

## 广义区间系统的稳定性与二次能稳分析

苏晓明, 张庆灵

(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110006)

**摘要:** 对于一类广义区间系统, 利用 Lyapunov 方法, 研究了该系统的稳定性. 通过广义 Lyapunov 不等式的建立, 得到了此系统结构稳定的充分必要条件是广义 Lyapunov 不等式有解. 在此基础上, 建立了广义 Riccati 不等式, 由此不等式得到了此系统二次能稳的充要条件是广义 Riccati 不等式有解. 这些结果将对进一步研究此系统有着重要的基础作用. 最后, 举例说明了主要结果.

**关键词:** 广义区间系统; Lyapunov 方法; 结构稳定; 二次能稳

**中图分类号:** TP13

**文献标识码:** A

## On stability and quadratic stabilization of singular interval systems

SU Xiao-ming, ZHANG Qing-ling

(College of Science, Northeastern University, Liaoning Shenyang 110006, China)

**Abstract:** The stability problem for a class of singular interval systems is considered. Through the establishment of a generalized Lyapunov inequality, a necessary and sufficient condition is derived for the systems to be structurally stable. The condition is that the generalized Lyapunov inequality has solutions. Then, another generalized Riccati inequality is founded. From the inequality, a necessary and sufficient condition for the systems to be quadratically stabilizable is established. The condition is that the generalized Riccati inequality has solutions. Two numerical examples are presented to illustrate the results.

**Key words:** singular interval system; Lyapunov method; structural stability; quadratic stabilization

### 1 引言 (Introduction)

Lyapunov 方法在控制系统的研究中起着非常重要的作用, 并且已经成为研究正常系统成熟的方法. 近年来, 很多研究者正试图将这种方法推广到广义系统中. 由于广义系统具有一些特殊的性质, 例如正则性、脉冲性等, 因此 Lyapunov 方法的形式是多种多样的. Lewis<sup>[1]</sup>给出了第一个研究广义系统的 Lyapunov 方程, 紧接着 Takaba 等人<sup>[2]</sup>把这一结果进一步推广, 使其形式更接近于正常系统的 Lyapunov 方程. 张庆灵<sup>[3]</sup>利用 Lyapunov 方程研究了广义系统的结构稳定性. Masubuchi et al<sup>[4]</sup>提出了 Lyapunov 不等式, 并用来研究  $H_\infty$  控制问题. 但是, 上述这些方法只是用来处理定常的广义系统, 而研究广义区间系统和广义不确定系统的结果却很少. 徐胜元、杨成梧<sup>[5]</sup>利用测度理论和巧妙的数学方法, 得到了广义区间系统正则、无脉冲和稳定的充分条件. Lin et al<sup>[6]</sup>利用范数界给出了广义区间系统的结构稳定性的充要条件, 这一结果无论是理论上的解析表达式

还是实际上的应用都是比较复杂的. 然而, 上述工作都没有讨论广义区间系统的二次稳定问题.

众所周知, Lyapunov 不等式是研究广义系统的有利工具, 它可用来解决稳定、二次稳定和  $H_\infty$  控制等问题. 然而, 至今还没有人用它来解决广义区间系统的稳定和二次稳定问题. 为此本文用 Lyapunov 方法讨论了一类广义区间系统的稳定性和二次能稳定问题. 首先将广义区间系统化为一类广义不确定系统, 利用该类系统得到了广义区间系统结构稳定和二次能稳定的充要条件; 最后利用文[6]的例子说明了本文的结果.

### 2 系统描述与定义 (Description of systems and definitions)

**定义 1** 设  $A^m = [a_{ij}^m] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A^M = [a_{ij}^M] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 如果

$$[A^m, A^M] = \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij}^m \leq a_{ij} \leq a_{ij}^M, \\ i, j = 1, 2, \dots, n\},$$

则称  $[A^m, A^M]$  为区间矩阵.

考虑如下的广义区间系统

$$E\dot{x} = \bar{A}x. \quad (1)$$

其中,  $x \in \mathbb{R}^n$  是系统的状态变量;  $\bar{A} \in [A^m, A^M]$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{rank}(E) = r \leq n$ .

