

# 基于 RBF 神经网络的一类不确定非线性系统自适应 $H_\infty$ 控制

陈 谋, 姜长生, 吴庆宪, 曹邦武  
(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

**摘要:** 基于 RBF 神经网络提出了一种  $H_\infty$  自适应控制方法. 控制器由等效控制器和  $H_\infty$  控制器两部分组成. 用 RBF 神经网络逼近非线性函数, 并把逼近误差引入到网络权值的自适应律中用以改善系统的动态性能.  $H_\infty$  控制器用于减弱外部干扰及神经网络的逼近误差对跟踪的影响. 所设计的控制器不仅保证了闭环系统的稳定性, 而且使外部干扰及神经网络的逼近误差对跟踪的影响减小到给定的性能指标. 最后给出的算例验证了该方法的有效性.

**关键词:** 神经网络; 非线性系统; 自适应控制;  $H_\infty$  控制  
**中图分类号:** TP273.2      **文献标识码:** A

## Adaptive $H_\infty$ control of a class of uncertain nonlinear systems based on RBF neural networks

CHEN Mou, JIANG Chang-sheng, WU Qing-xian, CAO Bang-wu

(Automation College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu Nanjing 210016, China)

**Abstract:** An adaptive  $H_\infty$  control method based on RBF neural network is proposed for uncertain nonlinear systems. The controller consists of an equivalent controller and an  $H_\infty$  controller. The RBF neural networks are used to approximate the nonlinear functions, and the approximation errors of the neural networks are introduced to the adaptive law in order to improve the quality of the systems.  $H_\infty$  controller is designed to attenuate external disturbance and approximation errors of the neural networks. The controller can guarantee stability of the overall system and attenuate the effect of the external disturbance and approximation errors of the neural networks to a prescribed level. Finally, an example is given to illustrate the availability of this method.

**Key words:** neural networks; nonlinear systems; adaptive control;  $H_\infty$  control

### 1 引言 (Introduction)

目前, 非线性不确定系统的研究已有不少的研究成果, 特别是将神经网络广泛地应用运用于控制非线性系统, 并已提出了多种的控制方法<sup>[1~6]</sup>. 但大部分研究成果针对单输入单输出非线性系统, 对实际大量存在的多输入多输出非线性系统研究较少. 因此对多输入多输出不确定非线性系统的控制方法的研究<sup>[1,7]</sup>具有重要意义.

文[7]研究了多输入多输出非线性系统基于模糊思想的自适应  $H_\infty$  控制, 但自适应周期长, 系统动态性能欠佳. 文[1]研究了基于前向网络对多输入多输出非线性系统提出了一种稳定的控制方法, 但未考虑系统的外界不确定性以及建模误差, 控制器缺少抗干扰和抵消网络建模误差的能力. 文[6]研究了基于 RBF 神经网络的单输入单输出非线性系统的自适应  $H_\infty$  控制. 本文结合 RBF 神经网络逼近方法、

自适应控制以及  $H_\infty$  控制, 针对多输入多输出不确定非线性系统提出了一种新的控制方法. 该方法考虑了对网络逼近误差和外界干扰形成的复合干扰的控制, 同时把网络逼近误差引入到网络权值的自适应律中以改善系统的暂态性能. 所设计的控制器不仅可保证闭环控制系统稳定, 而且通过引入  $H_\infty$  控制使跟踪误差满足给定的性能指标. 通过仿真研究表明了本文控制方法的有效性.

### 2 问题的提法 (Problem statement)

考虑如下形式的仿射不确定非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x) + \beta(x)u + \gamma(x), \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha(x) = [\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)]^T \in \mathbb{R}^n$  为光滑的非线性向量函数,  $\beta(x) = [\beta_{ij}(x)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  为控制增益矩阵,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $\gamma(x) = [\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)]^T \in \mathbb{R}^n$  表示系统所受干扰和模

型的不确定性.  $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m, h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T \in \mathbb{R}^m$ .

对系统(1)作如下假设:

A1) 具有相对阶  $\{r_1, \dots, r_m\}$  且  $r_1 + \dots + r_m = n$ ;

A2)  $L_\alpha L_\gamma^k h_i(x) = 0, L_\gamma L_\alpha^k h_i(x) = 0$ , 其中  $k = 1, \dots, r_i - 1, i = 1, \dots, m$ .

