文章编号：1000-8152(2002)05-0801-03

拟对称组合大系统的稳定性分析

李建华，李浚圣，李彦平
（沈阳大学 基础部，沈阳 110044）

摘要：给出拟对称组合大系统准解耦变换的一种方法，根据这个结果讨论了这类组合大系统的稳定性问题．这对于某些实际问题，如大型电力供应系统、多直升机吊物系统及大范围动物种群生态系统等有着重要的理论与应用价值．

关键词：组合大系统；准解耦变换；影响因子；稳定性
中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

Stability analysis for similar symmetry large-scale combined systems

LI jian-hua, LI jun-sheng, LI yan-ping
(Foundation Course Department, Shenyang University, Shenyang 110044, China)

Abstract: A semi-decoupled transform is given for similar symmetry large-scale combined systems. According to this result, the stability of the system is discussed. The conclusions in the paper are worth on some real problems such as power supply system, lifting system made up of many helicopters, animal living system and so on.

Key words: large-scale combined system; semi-decoupled transform; influence factor; stability

1 引言(Introduction)

以双机或多机提升重物为背景的对称组合大系统，在实际中有广泛的应用．张嗣瀛[1]、杨光红[2]、黄守东[3,4]等人对具有对称性结构的大系统进行过全面的研究，得到一系列结果[4]．对称性相似结构的组合大系统的研究，正在更广泛、更深入地开展[3]．本文所考虑的拟对称组合大系统是指所有子系统的内部结构相同，且子系统之间的基本关联矩阵也一致，但相互之间存在一个影响因子，此类大系统的一般描述为：

$$\dot{x}_i = Mx_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}Hx_j,\ i = 1,2,\cdots,N. \tag{1}$$

其中，x_i 为 n 维状态向量，M 为子系统的系统矩阵，H 为子系统之间的基本关联矩阵，a_{ij} 为第 j 个子系统对第 i 个子系统的影响因子．令

$$X = (x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, \cdots, x_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

则(1)式可以写成：

$$\dot{X} = \tilde{A}X. \tag{3}$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} M + a_{11}H & a_{12}H & \cdots & a_{1N}H \\ a_{21}H & M + a_{22}H & \cdots & a_{2N}H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}H & a_{N2}H & \cdots & M + a_{NN}H \end{bmatrix}_{nN}, \tag{4}$$

称(1)或(3)式表示的系统为拟对称组合大系统．由影响因子 a_{ij} 构成的矩阵记为 A，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}_N, \tag{5}$$

称 A 为拟对称组合大系统的影响因子矩阵．

2 主要结果(Main results)

本文所用符号说明如下：$\sigma(*)$ 表示矩阵 $*$ 的特征值集合；I 为 n 阶单位矩阵；$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$．

定理 1　设 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$ 为影响因子矩阵 A 的特征值，则

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(M + \omega_1 H) \cup \sigma(M + \omega_2 H) \cup \cdots \cup \sigma(M + \omega_N H).$$

证　由于 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$ 为矩阵 A 的特征值，因而存在非奇异矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为约当标准型，即

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ 0 & \omega_2 & * & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N \end{bmatrix}_N. \tag{6}$$