对于广义区间系统(1), 如果存在常数  $s \in \mathbb{C}$ , 使得  $\det(sE - \bar{A}) \neq 0$ , 则称广义区间系统(1)是正则的. 如果  $\det(sE - \bar{A}) = 0$  的所有有限零点的实部小于零, 则称广义区间系统(1)是稳定的. 如果  $\deg \det(sE - \bar{A}) = r$ , 则称广义区间系统(1)是无脉冲的.

**引理 1** 设  $\bar{A} \in [A^m, A^M]$ ,  $A = \frac{1}{2}(A^M + A^m)$   $= [a_{ij}]_{n \times n}$ ,  $H = \frac{1}{2}(A^M - A^m) = [h_{ij}]_{n \times n}$ , 则  $\bar{A} = A + M\Delta N$ , 其中

$$M = [\sqrt{h_{11}}e_1, \sqrt{h_{12}}e_1, \dots, \sqrt{h_{1n}}e_1, \sqrt{h_{21}}e_2, \sqrt{h_{22}}e_2, \dots, \sqrt{h_{2n}}e_2, \dots, \sqrt{h_{n1}}e_n, \sqrt{h_{n2}}e_n, \dots, \sqrt{h_{nn}}e_n]_{n \times n^2},$$

$$N = [\sqrt{h_{11}}e_1, \sqrt{h_{12}}e_2, \dots, \sqrt{h_{1n}}e_n, \sqrt{h_{21}}e_1, \sqrt{h_{22}}e_2, \dots, \sqrt{h_{2n}}e_n, \dots, \sqrt{h_{n1}}e_1, \sqrt{h_{n2}}e_2, \dots, \sqrt{h_{nn}}e_n]_{n^2 \times n},$$

$$\Delta = \text{diag}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{1n}, \dots, \epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}, \dots, \epsilon_{nn}),$$

且对于  $\forall i, j (1 \leq i, j \leq n)$ , 有  $|\epsilon_{ij}| \leq 1$ .

只要将  $\bar{A} = [\bar{a}_{n \times n}]$  中元素表示成  $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + \epsilon_{ij}h_{ij}$ ,  $|\epsilon_{ij}| \leq 1$ , 就可以容易地得到引理的证明.

由引理 1 知, 广义区间系统(1)可以表示成下述不确定广义系统

$$E\dot{x} = (A + M\Delta N)x, \quad (2)$$

$$\Delta^T \Delta \leq I.$$

### 3 结构稳定性 (Structural stability)

对于广义区间系统(1), 如果广义系统  $(E, \bar{A})$  是稳定的, 且存在  $\bar{A}$  的一个邻域, 使得在该邻域内, 对于任意扰动  $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 广义系统  $(E, \bar{A} + \Delta)$  也是稳定的, 则称广义区间系统(1)是结构稳定的.

下面讨论广义区间系统(1)的结构稳定性, 为此给出以下引理:

**引理 2**<sup>[1]</sup> 系统  $E\dot{x} = Ax$  是结构稳定的充分必要条件为  $\lambda(E, A) \subset \mathbb{C}^-$ , 且  $\deg \det(sE - A) = \text{rank}(E)$ , 其中  $\lambda(E, A)$  表示  $(E, A)$  的特征值.

**引理 3**<sup>[7]</sup> 对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \{(x^T V^T M \Delta N x)^2 \mid \Delta^T \Delta \leq I\} =$$

$$x^T V^T M M^T V x x^T N^T N x.$$

**引理 4**<sup>[7]</sup> 设  $X, Y, Z$  为给定的具有相容维数

的矩阵, 满足  $X \geq 0, Y < 0, Z \geq 0$ , 并假设对任意的非零向量  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$(\alpha^T Y \alpha)^2 - 4(\alpha^T X \alpha \alpha^T Z \alpha) > 0$$