A3) 系统不确定性能用一定的函数  $\gamma(x)$  表达.

根据以上假设条件可选择坐标变换  $Z = \Phi(x)$  将系统转化为以新坐标系  $Z$  表达的标准型,

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \\ \dots \\ \dot{\varphi}_{r_1-1} = \varphi_{r_1}, \\ \dot{\varphi}_{r_1} = f_1(x) + g_{11}(x)u_1 + \dots + g_{1m}(x)u_m + d_1(x), \\ y_1 = \varphi_1, \\ \dots \\ \dot{\phi}_1 = \phi_2, \\ \dots \\ \dot{\phi}_{m-1} = \phi_m, \\ \dot{\phi}_m = f_m(x) + g_{m1}(x)u_1 + \dots + g_{mm}(x)u_m + d_m(x), \\ y_m = \phi_1. \end{cases} \quad (2)$$

上式中

$$\begin{aligned} f_i(x) &= L_\alpha^2 h_i(x), \quad i = 1, \dots, m, \\ x &= \phi^{-1}(z), \\ g_{ij}(x) &= L_{\beta_j} L_\alpha^{r_i-1} h_i(x), \quad i, j = 1, \dots, m, \\ d_i(x) &= L_\gamma^r h_i(x), \quad i = 1, \dots, m, \\ y &= [\varphi_1, \dots, \phi_1]^T, \end{aligned}$$

则式(2)可变为如下形式

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = f(x) + G(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} + d(x). \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} G(x) &= \begin{bmatrix} g_{11}(x) & \dots & g_{1m}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{m1}(x) & \dots & g_{mm}(x) \end{bmatrix}, \\ f(x) &= \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}, \quad d(x) = \begin{bmatrix} d_1(x) \\ \vdots \\ d_m(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

对式(3)作如下假设:

B1) 紧集  $S \subset \mathbb{R}^n$  上,  $G(x)$  非奇异且范数有界, 同时有以下式子成立

$$\underline{\sigma}_G(G(x)) \geq b > 0, \quad \forall x \in S. \quad (4)$$

其中  $\underline{\sigma}_G$  为矩阵  $G(x)$  的最小奇异值,  $b$  为任意非负常数.

B2)  $f(x)$  和  $d(x)$  为光滑函数, 且  $d(x)$  有界.

控制目标是设计自适应神经网络控制器使系统的各个输出  $y_i$  及其至  $r_i - 1$  阶导数  $y, \dots, y^{(r_i-1)}$  跟踪有界的参考信号  $y_{id}$  及其相应阶的导数. 定义  $e_i = y_i - y_{id}, i = 1, \dots, m$ .

### 3 基于神经网络的自适应 $H_\infty$ 控制器设计 (Design of adaptive $H_\infty$ controller for nonlinear system based on neural networks)

在设计控制器前假设: C1) 对任意  $i = 1, \dots, m$  和  $j = 1, \dots, m$ , 都存在  $w_{f_i}$  和  $w_{g_{ij}}$ , 使得  $\hat{f}_i(x \setminus w_{f_i})$  和  $\hat{g}_{ij}(x \setminus w_{g_{ij}})$  能任意逼近  $f_i(x)$  和  $g_{ij}(x)$ . 即在紧集  $S \subset \mathbb{R}^n$  上存在  $\epsilon$ , 使得

$$\max | \hat{f}_i(x, w_{f_i}) - f_i(x) | \leq \epsilon$$

和

$$\max | \hat{g}_{ij}(x, w_{g_{ij}}) - g_{ij}(x) | \leq \epsilon, \quad \forall x \in S$$

成立, 其中  $w_{f_i}$  和  $w_{g_{ij}}$  为神经网络的权值.