收稿日期：2000-07-05；收修改稿日期：2001-04-29．

记
$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}_N,$$
$$P^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \cdots & \bar{p}_{1N} \\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \cdots & \bar{p}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_{N1} & \bar{p}_{N2} & \cdots & \bar{p}_{NN} \end{bmatrix}_N.$$
由 P 构造 $\tilde{P}$ 如下：
$$\tilde{P}=\begin{bmatrix} p_{11}I & p_{12}I & \cdots & p_{1N}I \\ p_{21}I & p_{22}I & \cdots & p_{2N}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}I & p_{N2}I & \cdots & p_{NN}I \end{bmatrix}_{nN}.$$
显然 $\tilde{P}$ 可逆，且
$$\tilde{P}^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{p}_{11}I & \bar{p}_{12}I & \cdots & \bar{p}_{1N}I \\ \bar{p}_{21}I & \bar{p}_{22}I & \cdots & \bar{p}_{2N}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_{N1}I & \bar{p}_{N2}I & \cdots & \bar{p}_{NN}I \end{bmatrix}_{nN}.$$
因而有
$$\tilde{P}^{-1}\tilde{A}\tilde{P}=\begin{bmatrix} M+\omega_1 H & & & \\ 0 & M+\omega_2 H & * & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & M+\omega_N H \end{bmatrix}_{nN}. \tag{7}$$
上式为分块上三角矩阵，即主对角线下方的元素全为零矩阵，从而
$$\sigma(\tilde{A})=\sigma(M+\omega_1 H)\cup\sigma(M+\omega_2 H)\cup\cdots\cup\sigma(M+\omega_N H).$$

定理 2 拟对称组合大系统(3)渐近稳定的充要条件是每个子系统 $\dot{x}=(M+\omega_i H)x\ (i=1,2,\cdots,N)$ 均渐近稳定，其中 x 为 n 维状态向量(证明从略)．

3 例子(Examples)

例 1 考虑对称组合大系统，其系统矩阵为
$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} M & H & \cdots & H \\ H & M & \cdots & H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H & H & \cdots & M \end{bmatrix}_{nN}.$$
对应的影响因子矩阵为：
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_N.$$
其特征多项式为：
$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda+1)^{N-1}(\lambda-N+1),$$
特征值为
$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{N-1}=-1,\ \lambda_N=N-1,$$
因而
$$\sigma(\tilde{A})=\sigma(M-H)\cup\sigma(M+(N-1)H).$$

例 2 考虑反对称组合大系统，其系统矩阵为
$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} M & H & \cdots & H \\ -H & M & \cdots & H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H & -H & \cdots & M \end{bmatrix}_{nN},$$
此时对应的影响因子矩阵为
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_N,$$
其特征多项式记为：$f_N(\lambda)=\det(\lambda I-A)$，可采用如下方法计算 $f_N(\lambda)$ 的表达式．首先 $f_N(\lambda)$ 对 λ 求导，由行列式的求导法则可得：
$$f_N'(\lambda)=Nf_{N-1}(\lambda),$$
积分得 $f_N(\lambda)$ 的递推公式
$$f_N(\lambda)=\int_0^\lambda Nf_{N-1}(\lambda)d\lambda+f_N(0).$$
再由
$$f_1(\lambda)=\lambda \text{ 和 } f_N(0)=\begin{cases}0, & \text{当 } N \text{ 为奇数}, \\ 1, & \text{当 } N \text{ 为偶数},\end{cases}$$
就可逐步算出 $f_N(\lambda)$：

1) 当 $N=2$ 时，$f_2(\lambda)=\lambda^2+1$，从而
$$\sigma(\tilde{A})=\sigma(M-\mathrm{i}H)\cup\sigma(M+\mathrm{i}H).$$

2) 当 $N=3$ 时，$f_3(\lambda)=\lambda^3+3\lambda$，从而
$$\sigma(\tilde{A})=\sigma(M)\cup\sigma(M-\sqrt{3}H\mathrm{i})\cup\sigma(M+\sqrt{3}H\mathrm{i}).$$

3) 当 $N=4$ 时，$f_4(\lambda)=\lambda^4+6\lambda^2+1$，从而有
$$\sigma(\tilde{A})=$$
$$\sigma(M+\sqrt{3+2\sqrt{2}}H\mathrm{i})\cup\sigma(M-\sqrt{3+2\sqrt{2}}H\mathrm{i})\cup$$
$$\sigma(M+\sqrt{3+2\sqrt{2}}H\mathrm{i})\cup\sigma(M-\sqrt{3+2\sqrt{2}}H\mathrm{i}).$$

例 3 设拟对称组合矩阵
$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} M+6H & 4H \\ -8H & M-6H \end{bmatrix}.$$
其中 $M=\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$，$H=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$．