成立, 则存在常数  $\lambda > 0$  满足

$$\lambda^2 X + \lambda Y + Z < 0.$$

**定理 1** 广义区间系统(1)是结构稳定的充分必要条件为存在矩阵  $V$  满足

$$A^T V + V^T A + V^T M M^T V + N^T N < 0, \quad (3)$$

$$E^T V = V^T E \geq 0.$$

**证** 广义区间系统(1)是结构稳定的, 它等价于广义不确定性系统(2)是允许的<sup>[4]</sup>, 即下述 Lyapunov 不等式有解

$$(A + M\Delta N)^T V + V^T (A + M\Delta N) < 0, \quad (4)$$

$$E^T V = V^T E \geq 0.$$

**必要性.** 设广义区间系统(1)是结构稳定的, 则存在  $V_1$  使得

$$(A + M\Delta N)^T V_1 + V_1^T (A + M\Delta N) < 0,$$

$$E^T V_1 = V_1^T E \geq 0,$$

即

$$A^T V_1 + V_1^T A + N^T \Delta^T M^T V_1 + V_1^T M \Delta N < 0,$$

$$\forall \Delta^T \Delta \leq I,$$

从而

$$[x^T (A^T V_1 + V_1^T A) x]^2 \geq$$

$$4 \max \{(x^T V_1^T M \Delta N x)^2 \mid \Delta^T \Delta \leq I\}.$$

由引理 3 知

$$\max \{(x^T V_1^T M \Delta N x)^2 \mid \Delta^T \Delta \leq I\} =$$

$$x^T V_1^T M M^T V_1 x x^T N^T N x.$$

再由引理 4 得, 存在常数  $\lambda > 0$  使得

$$\lambda^2 (V_1^T M M^T V_1) + \lambda (A^T V_1 + V_1^T A) + N^T N < 0.$$

取  $V = \lambda V_1$ , 则  $V$  是不等式(3)的解.

**充分性.** 假设不等式(3)有解, 由于

$$(A + M\Delta N)^T V + V^T (A + M\Delta N) \leq$$

$$A^T V + V^T A + (\Delta N)^T (\Delta N) + (M^T V)^T M^T V \leq$$

$$A^T V + V^T A + N^T N + V^T M M^T V < 0,$$

$$E^T V = V^T E \geq 0,$$

因此广义区间系统(1)是结构稳定的.

Lin 等人<sup>[6]</sup>利用若干个 Lyapunov 方程的解及范数界给出了广义区间系统(1)结构稳定的充要条件, 而定理 1 只需找到一个广义 LMI 的解就可以判别该系统的结构稳定性, 这不但应用方便, 而且大大地简化了计算.

### 4 二次能稳定性(Quadratic stabilization)

这一节将讨论下面广义区间系统的二次能稳定性问题

$$E\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u. \quad (5)$$

$u \in \mathbb{R}^m$  是系统的控制输入,  $\bar{A} \in [A^m, A^M], \bar{B} \in [B^m, B^M], E \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{rank}(E) = r \leq n$ .

由引理 1 知广义区间系统(5)可写成下述广义不确定系统形式

$$E\dot{x} = (A + M\Delta N)x + (B + G\Sigma F)u,$$

$$\Delta^T \Delta \leq I, \Sigma^T \Sigma \leq I.$$

定义 2 广义区间系统(5)被称为二次能稳的, 如果存在状态反馈  $u = Kx$  使闭环系统

$$E\dot{x} = (A + BK)x + (M\Delta N + G\Sigma FK)x \quad (6)$$

是允许的. 其中,  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是反馈矩阵. 从而有

定理 2 广义区间系统(5)是二次能稳的充分必要条件为存在矩阵  $V$  及实数  $\epsilon > 0$ , 使得

$$A^T V + V^T A + V^T (MM^T + GG^T) V + N^T N - \epsilon^2 V^T B (I + \epsilon F^T F)^{-1} B^T V < 0, \quad (7)$$

$$E^T V = V^T E \geq 0, \quad (8)$$

并且当式(7)和式(8)成立时, 所做的状态反馈为

$$u = -\epsilon^2 (I + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B^T Vx.$$

证 必要性. 假设广义区间系统(5)是二次能稳的, 则存在状态反馈  $u = Kx$  使广义区间系统(6)是允许的.

