begin{pmatrix} 0 \\ y(t, 0) \end{pmatrix}. \quad (A1)$$

其中状态转移阵 T_{ij} 如文献[5]中所定义,并且 $T_{10} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$.

根据文献[2], $\sum_{k=0}^{\infty} T_{ik} = h \sum_{k=0}^{\infty} T_{0k} (T_{10} \sum_{k=0}^{\infty} T_{0kh})^i$ 且 $T_{0k} = (T_{01})^k$. 如果 A_4 是稳定的,即 T_{01} 是稳定的,则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{0k} \begin{pmatrix} 0 \\ y(t, 0) \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{01})^k \begin{pmatrix} 0 \\ y(t, 0) \end{pmatrix} = 0 \quad (t \in [0, \infty)), \quad (A2)$$

且

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_{0k} = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{01})^k = (I - T_{01})^{-1}.$$

另外,考察下面的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} T_{ik} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ y(\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau = \quad (A3)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} T_{ik} \right) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ y(\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau = (I - T_{01})^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} [T_{10} (I - T_{01})^{-1}]^i \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ y(\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau. \quad (A4)$$

假设 $\sup_{0 \leq t, \tau \leq \infty} \|y(t, 0)\| \leq M < \infty, \|\cdot\|$ 代表 Euclidean 范数,则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\| [T_{10} (I - T_{01})^{-1}]^i \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ y(\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau \right\| \leq M(e^{\|T_{10} (I - T_{01})^{-1}\| t} - 1),$$

即对于所有的 $t \in [0, \infty)$,级数式(A4)绝对收敛,所以可推出级数式(A3)收敛.由级数收敛的性质

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t T_{ik} \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ y(\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau = 0 \quad (t \in [0, \infty)). \quad (A5)$$

在(A1)式中,考虑(A2)和(A5)式,得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x(t, k) \\ y(t, k) \end{pmatrix} = 0 \quad (t \in [0, \infty)).$$

本文作者简介

李晓东 1966年生,1990年在南京理工大学获自动控制专业硕士学位,现为中山大学电子系副教授.主要研究方向为人工神经网络,2-D线性系统理论,迭代学习控制等. Email: xdlx@263.net