计算 $\sigma(\tilde{A})$．

解 这里影响因子矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$，其

特征值是 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = -2$. 由定理 1 得

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(M + 2H) \cup \sigma(M - 2H).$$

而 $M + 2H = \begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$, 且

$$\sigma(M+2H) = \left\{-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{23}\mathrm{i},\ -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{23}\mathrm{i}\right\};$$

$M - 2H = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}$, 且

$$\sigma(M-2H) = \left\{-\frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{145},\ -\frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{145}\right\}.$$

从而

$$\sigma(\tilde{A}) = \left\{-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{23}\mathrm{i},\ -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{23}\mathrm{i},\ -\frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{145},\ -\frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{145}\right\}.$$

4 结束语(Conclusion)

本文找到一种非奇异变换,得到(7)式的准解耦形式.如果拟对称组合大系统中的影响因子矩阵具有某种特性,使得它相似于对角阵,则拟对称组合大系统能够完全分块解耦,从而为分析系统带来简便.

参考文献(References)

[1] Zhang Siying. Symmetry and similarity structure of the complex control systems [J]. Control Theory and Applications, 1994,11(2):231 - 237

[2] Yang G,Zhang S. Structural properties of large-scale systems possessing similar structures [J]. Automatica, 1995,31(7):1011 - 1017

[3] Huang Shoudong, Zhang Siying. Some control problems for symmetric circulant composite systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16 (4):478 - 482

[4] Huang Tingzhu, You Zhaoyong. Generalizations of diagonally dominances and distribution of eigenvalues [J]. Cata Mathematicae Applicatae Sinica, 1998,21(2):277 - 281 (in Chinese)

[5] Huang Shoudong. The analysis and control for the complex systems with symmetric circulant structure [D]. Shenyang: Northeastern University, 1998 (in Chinese)

本文作者简介

李建华 1957 年生.1982 年毕业于沈阳机电学院应用数学专业,现为沈阳大学基础部副教授.研究方向为组合大系统理论及应用,进化计算与智能控制,系统的鲁棒性. Email: lljjhh5000@sina.com

李浚圣 1963 年生.1985 年毕业于沈阳师范学院数学专业,1994 年获工学硕士学位,现为沈阳大学自动化专业副教授.研究方向为组合大系统的结构分析,智能控制.

李彦平 1957 年生.1982 年 01 月毕业于东北大学,95 年 03 月获东北大学自动控制理论及应用专业工学博士学位,现为沈阳大学科研处处长,教授.主要研究方向为复杂系统理论及应用,计算机控制与仿真.

(上接第 800 页)

参考文献(References)

[1] Hanselmann H, Engelke A. LQG-control of a highly resonant disk drive head positioning actuator [J]. IEEE Trans. Ind. Electron., 1996,35(1):100 - 104

[2] Hasegava S. Digital servo control for head positioning of disk drive [J]. FUJITSU Sci. & Tech. J., 1999, 34(4): 378 - 390

[3] Hwang Daw-shang. An integrated control method for a hard disk drive [J]. IEEE Trans. Contr. Syst. Tech., 1998, 6(6) 216 - 224

[4] Franklin G F. Digital Control of Dynamic Systems [M]. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998

[5] Chan C Y. Discrete adaptive sliding mode tracking controller [J]. Automatica, 1997, 33:999 - 1002

[6] Astrom K J, Wittenmark B. Adaptive Control [M]. Reading, MA: Addison-Wesley, 1996

[7] Goodwin G C, Sin K S. Adaptive Filtering, Prediction and Control [M]. Engle-Wood, Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1984

本文作者简介

郭 戈 1972 年生.1994 年毕业于东北大学,1998 在东北大学获博士学位.现为甘肃工业大学副教授,主要研究方向:复杂工业过程建模与控制,智能控制理论与应用等. Email: guog@gsut.edu.cn