根据前面的假设构造如下形式的控制器

$$u = u_c + u_h. \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} u_c &= \hat{G}^{-1}(x \setminus w_g) [-\hat{f}(x \setminus w_f) + \tau], \\ u_h &= -\hat{G}^{-1}(x \setminus w_g) u_a. \end{aligned} \quad (6)$$

$u_c$  为等效控制器,  $u_h$  为补偿控制器用来减小复合干扰对系统跟踪误差所带来的影响, 起鲁棒控制作用, 且有

$$u = [u_1, \dots, u_m]^T, \quad \tau = [\tau_1, \dots, \tau_m]^T,$$

$$\hat{G}(x \setminus w_g) = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}(x \setminus w_{g_{11}}) & \dots & \hat{g}_{1m}(x \setminus w_{g_{1m}}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{g}_{m1}(x \setminus w_{g_{m1}}) & \dots & \hat{g}_{mm}(x \setminus w_{g_{mm}}) \end{bmatrix},$$

$$\hat{f}(x \setminus w_f) = [\hat{f}_1(x \setminus w_{f_1}), \dots, \hat{f}_m(x \setminus w_{f_m})]^T,$$

$$u_a = \begin{bmatrix} u_{1a} \\ \vdots \\ u_{ma} \end{bmatrix} \quad (u_{ia} \text{ 在后面定义}).$$

这里的  $\hat{f}(x \setminus w_f)$  和  $\hat{G}(x \setminus w_g)$  为 RBF 神经网络对  $f(x)$  和  $G(x)$  的逼近. 定义

$$\begin{cases} \tau_1 = y_{1d}^{(r_1)} + \lambda_{1r_1}(y_{1d}^{(r_1-1)} - y_1^{(r_1-1)}) + \dots + \lambda_{11}(y_{1d} - y_1), \\ \vdots \\ \tau_m = y_{md}^{(r_m)} + \lambda_{mr_m}(y_{md}^{(r_m-1)} - y_1^{(r_m-1)}) + \dots + \lambda_{m1}(y_{md} - y_m). \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\lambda_{ij}(j = 1, \dots, r_i)$  应使多项式  $h_i(s) = s^n + \lambda_{1r_i}s^{n-1} + \dots + \lambda_{i1}$  的所有根位于左半开平面上. 将式 (5) 代入式 (3) 即可得

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) - \hat{f}_1(x \setminus w_{f1}) \\ \vdots \\ f_m(x) - \hat{f}_m(x \setminus w_{fm}) \end{bmatrix} + (G(x) - \hat{G}(x \setminus w_g)) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1a} \\ \vdots \\ u_{ma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1(x) \\ \vdots \\ d_2(x) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

再将式 (7) 代入式 (8) 可得

$$\begin{bmatrix} e_1^{(r_1)} + \lambda_{1r_1}e_1^{(r_1-1)} + \dots + \lambda_{11}e_1 \\ \vdots \\ e_m^{(r_m)} + \lambda_{mr_m}e_m^{(r_m-1)} + \dots + \lambda_{m1}e_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(x \setminus w_{f1}) - f_1(x) \\ \vdots \\ \hat{f}_m(x \setminus w_{fm}) - f_m(x) \end{bmatrix} + (\hat{G}(x \setminus w_g) - G(x)) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1a} \\ \vdots \\ u_{ma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1(x) \\ \vdots \\ d_m(x) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

先设计各子系统的基于神经网络的自适应鲁棒控制律, 然后再考虑系统全局稳定.

对第  $i$  个子系统

$$e_i^{(r_i)} + \lambda_{ir_i}e_i^{(r_i-1)} + \dots + \lambda_{i1}e_i = \hat{f}_i(x \setminus w_{fi}) - f_i(x) + \Delta G_i u + u_{ia} - d_i(x). \quad (10)$$

式中  $\Delta G_i = [\hat{g}_{i1}(x \setminus w_{g_{i1}}) - g_{i1}(x), \dots, \hat{g}_{im}(x \setminus w_{g_{im}}) - g_{im}(x)]$ . 定义  $e_{ip} = [e_i, \dots, e_i^{(r_i-1)}]^T$ , 则上式可变为

$$\dot{e}_{ip} = A_i e_{ip} + B_i u_{ia} + B_i [f_i(x) - \hat{f}_i(x \setminus w_{fi}) + \Delta G_i u - d_i(x)]. \quad (11)$$

式中

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{i1} & -\lambda_{i2} & \dots & -\lambda_{i(r_i-1)} & -\lambda_{ir_i} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

现设计任务是构造控制器  $u_{ia}$  及自适应律  $w_{fi}$  和  $w_{g_{ij}}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , 实现第  $i$  个子系统的控制目标. 定义

$$\begin{cases} w_{fi}^* = \arg \min_{w_{fi} \in \Omega_{fi}} [\sup_{x \in U_c} |\hat{f}_i(x \setminus w_{fi}) - f_i(x)|], \\ w_{g_{ij}}^* = \arg \min_{w_{g_{ij}} \in \Omega_{g_{ij}}} [\sup_{x \in U_c} |\hat{g}_{ij}(x \setminus w_{g_{ij}}) - g_{ij}(x)|]. \end{cases} \quad (12)$$

