控制理论与应用
Control Theory & Applications

文章编号：1000-8152(2003)01-0008-05

摄动类摆系统的总体性质及鲁棒稳定性

杨 莹，黄 琳
（北京大学 力学与工程科学系 系统与控制研究中心，北京 100871）

摘要：研究了一类特殊的非线性控制系统——类摆系统在线性相关参数摄动下的总体性质及鲁棒稳定性，运用顶点检验和鲁棒严格正实性理论，得到了类摆系统在上述摄动模式下双态、Lagrange 稳定及 Bakaev 稳定的条件。结果表明对于这类系统，可以通过有限检验分析其解的总体性质及鲁棒稳定性。

关键词：参数摄动；类摆系统；双态性；Lagrange 稳定性；Bakaev 稳定性
中图分类号：OPT13　　**文献标识码**：A

Global properties and robust stability of perturbed pendulum-like systems

YANG Ying, HUANG Lin
(Research Center of Systems and Control, Mechanics and Engineering Science Department, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The global properties and robust stability of pendulumlike systems under linearly correlated parameter perturbations were studied. Based on the vertex test and robust strictly positive realness theory, sufficient conditions for dichotomy, Lagrange stability and Bakaev stability are derived for the systems in the perturbation mode. The main results show that the global properties and the robust stability of such systems can be analyzed by using the finite element test.

Key words: parameter perturbations; pendulum-like systems; dichotomy; Lagrange stability; Bakaev stability

1 引言(Introduction)

对于非线性系统来说，迄今研究得比较充分的是平衡位置的稳定性，且主要集中在单平衡点系统的稳定性上，这方面的理论已比较成熟，其中不乏有好的方法和结果[1,2]．目前流行的微分流形与微分代数方法也主要是针对单平衡点系统而言的．对于线性系统，其解的全部性质都可以在平衡点附近得到，而对于非线性系统，它与线性系统的一个重要区别就是存在多平衡态，伴随多平衡态非线性系统中的动态过程也是多种多样的，这在各种具旋转机构、摆等为部件的力学系统中更是常见．由于具多平衡点系统动态性能的复杂性，企图从一般意义下讨论非线性系统的总体特性几乎是不可能的．而一个阶次并不很高的非线性系统，随着元件参数的变化，系统就会表现出不同的渐近性质：从单平衡点的全局渐近稳定直到多平衡点、自振、混沌运动，及至一些至今尚未得到充分研究而又有意义的运动形态．对于多平衡态系统，其解的总体性质往往要比单平衡态系统复杂得多．对这类复杂运动形态的研究首先应该从具一定特征的非线性系统出发针对特定的动态性能进行研究，类摆系统就是一类具有代表性的多平衡态非线性系统．

类摆系统的特殊性表现在：它的非线性特性是以空间变量的周期函数的形式出现的．这类系统若有平衡点，必为无穷多个．对这类系统总体性质的研究，已远远超出了 Lyapunov 稳定性的研究范畴，不再简单地是对单一平衡点渐近稳定性的研究．上述这种以向量作为坐标变量的周期性，在近代工程系统中可以概括出一类系统，它涵盖了包括摆、具振动悬挂点的摆、同步电机等．当能源系统中涉及到旋转机械的特征时，常可归为这一类．随着现代工业技术及控制技术的发展，各类机电旋转装置在工业中占有越来越重要的地位，如在现代运载工具、车辆、仪表乃至电器设备中，几乎所有的运动装置都是由各种电机来进行驱动的．而在电力系统中，各类同步电机的广泛应用，也使得如何保证各种机电旋转装置

收稿日期：2001-05-28；收修改稿日期：2002-05-20.
基金项目：国家重点基础研究专项经费(G1998020302)；国家自然科学基金(10272001)资助项目.

的稳定运行日渐成为一项重要的研究课题. 目前对这类系统动态性能的研究,主要集中在系统的一些总体性质及多平衡态的稳定性上[3,4]. 然而,对于这类系统的鲁棒性能研究,目前几乎还是空白,有关系统线性部分存在不确定性时系统总体性质的鲁棒分析,至今尚未见有文献报道. 基于此点,本文运用顶点检验和鲁棒严格正实性理论,研究了类摆系统在线性相关参数摄动下的总体性质及鲁棒稳定性.