由定理 1 知, 存在矩阵  $V$ , 满足下述不等式

$$(A + BK)^T V + V^T (A + BK) + V^T [M \ G] [M \ G]^T V + \begin{bmatrix} N \\ FK \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N \\ FK \end{bmatrix} < 0,$$

$$E^T V = V^T E \geq 0.$$

从而, 存在  $\epsilon > 0$ , 使

$$A^T V + V^T A + V^T (MM^T + GG^T) V + N^T N + K^T B^T V + V^T BK + \frac{1}{\epsilon^2} K^T (I + \epsilon^2 F^T F) K < 0.$$

令  $Q = (I + \epsilon^2 F^T F) > 0$ , 则有

$$A^T V + V^T A + V^T (MM^T + GG^T) V + N^T N - \epsilon^2 V^T B (I + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B^T V + (\frac{1}{\epsilon} Q^{\frac{1}{2}} K + \epsilon Q^{-\frac{1}{2}} B^T V)^T (\frac{1}{\epsilon} Q^{\frac{1}{2}} K + \epsilon Q^{-\frac{1}{2}} B^T V) < 0,$$

所以有

$$A^T V + V^T A + V^T (MM^T + GG^T) V + N^T N - \epsilon^2 V^T B (I + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B^T V < 0.$$

充分性. 由于

$$(A + BK)^T V + V^T (A + BK) +$$

$$V^T [M \ G] [M \ G]^T V + \begin{bmatrix} N \\ FK \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N \\ FK \end{bmatrix} \leq (A + BK)^T V + V^T (A + BK) + V^T [M \ G] [M \ G]^T V + \begin{bmatrix} N \\ FK \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N \\ FK \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon^2} K^T K = A^T V + V^T A + V^T (MM^T + GG^T) V + N^T N - \epsilon^2 V^T B (I + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B^T V + (\frac{1}{\epsilon} Q^{\frac{1}{2}} K + \epsilon Q^{-\frac{1}{2}} B^T V)^T (\frac{1}{\epsilon} Q^{\frac{1}{2}} K + \epsilon Q^{-\frac{1}{2}} B^T V). \quad (9)$$

取  $K = -\epsilon^2 (I + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B^T V$ , 这时式(9)可化为不等式(7), 因此, 广义区间系统(5)是二次能稳的.

### 5 例子(Examples)

这一节我们将用文[6]的例子来验证本文的主要结果. 比较两篇文章可以看出, 本文的结果简单, 应用方便.

例 1<sup>[6]</sup> 对于广义区间系统(1), 设

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} \in \begin{bmatrix} -3 \pm 0.5 & -4 \pm 0.5 & 1.5 \pm 0.5 \\ 2 \pm 0.5 & -3 \pm 0.5 & 0 \pm 0.5 \\ 0 \pm 0.5 & 0 \pm 0.5 & 5 \pm 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank}(E) = 2 < 3.$$

文[6]利用有限覆盖定理及范数界, 验证了该系统是结构稳定的. 由引理 1, 容易计算出广义不确定系统的系统矩阵为

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3+0.5\epsilon_{11} & -4+0.5\epsilon_{12} & 1.5+0.5\epsilon_{13} \\ 2+0.5\epsilon_{21} & -3+0.5\epsilon_{22} & 0.5\epsilon_{23} \\ 0.5\epsilon_{31} & 0.5\epsilon_{32} & 5+0.5\epsilon_{33} \end{bmatrix} \right).$$

这里,  $\Delta = \text{diag}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33})$ .

经计算知, 不等式(3)的解为

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

例 2 对于广义区间系统(1), 设

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ \bar{A} \in \begin{bmatrix} -2 \pm 0.5 & 0 \pm 0.5 & 0 \pm 0.5 \\ 0 \pm 0.5 & -2 \pm 0.5 & 0 \pm 0.5 \\ 0 \pm 0.5 & 0 \pm 0.5 & 0 \pm 0.5 \end{bmatrix}, \end{array} \right. \quad (10)$$

所对应的广义不确定系统的系统矩阵为

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2+0.5\epsilon_{11} & 0.5\epsilon_{12} & 0.5\epsilon_{13} \\ 0.5\epsilon_{21} & -2+0.5\epsilon_{22} & 0.5\epsilon_{23} \\ 0.5\epsilon_{31} & 0.5\epsilon_{32} & 0.5\epsilon_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right). \quad (11)$$

容易验证,当不考虑扰动时,标称系统  $(E, A, B)$  不是正则的,从而广义区间系统  $(E, \bar{A}, \bar{B})$  不是结构稳定的.为此,作状态反馈  $u = [0 \ 0 \ -4]x, \epsilon = 1$ , 则与广义不确定系统(10)构成了闭环系统.

$$\text{经计算知, } V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 是闭环系统对应的}$$

不等式(7), (8)的解,根据定理2,广义区间系统(10)二次能稳.