式中  $\Omega_{fi} = \{w_{fi} : \|w_{fi}\| \leq M_{fi}\}$ ,  $\Omega_{g_{ij}} = \{w_{g_{ij}} : \|w_{g_{ij}}\| \leq M_{g_{ij}}\}$  分别为参数的可行域, 其中  $M_{fi}$  和  $M_{g_{ij}}$  为设计参数.

定义网络的最小逼近误差为

$$\omega_{ni} = (\hat{f}_i(x \setminus w_{fi}^*) - f_i(x)) + \Delta G_i^* u. \quad (13)$$

式中

$$\Delta G_i^* = [\hat{g}_{i1}(x \setminus w_{g_{i1}}^*) - g_{i1}(x), \dots, \hat{g}_{im}(x \setminus w_{g_{im}}^*) - g_{im}(x)].$$

将式 (13) 代入式 (11) 可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ip} = & A_i e_{ip} + B_i u_{ia} + B_i [(\hat{f}_i(x \setminus w_{fi}) - \hat{f}_i(x \setminus w_{fi}^*)) + (\Delta G_i - \Delta G_i^*) u] + \\ & B_i [\omega_{ni} - d_i(x)]. \end{aligned} \quad (14)$$

若把  $\hat{f}_i(\cdot)$  和  $\hat{g}_{ij}(\cdot)$  选为 RBF 神经网络, 则有

$$\begin{aligned} \hat{f}_i(x \setminus w_{fi}) &= w_{fi}^T \Phi_i(x), \\ \hat{g}_{ij}(x \setminus w_{g_{ij}}) &= w_{g_{ij}}^T \Phi_{ij}(x). \end{aligned} \quad (15)$$

而 RBF 网络具有如下形式

$$y_i = \sum_{j=1}^m w_j \Phi_j(\xi) = w^T \Phi(\xi). \quad (16)$$

式中,  $w = [w_1, \dots, w_m]^T$  为网络权值,  $\Phi(\xi) = [\phi_1(\xi), \dots, \phi_m(\xi)]^T$ ,  $\phi(\xi)$  为基函数, 则式 (14) 可重写为

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ip} = & A_i e_{ip} + B_i u_{ia} + B_i [\tilde{w}_{fi}^T \Phi_i(x) + \\ & \tilde{w}_{g_{ij}}^T \Phi_{ij}(x) u] + B_i \omega_i. \end{aligned} \quad (17)$$

上式中

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_{ni} - d_i, \quad \tilde{w}_{fi} = w_{fi} - w_{fi}^*, \\ \tilde{w}_{g_{ij}} &= [(w_{g_{i1}} - w_{g_{i1}}^*), \dots, (w_{g_{im}} - w_{g_{im}}^*)]. \end{aligned}$$

同时称  $\omega_i$  为复合干扰. 根据假设 B1) 可得

$$\|\hat{G}^{-1}(x \setminus w_g)\|_2 \leq \frac{1}{b(1-\xi)}. \quad (18)$$

其中参数  $\xi$  的取值和式 (18) 的具体证明可参见文 [2]. 结合前面的假设 C1) 和式 (7) 可知所设计的控制器 (5) 有界, 而又因  $d(x)$  有界, 因此由

式(13)和复合干扰  $\omega_i$  的定义知其有上界,不妨记为  $\bar{\omega}_i$ .