本文首先介绍了类摆系统的几个基本概念和引理,并对线性相关摄动下的类摆系统进行了描述,得到了摄动类摆系统双态性(dichotomy)、Lagrange 稳定性及 Bakaev 稳定性的条件,最后通过算例验证了结果的有效性.

2　预备知识(Preliminaries)

考虑控制系统

$$\dot{x} = Ax + bu,\ u = \varphi(t,\sigma),\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x. \tag{1}$$

若有

$$\det A = 0, \tag{2}$$

$$(\exists \Delta\in\mathbb{R})(\forall t\in\mathbb{R}_+)(\forall \sigma\in\mathbb{R}):\varphi(t,\sigma+\Delta) = \varphi(t,\sigma), \tag{3}$$

则该系统为类摆系统. 从 u 到 $-\sigma$ 的传递函数为

$$G(s) = c^{\mathrm{T}}(A - sI)^{-1}b. \tag{4}$$

若讨论频域模型,由条件(2),(4)又可写为

$$G(s) = \frac{1}{s}G_0(s).$$

其中 $G_0(s)$ 为有理函数. 以下设 φ 具约束条件

$$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall \sigma \neq 0):$$

$$-\infty \leqslant \mu_1 \leqslant \frac{\varphi(t,\sigma)}{\sigma} \leqslant \mu_2 \leqslant +\infty. \tag{5}$$

对非线性系统的一般形式

$$\dot{x} = f(x,t),$$

本文给出几个有关系统解的总体性质的概念:

· 若 $f(c,t) = 0$ 对一切 t 成立,则 $x = c$ 称为系统的平衡点.

· 解 $x(t)$ 有极限,或存在平衡点 $b \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = b$, 则称解收敛.

· 系统每一个解均收敛,则称系统是类梯度的,又称系统精确渐近.

· 系统所有有界解均收敛,则称系统是双态的.

· 系统所有解均有界,则称系统 Lagrange 稳定.

对于类摆系统(1)~(3),若

· $(\exists T > 0)(\forall t_1,t_2 > T):|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)| < \Delta$ 成立,则称系统 Bakaev 稳定.

有关上述概念的实际意义可参见文献[3].

考虑以下自治类摆系统

$$\dot{x} = Ax + bu,\ \sigma = c^{\mathrm{T}}x,\ u = \varphi(\sigma). \tag{6}$$

引理 1[3]　设系统(6)系一最小实现, A 具一零特征值和 $n-1$ 个具负实部特征值,若有

$$(\forall \omega \in \mathbb{R}):\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega G(\mathrm{j}\omega)] \neq 0,$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega G(\mathrm{j}\omega)] \neq 0,$$

则系统是双态的.

引理 2[3]　若引理 1 的条件满足,又 $\varphi(\sigma+\Delta) = \varphi(\sigma)$ 对一切 σ 成立,且有

$$\int_0^{\Delta}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0,$$

则系统(6)是类梯度的.

若对非线性约束取 $\mu_2 = \mu, \mu_1 = -\infty$, 即

$$(\forall \sigma \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathbb{R}_+):\sigma\varphi(t,\sigma) \leqslant \mu\sigma^2, \tag{7}$$

则有

引理 3[3]　设存在 $\alpha > 0$ 使系统(1),(2)和(7)有

1° $A + \alpha I$ 有 $n-1$ 个具负实部的特征值;

2° $\mathrm{Re}\,G(\mathrm{j}\omega) + \mu\,|G(\mathrm{j}\omega)|^2 \leqslant 0$.

则系统是 Lagrange 稳定的.

注 1　对于类摆系统的标准型(1),由于式(2)表明 A 不是 Hurwitz 稳定的,所以形如 $x^{\mathrm{T}}Px$ 这样的 Lyapunov 函数并不存在,必须对原系统作适当修改,才可能建立以上类似圆判据的稳定性条件.