又经计算知闭环系统对应的不等式  $(A + M\Delta N + BK)^T V + V^T(A + M\Delta N + BK) < 0$ , 再根据定义2, 闭环系统是二次稳定的,即广义区间系统(10)二次能稳.

## 6 结论(Conclusion)

本文考虑一类广义区间系统的稳定性.首先将广义区间系统化为一类广义不确定系统,利用广义LMI方法得到了广义区间系统结构稳定的充要条件;接下来利用Lyapunov方法进一步研究了该类系统二次能稳定性;最后利用文[6]的例子说明了本文的结果.从本文与文[6]的比较来看,本文的结论简单,应用方便.

## 参考文献(References):

- [1] LEWIS F L. A survey of linear singular systems [J]. *Circuits, Systems and Systems Processing*, 1986, 5(1): 3 - 36.
- [2] TAKABA K, MORRIHIRA N. A generalized Lyapunov theorem for descriptor systems [J]. *IEE Proc-Control Theory and Applications*, 1995, 24(1): 49 - 51.
- [3] ZHANG Qingling. *Decentralized Control and Robust Control for Singular Systems* [M]. Xi'an: Northwest University Press, 1997, 83 - 115 (in Chinese).
- [4] MASUBUCHI I, KAMITANE Y.  $H_\infty$  control for descriptor systems: a matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669 - 673.
- [5] XU Shengyuan, YANG Chengwu. On stability analysis and quadratic stabilization of singular interval systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(2): 249 - 250 (in Chinese).
- [6] LIN Chong, WANG Jianliang. Technical note robust structural stability of linear interval descriptor systems [J]. *Int J of System Science*, 1999, 30(12): 1325 - 1329.
- [7] GARCIA G, BERNUSSOU J, ARZELIER D. Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. *Systems & Control Letters*, 1994, 22(5): 327 - 339.

## 作者简介:

苏晓明 (1964—),男,沈阳工业大学副教授,东北大学博士研究生.主要感兴趣的研究领域包括广义区间系统及广义周期系统.  
Email: Xiaomingsu@etang.com;

张庆灵 (1956—),男,东北大学理学院院长,教授,博士生导师.主要研究领域:广义系统的控制理论及应用.

(上接第16页)

1992, 28(1): 51 - 62.

- [6] BEZICK S, RUSNAK I, GRAY W S. Guidance of a homing missile via nonlinear geometric control methods [J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, 18(3): 441 - 448.
- [7] GUO C Y, CHIOU Y C. Geometric analysis of missile guidance command [J]. *IEE Proc-Control Theory and Applications*, 2000, 147(2): 205 - 211.
- [8] ZHOU Di, MU Chundi, XU Wenli. Adaptive sliding-mode guidance of a homing missile [J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999, 22(4): 589 - 594.
- [9] STRUIK D J. *Lectures on Classical Differential Geometry* [M]. New York: Dover, 1988, 10 - 20.
- [10] POLYCARPOU M M. Stable adaptive neural network control scheme for nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 447 - 451.

## 作者简介:

张友安 (1963—),男,飞行器设计专业博士,现为山东烟台海军航空工程学院飞行器控制系统研究所副所长,副教授.研究方向为:非线性控制,鲁棒控制,神经网络控制,飞行器制导与控制.在《航空学报》、《宇航学报》、《控制理论与应用》和《控制与决策》等重要刊物及重要国际会议(IFAC,全球智能控制会议等)发表论文40余篇.  
Email: zhangya63@sina.com;

胡云安 (1966—),男,在职博士生,现为山东烟台海军航空工程学院301教研室教授.2000年9月至2001年9月在美国UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANDIEGO做访问学者.研究方向为神经控制,变结构控制,非线性控制,飞行器制导与控制;

林涛 (1968—),男,山东烟台海军航空工程学院硕士,现为山东烟台海军航空工程学院301教研室讲师.研究方向为飞行器制导与控制.