取  $H_\infty$  控制器为

$$\dot{w}_{f_i} = \begin{cases} -\mu_i e_{ip}^T p_i B_i \Phi_i(x) + \epsilon_i (\|w_{f_i}\| - M_{f_i}), & \|w_{f_i}\| \leq M_{f_i}, e_{ip}^T p_i B_i w_{f_i}^T \Phi_i(x) > 0, w_{f_i}^T \cdot w_{f_i}^* > 0, \\ P_{r_1}[\cdot], & \|w_{f_i}\| = M_{f_i}, e_{ip}^T p_i B_i w_{f_i}^T \Phi_i(x) < 0, w_{f_i}^T \cdot w_{f_i}^* < 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\dot{w}_{g_{ij}} = \begin{cases} -\rho_{ij} e_{ip}^T p_i B_i \Phi_{ij}(x) u_j + \sigma_{ij} (\|w_{g_{ij}}\| - M_{g_{ij}}), & \|w_{g_{ij}}\| \leq M_{g_{ij}}, e_{ip}^T p_i B_i w_{g_{ij}}^T \Phi_{ij}(x) > 0, w_{g_{ij}}^T \cdot w_{g_{ij}}^* > 0, \\ P_{r_2}[\cdot], & \|w_{g_{ij}}\| = M_{g_{ij}}, e_{ip}^T p_i B_i w_{g_{ij}}^T \Phi_{ij}(x) < 0, w_{g_{ij}}^T \cdot w_{g_{ij}}^* < 0, \end{cases} \quad (21)$$

投影算子  $P_{r_i}$  定义为

$$P_{r_1}[\cdot] = -\mu_i e_{ip}^T p_i B_i \Phi_i(x) + \mu_i \frac{e_{ip}^T p_i B_i w_{f_i} w_{f_i}^T \Phi_i(x)}{\|w_{f_i}\|^2}, \quad (22)$$

$$P_{r_2}[\cdot] = -\rho_{ij} e_{ip}^T p_i B_i \Phi_{ij}(x) + \rho_{ij} \frac{e_{ip}^T p_i B_i w_{g_{ij}} w_{g_{ij}}^T \Phi_{ij}(x)}{\|w_{g_{ij}}\|^2}. \quad (23)$$

其中  $\mu_i$  和  $\rho_{ij}$  为神经网络学习率. 式(20)与式(21)中设计参数  $\epsilon_i$  和  $\sigma_{ij}$  定义为

$$\epsilon_i = \alpha_i \text{sgn}(w_{f_i}), \quad \sigma_{ij} = \beta_{ij} \text{sgn}(w_{g_{ij}}). \quad (24)$$

上式中  $\alpha_i > 0, \beta_{ij} > 0$  为常数,其作用是调节系统的动态性能,设计时视具体情况给定.  $p_i = p_i^T > 0$  是如下 Riccati 方程的解

$$\begin{cases} p_i A_i + A_i^T p_i + Q_i - \frac{2}{\gamma} p_i B_i B_i^T p_i + \frac{1}{k^2} p_i B_i B_i^T p_i = 0, \\ Q_i > 0. \end{cases} \quad (25)$$

#### 4 性能分析(Performance analysis)

**定理 1** 考虑系统(3),其控制量为式(5),  $u_c$  取如式(6)的形式,取式(20)和(21)为参数向量的自适应律,则有

1) 在自适应过程中始终能保持

$$\|W_f\| \leq \sum_{i=1}^m M_{f_i}, \quad \|W_g\| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M_{g_{ij}}.$$

其中

$$W_f = [w_{f_1}, \dots, w_{f_m}]^T,$$

$$W_g = [w_{g_{11}}, \dots, w_{g_{1m}}, \dots, w_{g_{m1}}, \dots, w_{g_{mm}}]^T.$$

2) 对于给定的干扰减弱水平  $k(k > 0)$ ,在控制器(5)的作用下输出跟踪误差  $e$  满足如下的  $H_\infty$  跟踪性能指标

$$\frac{1}{2} \int_0^T e^T Q e dt \leq$$

$$u_{ia} = -\frac{1}{\gamma} B_i^T P_i e_{ip}. \quad (19)$$

其中  $\gamma > 0$  为设计参数.取参数自适应律为

$$\frac{1}{2} e^T(0) p e(0) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\mu_i} \bar{w}_{f_i}^T(0) \bar{w}_{f_i}(0) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\rho_{ij}} \bar{w}_{g_{ij}}^T(0) \bar{w}_{g_{ij}}(0) + \frac{1}{2} \kappa^2 \int_0^T \omega^T \omega dt. \quad (26)$$

其中有  $e = [e_{1p}^T, \dots, e_{mp}^T]^T, Q = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_m), \omega = [\omega_1, \dots, \omega_m]^T, p = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ .

证 1) 设  $V_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_{f_i}^T w_{f_i}$ , 当  $\|w_{f_i}\| \leq M_{f_i}$

时,由式(20)和(24)的第一式可知

$$\dot{V}_f = -\sum_{i=1}^m \mu_i e_{ip}^T p_i B_i w_{f_i}^T \Phi_i(x) + w_{f_i}^T \epsilon_i (\|w_{f_i}\| - M_{f_i}) < 0. \quad (27)$$

因此此时总可保持  $\|W_f\| \leq \sum_{i=1}^m M_{f_i}$ .

当  $\|w_{f_i}\| = M_{f_i}$  时,由式(20)的第二式可知:

$\dot{V}_f = 0$ , 即有  $\|W_f\| \leq \sum_{i=1}^m M_{f_i}$ . 所以对任意  $t \geq 0$ ,

均有  $\|W_f\| \leq \sum_{i=1}^m M_{f_i}$ . 同理可证,对任意的  $t \geq 0$ ,

均有  $\|W_g\| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M_{g_{ij}}$ .

2) 定义

$$V_i = \frac{1}{2} e_{ip}^T p_i e_{ip} + \frac{1}{2\mu_i} \bar{w}_{f_i}^T \bar{w}_{f_i} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\rho_{ij}} \bar{w}_{g_{ij}}^T \bar{w}_{g_{ij}}, \quad (28)$$

则构造 Lyapunov 函数为  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_m$ , 取  $V$  对  $t$  的导数可得

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dots + \dot{V}_m. \quad (29)$$

而又有

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2} e_{ip}^T p_i \dot{e}_{ip} + \frac{1}{2} e_{ip}^T p_i \dot{e}_{ip} + \frac{1}{\mu_i} \dot{\bar{w}}_{f_i}^T \bar{w}_{f_i} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\rho_{ij}} \dot{\bar{w}}_{g_{ij}}^T \bar{w}_{g_{ij}}. \quad (30)$$

由于  $\dot{\bar{w}}_{f_i} = \dot{w}_{f_i}, \dot{\bar{w}}_{g_{ij}} = \dot{w}_{g_{ij}}$ , 利用式(17), (20), (21),

(24)和式(25)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -\frac{1}{2} e_{ip}^T Q_i e_{ip} - \frac{1}{2\kappa^2} e_{ip}^T p_i B_i B_i^T p_i e_{ip} + \frac{1}{2} (\omega_i^T B_i^T p_i e_{ip} + \\ & e_{ip}^T p_i B_i \omega_i) + (e_{ip}^T p_i B_i \Phi_i^T(x) + \frac{1}{\mu_i} \dot{w}_{fi}^T) \bar{w}_{fi} + \\ & \sum_{j=1}^m ((e_{ip}^T p_i B_i \Phi_{ij}^T(x) u_j + \frac{1}{\rho_{ij}} \dot{w}_{g_{ij}}^T) \bar{w}_{g_{ij}}). \end{aligned} \quad (31)$$

不难证明式(31)的后两项是非正的,同时由

$$(\omega_i^T - \frac{1}{\kappa^2} e_{ip}^T p_i B_i) (\omega_i^T - \frac{1}{\kappa^2} e_{ip}^T p_i B_i)^T \geq 0, \quad (32)$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -\frac{1}{2} e_{ip}^T Q_i e_{ip} + \frac{1}{2} \kappa^2 \omega_i^T \omega_i \leq \\ & -\frac{1}{2} e_{ip}^T Q_i e_{ip} + \frac{1}{2} \kappa^2 \|\bar{\omega}_i\|_2. \end{aligned} \quad (33)$$

令  $\lambda_{\min}(\cdot)$  为矩阵  $Q_i$  的最小特征值, 则当  $\|e_{ip}\| > \kappa \|\bar{\omega}_i\| / \sqrt{\lambda_{\min}(Q_i)}$  时有

$$\dot{V}_i \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q_i) \|e_{ip}\|^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \|\bar{\omega}_i\|^2 < 0, \quad (34)$$

因此有

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dots + \dot{V}_m < 0.$$

所以在所设计的控制器的作用下, 闭环系统具有全局稳定性.