注 2　若系统是双态的且引理 3 成立,则系统是类梯度的.

引理 4[3]　设 $c^{\mathrm{T}}b \leqslant 0$, 且存在 $\alpha > 0$ 使系统(1),(7)有

1° $A + \alpha I$ 有 $n-1$ 个特征值具负实部;

2°　$(\forall \omega \in \mathbb{R}):\Pi(\omega) = \mathrm{Re}\,G_\alpha(\mathrm{j}\omega) + \mu\,|G_\alpha(\mathrm{j}\omega)|^2 < 0$;

3° $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\omega^2\Pi(\omega) < 0$.

则系统是 Bakaev 稳定的.

注 3　Bakaev 稳定的意义在于对充分长时间以后, $\sigma(t)$ 的相对波动将不会超过 $\varphi(t,\sigma)$ 的一个周期,这样以保证其过程不会从一个平衡点附近走到另一个平衡点附近.

3　问题描述(Problem description)

研究图 1 所示 n 阶类摆系统当 $G_0(s)$ 摄动时的总体性质及鲁棒稳定性,其中 $\varphi(t,\sigma)$ 为周期函数且满足条件(7). 摄动后的 $G_0(s)$ 记为 $G_0(\Psi,\Gamma)$

$$G_0(\Psi,\Gamma) =$$

$$\left\{\frac{N(s)}{D_0(s)},\ \forall N(s) \in N(\Psi),\ \forall D_0(s) \in D_0(\Gamma)\right\},$$

$$N(\Psi)=\left\{N(s,\psi)=s^m+\sum_{i=1}^{m}b_i(\psi)s^{m-i}\mid \psi\in\Psi\right\},$$

$$D_0(\Gamma)=\left\{D_0(s,\gamma)=s^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i(\gamma)s^{n-1-i}\mid \gamma\in\Gamma\right\}.$$

其中，$a_i(\gamma),b_i(\Psi)$ 分别为 γ,ψ 的仿射函数.且

$$\Psi=\{\psi=[\psi_1,\cdots,\psi_M]^{\mathrm T}\mid \psi_i\in[\psi_i^-,\psi_i^+]\},$$

$$\Gamma=\{\gamma=[\gamma_1,\cdots,\gamma_N]^{\mathrm T}\mid \gamma_i\in[\gamma_i^-,\gamma_i^+]\}.$$

其顶点集分别为

$$\Psi^*=\{\psi=[\psi_1,\cdots,\psi_M]^{\mathrm T}\mid \psi_i\in\{\psi_i^-,\psi_i^+\}\},$$

$$\Gamma^*=\{\gamma=[\gamma_1,\cdots,\gamma_N]^{\mathrm T}\mid \gamma_i\in\{\gamma_i^-,\gamma_i^+\}\}.$$

记 $G_0(\Psi\cdot\Gamma)$ 的顶点集

$$G_0(\Psi^*,\Gamma^*)=\left\{\frac{N(s)}{D_0(s)},\forall N(s)\in N(\Psi^*),\forall D_0(s)\in D_0(\Gamma^*)\right\}.$$

系统的传递函数族为

$$G(\Psi,\Gamma)=\frac{G_0(\Psi,\Gamma)}{s}=\{\frac{N(s)}{D(s)},\forall N(s)\in N(\Psi),\forall D(s)\in D(\Gamma),D(\Gamma)=sD_0(\Gamma)\},$$

其顶点集

$$G(\Psi^*,\Gamma^*)=\frac{1}{s}G_0(\Psi^*,\Gamma^*).$$

以下记图1所示闭环摄动系统族为 $\Pi(\Psi,\Gamma)$.

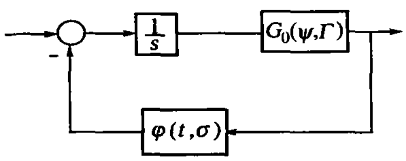

图1 具有参数摄动的类摆系统

Fig. 1 Pendulum-like system subject to parameter perturbations

4 主要结果(Main results)

首先引入几个定义与引理.