对式(34)从  $t = 0$  到  $t = T$  积分可得

$$\begin{aligned} V_i(T) - V_i(0) \leq & -\frac{1}{2} \int_0^T e_{ip}^T Q_i e_{ip} dt + \frac{1}{2} \kappa^2 \int_0^T \omega_i^T \omega_i dt. \end{aligned} \quad (35)$$

由式(28)可知  $V_i(T) \geq 0$ , 联合式(28)和式(35)有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T e_{ip}^T Q_i e_{ip} dt \leq & \frac{1}{2} e_{ip}^T(0) p_i e_{ip}(0) + \frac{1}{2\mu_i} \bar{w}_{fi}^T(0) \bar{w}_{fi}(0) + \\ & \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\rho_{ij}} \bar{w}_{g_{ij}}^T(0) \bar{w}_{g_{ij}}(0) + \frac{1}{2} \kappa^2 \int_0^T \omega_i^T \omega_i dt. \end{aligned} \quad (36)$$

对整个系统而言有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T e^T Q e dt \leq & \frac{1}{2} e^T(0) p e(0) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\mu_i} \bar{w}_{fi}^T(0) \bar{w}_{fi}(0) + \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\rho_{ij}} \bar{w}_{g_{ij}}^T(0) \bar{w}_{g_{ij}}(0) + \frac{1}{2} \kappa^2 \int_0^T \omega^T \omega dt. \end{aligned} \quad (37)$$

所以设计的控制器对于给定的干扰减弱水平  $\kappa$ , 取得一定的  $H_\infty$  跟踪性能.

上述 RBF 神经网络逼近, 运用前向 BP 网络代替也可取得同样的控制效果.

### 5 仿真研究 (Simulation study)

设两自由度的机器手在水平位置上运动方程如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 - h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$H_{11} = a_1 + 2a_3 \cos(q_2) + 2a_4 \sin(q_2), \quad H_{22} = a_2,$$

$$H_{12} = H_{21} = a_2 + a_3 \cos(q_2) + a_4 \sin(q_2),$$

$$h = a_3 \sin(q_2) - a_4 \cos(q_2),$$

$$a_1 = I + m_1 l_{c_1}^2 + I_e + m_e l_{c_e}^2 + m_e l_1^2,$$

$$a_2 = I_e + m_e l_{c_e}^2,$$

$$a_3 = m_e l_1 l_{c_e} \cos(\delta_e), \quad a_4 = m_e l_1 l_{c_e} \sin(\delta_e),$$

$$d_1 = 0.5 \sin(q_1), \quad d_2 = 0.5 \sin(q_2),$$

$q_1$  和  $q_2$  为位置向量. 且有

$$l_1 = 1.0, \quad l_{c_1} = 0.5, \quad m_1 = 1.0, \quad I_1 = 0.12,$$

$$l_{c_e} = 0.6, \quad \delta_e = \frac{\pi}{6}, \quad m_e = 2.0, \quad I_e = 0.25.$$

式(38)的形式即为式(3)的形式, 采用相同的神经网络逼近  $f_1, f_2, g_{11}, g_{12}(g_{21}), g_{22}$ , RBF 神经网络的隐层单元数  $N = 15$ ; 初始条件  $w_{f1} = w_{f2} = 0, w_{g_{11}} = w_{g_{12}} = w_{g_{22}} = 0.5I, q_1(0) = q_2(0) = 0.2, M_{f1} = M_{f2} = 10, M_{g_{11}} = M_{g_{12}} = M_{g_{22}} = 15, \alpha_1 = \alpha_2 = 2I, \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{22} = 1.5I$ ; 学习率  $\mu_1 = \mu_2 = 0.1, \rho_{11} = \rho_{12} = \rho_{22} = 0.02$ ; 参考信号选为  $y_1 = \frac{\pi}{20} \sin(t), y_2 = \frac{\pi}{30} \sin(t)$ .

图 1, 图 2 给出了在  $k = 0.05, 0.2, 0.3$  且对应的  $\gamma = 0.004, 0.1, 0.2$  的情况下, 误差  $e_1$  和  $e_2$  的变化曲线. 从图中可以看出: 在所设计的控制器作用下系统动态效果良好, 且随着  $k$  的减小, 稳态跟踪误差减小.