定义1 设 $G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ 是复变量 s 的有理函数，$N(s),D(s)$ 为互质多项式，$G(s)$ 称作是严格正实的，或SPR，系指：

1° $G(s)$ 在闭右半平面解析；

2° $\mathrm{Re}\,G(\mathrm j\omega)>0,\ \forall\omega\in\mathbf R$.

若2°改为 $\mathrm{Re}\,G(\mathrm j\omega)<0,\forall\omega\in\mathbf R$，则 $G(s)$ 称作是严格负实的，或SNR.

引理5[5] $G_0(\Psi^*,\Gamma^*)\subset\mathrm{SPR}\Leftrightarrow G_0(\Psi,\Gamma)\subset\mathrm{SPR}$.

系统族保持最小实现的充要条件是其传递函数族不存在零极点相消，即有：

引理6[6] $G(\Psi,\Gamma)=\{\frac{N(s)}{D(s)},\forall N(s)\in N(\Psi),\forall D(s)\in D(\Gamma)\}$ 无零极相消当且仅当

1° $D(\Gamma)$ 棱边上任一多项式与 $N(\Psi)$ 棱边上任一多项式互质；

2° 任意 $s_0\in\mathrm{CSN}$，值集 $D(\Gamma,s_0)$ 不包含原点；

3° 任意 $s_0\in\mathrm{CSD}$，值集 $N(\Psi,s_0)$ 不包含原点.

其中CSN和CSD分别为 $N(\Psi)$ 和 $D(\Gamma)$ 所有顶点多项式的根的集合.

引理7 对任意 $\lambda_i\geqslant0,i=1,\cdots,n$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，有

$$\lambda_1|a_1|^2+\cdots+\lambda_n|a_n|^2\geqslant|\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n|^2,\ a_i\in\mathbb C.$$

证 在顶点处，即 λ_i 取 $(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots.(0,\cdots,0,1)$ 上式两边相等.

令

$$\lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix},\ a=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},$$

则有

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\lambda_i}\triangleq e_i=[0\ \cdots\ 1\ \cdots\ 0]^{\mathrm T}.$$

不等式左边是 λ 的线性函数.设不等式右边的函数为 F，由

$$F=(\lambda^{\mathrm T}a)^*(\lambda^{\mathrm T}a)=a^*\lambda\lambda^{\mathrm T}a,$$

于是有

$$h_{ij}=\frac{\partial^2F}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}=a^*\left(\frac{\partial^2\lambda\lambda^{\mathrm T}}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\right)a=a^*(e_je_i^{\mathrm T}+e_ie_j^{\mathrm T})a=a_j^*a_i+a_i^*a_j=2\mathrm{Re}(a_ia_j^*),$$

则 F 的Hessen阵

$$H=2\{h_{ij}\}\mathrm{Re}(aa^*)\geqslant0.$$

因此 F 为凸函数，引理得证.

定理1 若 $G_0(0)\neq0$，则闭环系统族 $\Pi(\Psi,\Gamma)$ 类摆性不变.

若 $\Pi(\Psi,\Gamma)$ 是类摆的，则有：

定理2 设 $\varphi(t,\sigma)=\varphi(\sigma)$，$\Pi(\Psi,\Gamma)$ 在满足引理6的条件下，若有

$$G_0(\Psi^*,\Gamma^*)\subset\mathrm{SPR}(\text{或 SNR}),\tag{8}$$

则系统族是双态的.

证 由式(8)和引理5，$G_0(\Psi,\Gamma)$ 在闭右半平面解析，故 A 具一零特征值和 $n-1$ 个具负实部特征值.

由引理 1,系统为双态需满足

$$(\forall \omega \in \mathbb{R})(\forall G(s) \in G(\Psi,\Gamma)):\mathrm{Re}[j\omega G(j\omega)] \neq 0, \quad (9)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \mathrm{Re}[j\omega G(j\omega)] \neq 0. \quad (10)$$

条件(9)可改写为

$$(\forall \omega \in \mathbb{R}):\mathrm{Re}[j\omega G(j\omega)] > 0,$$

或 $$(\forall \omega \in \mathbb{R}):\mathrm{Re}[j\omega G(j\omega)] < 0,$$

即转化成检验 $G_0(\Psi,\Gamma)$ 的严格正实或严格负实问题.由引理 5 可知上式成立当且仅当

$$G(\Psi^*,\Gamma^*) \subset \mathrm{SPR} \text{ 或 } G(\Psi^*,\Gamma^*) \subset \mathrm{SNR}.$$

此时,系统传递函数 $G(s)$ 的分子分母次数最多相差 2,条件(10)显然满足.

注 4 摄动类摆系统只要满足了双态的条件,其类梯度性由非线性函数的性质保证.

由引理 3,相应有以下摄动类摆系统 Lagrange 稳定性定理.

定理 3 若存在 $\alpha > 0$ 使 $\Pi(\Psi,\Gamma)$ 有

1° $(\forall G_0(s) \in G_0(\Psi^*,\Gamma^*)):G_0(s-\alpha) \in$ SPR(或 SNR);

2° $(\forall G(s) \in G(\Psi^*,\Gamma^*))$:

$$\mathrm{Re}\,G_\alpha(j\omega) + \mu\,|\,\dot{G}_\alpha(j\omega)\,|^2 \leqslant 0. \quad (11)$$

其中 $G_\alpha(s) = G(s-\alpha)$,则系统是 Lagrange 稳定的.

证 检验引理 3 的条件 1°.即存在公共的 $\alpha > 0$,使 $A + \alpha I_n$ 有 $n-1$ 个具负实部特征值.由引理 5,若存在公共的 α,使对任意 $G_0(s) \in G_0(\Psi^*,\Gamma^*)$,$G_0(s-\alpha) \in$ SPR(或 SNR) 成立,则条件满足.

检验引理 3 的条件 2°.即对任意 $G(s) \in G(\Psi,\Gamma)$,$\mathrm{Re}\,G_\alpha(j\omega) + \mu\,|\,G_\alpha(j\omega)\,|^2 \leqslant 0$ 成立.

式(11)可写为 $\mathrm{Re}[-G_\alpha(j\omega)] - \mu\,|\,G_\alpha(j\omega)\,|^2 \geqslant 0$,即对任一 $D_j(s) \in D(\Gamma^*)$,

$$\mathrm{Re}\left[\frac{-N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right] - \mu\left|\frac{N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2 \geqslant 0,\ i = 1,\cdots,2^M.$$

故对任意 $\lambda_i \geqslant 0, i = 1,\cdots,2^M$ 且 $\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i = 1$,有

$$\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i \mathrm{Re}\left[\frac{-N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right] - \mu\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i\left|\frac{N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left[\frac{-\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right] \geqslant \mu\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i\left|\frac{N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2.$$

由引理 7

$$\mu\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i\left|\frac{N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2 \geqslant \mu\left|\frac{\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i N_{a_i}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2,$$

因此

$$\mathrm{Re}\left[\frac{-\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right] \geqslant$$

$$\mu\left|\frac{\sum_{i=1}^{2^M}\lambda_i N_{ai}(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2 = \mu\left|\frac{N_\alpha(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2,$$

即对任一 $N(s) \in N(\Psi)$,均有

$$\mathrm{Re}\left[\frac{-N_\alpha(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right] - \mu\left|\frac{N_\alpha(j\omega)}{D_{aj}(j\omega)}\right|^2 \geqslant 0.$$

上式等价于 $\dfrac{-D_{aj}(j\omega)}{N_\alpha(j\omega)}$ 位于复平面上直线 $x = \mu$ 右方.因该域是凸的,故对于任意 $G(s) \in G(\Psi,\Gamma)$,都有

$$\mathrm{Re}\,G_\alpha(j\omega) + \mu\,|\,G_\alpha(j\omega)\,|^2 \leqslant 0.$$

证毕.