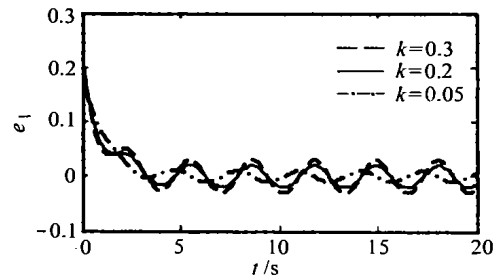
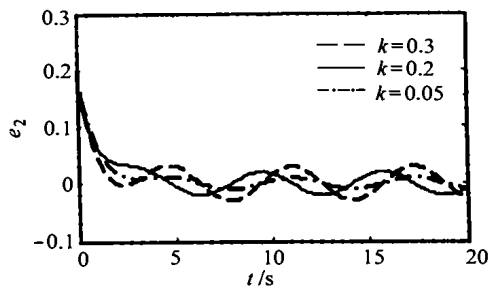


图 1 跟踪误差曲线  $e_1$

Fig. 1 The tracking error curve  $e_1$

图2 跟踪误差曲线  $e_2$ Fig. 2 The tracking error curve  $e_2$ 

## 6 结论(Conclusion)

本文首先对一类多输入多输出仿射非线性不确定性系统进行反馈线性化分析,然后对线性化后的非线性系统设计了自适应  $H_\infty$  控制器,同时把神经网络的逼近误差引入到自适应率中,加快了逼近速度,从而改变了系统的动态性能.最后通过一个机械手在水平位置上的运动实例验证了所设计控制器的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] LIU Chenchun, CHEN Fuchuang. Adaptive control of non-linear continuous systems using neural networks-general relative degree and MIMO cases [J]. *Int J Control*, 1993, 58(2): 317 - 335.
- [2] NARENDRA K S, MUKHOPADHYAY S. Adaptive control of non-linear multivariable system using neural networks [J]. *Neural Networks*, 1994, 7(5): 737 - 752.
- [9] ZHONG Wanxie, LIN Jiahao, QIU Chunhang. Computational structural mechanics and optimal control-the simulation of substructural chain theory to linear quadratic optimal control problems [J]. *Int J of Numerical Methods in Engineering*, 1992, 33(1): 197 - 211.
- [10] WITTRICK W H, WILLIAMS F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures [J]. *Quarterly J of Mechanics and Applied Mathematics*, 1971, 24 (3): 263 - 284.
- [11] BALAKRISHNAN A V. Generalization of the Wittrick-Williams formula for counting modes of flexible structures [J]. *J of Guidance*,

- [3] LIU G P, KADIRKAMANATHAN V, BILLINGS S A. Variable neural networks for adaptive control of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans Systems, Man, and Cybernetics-Part C*, 1999, 29(1): 34 - 43.
- [4] PATINO H D, LIU Derong. Neural network-based model reference adaptive control system [J]. *IEEE Trans Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, 2001, 30(2): 198 - 204.
- [5] SANNER R, SLOTINE J J. Gaussian networks for direct adaptive control [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 3(6): 837 - 864.
- [6] TANG Jiantao, TONG Shaocheng. Adaptive  $H_\infty$  control of nonlinear systems based on neural networks [J]. *Control and Decision*, 1999, 14 (4): 297 - 302 (in Chinese).
- [7] TONG Shaocheng, TANG Jiantao, WANG Tao. Fuzzy adaptive control of multivariable nonlinear systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 111(2), 163 - 167.

## 作者简介:

陈 谋 (1975 —), 男, 1994 年于南京航空航天大学获学士学位, 现为南航自动化学院博士研究生. 主要研究方向为不确定系统控制方法研究和综合火/飞/推控制. Email: chenmouse@hotmail.com;

姜长生 (1942 —), 男, 教授, 博士生导师. 已出版专著 5 部, 发表论文 100 余篇, 获省部级科研成果奖 7 项. 目前主要研究方向为鲁棒控制, 智能控制和综合火飞控制等;

吴庆尧 (1955 —), 男, 教授. 发表论文 40 余篇, 著作 4 部, 获省部级成果奖 12 项. 目前主要研究方向为鲁棒控制, 工业过程控制等;

曹邦武 (1975 —), 男, 南京航空航天大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为智能控制等.

*Control, and Dynamics*, 1995, 18(6): 1410 - 1415.

## 作者简介:

吴志刚 (1971 —), 男, 博士, 副教授. 研究兴趣为  $H_\infty$  控制系统设计中的数值方法, 结构振动主动控制等. Email: wuzhg@dlut.edu.cn;

钟万镠 (1934 —), 男, 教授, 中国科学院院士. 目前主要研究领域包括工程力学中的哈密顿体系,  $H_\infty$  控制理论等.