定理 4 若存在 $\alpha > 0$ 使 $\Pi(\Psi,\Gamma)$ 有

1° $(\forall G_0(s) \in G_0(\Psi^*,\Gamma^*)):G_0(s-\alpha) \in$ SPR(或 SNR);

2° $(\forall G_0(s) \in G_0(\Psi^*,\Gamma^*)):\Pi(\omega) =$

$$\mathrm{Re}\,G_\alpha(j\omega) + \mu\,|\,G_\alpha(j\omega)\,|^2 < 0;$$

3° $n = m + 2$.

则系统族是 Bakaev 稳定的.

证 证明类似定理 3.

5 例子(Examples)

例 1 考虑一个具脉冲振动的同步单相电机的微分方程[3]

$$\ddot{\eta} + a\eta + \beta\cos t\cos\eta + \gamma\sin2\eta + \delta\cos2t\sin2\eta = 0.$$

其中 $a > 0$ 且 $a \in [a_-,a_+]$,β,γ,η 为常数.若设 $\sigma = \eta + \dfrac{2}{\pi}$,上式变为

$$\ddot{\sigma} + a\sigma + \varphi(t,\sigma) = 0.$$

其中

$$\varphi(t,\sigma) = \beta\cos t\sin\sigma + \gamma\sin2\sigma + \delta\cos2t\sin2\sigma$$

是 σ 的周期函数.可知 $\varphi(t,\sigma)$ 满足条件

$$\frac{\varphi(t,\sigma)}{\sigma^2} \leqslant |\beta| + 2|\gamma| + 2|\delta|.$$

系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)}.$$

当 $\alpha \in (0,a_-)$ 时定理 3 的条件 1°满足.条件 2°可写为

$$-\omega^2 + \alpha^2 - a\alpha + |\beta| + 2|\gamma| + 2|\delta| \leqslant 0,\ \forall \omega \in \mathbb{R},$$

存在 $\alpha \in (0,a_-)$ 使上式成立当且仅当

$$a_-^2 \geqslant 4(|\beta|+2|\gamma|+2|\delta|).$$

此时系统族为 Lagrange 稳定. 由定理 4, 系统族也是 Bakaev 稳定的.

又当 $\varphi(t,\sigma) = \varphi(\sigma)$ 时, 定理 2 的条件满足, 故系统族是双态的, 因此系统族是类梯度的.

例 2 一个三阶系统线性部分的模型为

$$G(s) = \frac{s+c}{s(s^2+as+b)}.$$

其中 $a,b,c > 0$ 且

$$a = -2\psi_1 - \psi_2 + 4,\ b = \psi_2 - \psi_1 + 5.6,$$
$$\psi_1 \in [-4, -3],\ \psi_2 \in [2,3],\ c \in [3,4].$$

这类系统描述了具 RC 和 RLC 滤波器的三阶锁相环系统. 显然系统族是类摆的.

1) 检验系统族的双态性.

由定理 3, 首先验证系统族无零极点相消. 经仿真计算可知

1° $D(\Gamma)$ 棱边多项式根集为 $[-8.6606, -4.3062] \cup [-2.6938, -1.3394] \cup 0$, 而 $N(\Psi)$ 棱边多项式的根集为 $[-4, -3]$, 故引理 5 的条件 1° 满足.

2° $s_0 = -4$ 时, 值集 $D(\Gamma, -4)$ 为 $[1.6, 49.6]$; $s_0 = -3$ 时, 值集 $D(\Gamma, -3)$ 为 $[1.2, 28.2]$, 故条件 2° 满足.

3° $D(\Gamma^*)$ 9 个根对应的值集 $N(\Psi, s_0)$ 分别为

$[1.6606, 2.6606]$, $[-5.6606, -4.6606]$,
$[1.2659, 2.2659]$, $[-4.2659, -3.2659]$,
$[1.3238, 2.3238]$, $[-3.3238, -2.3238]$,
$[0.3062, 1.3062]$, $[-1.3062, -0.3062]$,
$[-4, -3]$,

故条件 3°也满足.

又 $G_0(s)$ 的 8 个顶点系统为

$$G_{01}(s) = \frac{s+3}{s^2+10s+11.6},\quad G_{02}(s) = \frac{s+3}{s^2+9s+12.6},$$
$$G_{03}(s) = \frac{s+3}{s^2+8s+10.6},\quad G_{04}(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+11.6},$$
$$G_{05}(s) = \frac{s+4}{s^2+10s+11.6},\quad G_{06}(s) = \frac{s+4}{s^2+9s+12.6},$$
$$G_{07}(s) = \frac{s+4}{s^2+8s+10.6},\quad G_{08}(s) = \frac{s+4}{s^2+7s+11.6},$$

可以验证上述 8 个系统均严格正实, 故系统族是双态的.

2) 验证系统族的 Lagrange 稳定性和 Bakaev 稳定性.

由于

$$G_0(s-\alpha) = \frac{s-\alpha+c}{(s-\alpha)^2 + a(s-\alpha) + b},$$

可以验证当 $\alpha = 1$ 时, 对应 $G_0(s-\alpha)$ 的 8 个顶点系统均严格正实.

计算 $\alpha = 1$ 时系统族为 Lagrange 稳定 μ 的取值范围. 可知使式(11)成立 $G_a(s-\alpha)$ 8个顶点系统对应的 μ 分别为

$$\mu_1 \leqslant 0.3,\ \mu_2 \leqslant 1.3,\ \mu_3 \leqslant 0.8,\ \mu_4 = 1.8,$$
$$\mu_5 \leqslant 0.2,\ \mu_6 \leqslant 0.8667,\ \mu_7 \leqslant 0.5333,\ \mu_8 = 1.2,$$

则 $\alpha = 1, \mu \leqslant 0.2$ 时系统族 Lagrange 稳定, 这也是系统族为类梯度的一个充分条件. $\alpha = 1, \mu < 0.2$ 时系统族 Bakeav 稳定.

6 结论(Conclusion)

研究类摆系统在摄动情况下的总体性质及鲁棒稳定性具有重要的工程意义. 本文给出了具类摆性的参数摄动 Lur'e 系统双态性、Lgrange 稳定性和 Bakaev 稳定性的充分条件, 并通过算例进行了验证, 结果表明对于线性部分存在线性相关参数摄动的类摆系统, 可以通过有限检验对其总体性质进行鲁棒性分析.

参考文献(References):

[1] POPOV V. Absolute stability of non-linear systems of automatic control [J]. *Automation and Remote Control*, 1961, 22: 857 - 875.

[2] VIDYASAGAR M. *Nonlinear System Analysis* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

[3] LEONOV G A, PONOMARENKO D V, SMIRNOVA V B. *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis* [M]. Singapore: World Scientific, 1996.

[4] LEONOV G A, SMIRNOVA V B. Stability and oscillations of solutions of integro-differential equations of pendulum-like systems [J]. *Mathematische Nachrichten*, 1996, 177: 157 - 181.

[5] WANG Long, HUANG Lin. Performance robustness of a class of systems with multilinearly correlated perturbations [J]. *Science in China (Series A)*, 1995, 25(8): 875 - 882 (in Chinese).

[6] CHOCKALINGAM G, DASGUPTA S. Minimality, stabilizability and strong stabilizability of uncertain plants [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1651 - 1661.

作者简介:

杨 莹 (1973 —), 女, 北京大学力学与工程科学系系统与控制研究中心在读博士生. 主要研究方向为稳定性理论与应用, 鲁棒控制, 非线性系统控制理论. Email: yy@water.pku.edu.cn;

黄 琳 (1935 —), 男, 1957 年和 1961 年于北京大学数学力学系本科及研究生毕业, 现为北京大学力学与工程科学系系统与控制研究中心教授, 博士生导师. 主要研究方向为稳定性理论与应用, 鲁棒控制, 具柔性结构系统的控制, 复杂控制系统理论和相关的应用数学问题.