

细胞神经网络平衡点稳定性分析

廖伍代^{1,2}, 廖晓昕¹

(1. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074; 2. 军事经济学院 基础部, 湖北 武汉 430035)

摘要: 采用分割状态空间为若干个子区域的方法, 对细胞神经网络平衡点的稳定性进行分析. 视平衡点在子区域边界上的情况, 分别检验一个或多个相应区域内系统的矩阵的 Hurwitz 性, 得到了仅依赖网络自身元素的充分性条件. 该结果容易检验, 便于网络设计.

关键词: 细胞神经网络; 平衡点; 指数稳定; 条件稳定; 矩阵测度

中图分类号: O175.13 **文献标识码:** A

Stability analysis of equilibria of cellular neural networks

LIAO Wu-dai^{1,2}, LIAO Xiao-xin¹

(1. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Hubei Wuhan 430074, China;

2. Mathematical Department of Military Economy College, Hubei Wuhan 430035, China)

Abstract: By dividing state space into some sub-domains, the stability of equilibrium of the cellular neural networks is analyzed. According to the location of the equilibria, the Hurwitzian of one or more system matrices in each sub-domain is examined, and some sufficient algebraic conditions ensuring the stability of the equilibrium are obtained. The conditions only depend on the system parameters and are easily tested in the system design.

Key words: cellular neural networks; equilibria; exponential stability; conditional stability; matrix-measure

1 引言 (Introduction)

自 Chua L.O. 等人提出细胞神经网络 (CNN) 理论^[1]以来, 由于其在诸如图象处理和模式识别等领域的重要潜在应用, CNN 的研究一直是个热点, 同时也得到了许多的结果^[2~5]. 本文试图对文^[1]提出的细胞神经网络, 研究它的平衡点的稳定性, 给出判定平衡点稳定性可程序化的方法和结果, 推广文^[2]关于平衡点只是区域内点到一般情形, 使之既适用于平衡点是区域内点又适用于区域边界点的情形.

考虑如下的 CNN 的状态方程

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j + I_i, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

或对应的向量形式

$$\dot{x} = -x + Af(x) + Bu + I. \quad (2)$$

其中, $f_j(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 为第 j 单元的饱和线性输出函数, 其余参数与文献^[1~4]中相同.

为了后文论证的需要, 引进如下引理, 其证明可见文献^[2].

引理 1 CNN(1)至少有一平衡点.

引理 2 CNN(1)满足全局 Lipschitz 条件.

2 主要结果 (Main results)

将直线 R 分成不相交的 3 个子区间 $(-\infty, -1]$, $(-1, 1)$ 和 $[1, +\infty)$, 从而把空间 R^n 分成 3^n 个不相交的区域 V_k , 按区域中点的坐标分量绝对值小于或等于或大于 1 的个数可把这些区域分成 $n+1$ 类:

$$V^{(k)} = \{x \in R^n \mid x \text{ 的分量的绝对值有且仅有 } k-1 \text{ 个小于 } 1, k = 1, 2, \dots, n+1\}.$$

设 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in R^n$ 是 CNN(1)或 CNN(2)的一个平衡点, 其中有 m ($m \geq 0$) 个分量的绝对值等于 1, 其作分量的绝对值不等于 1. 不妨设

$$x_1^* = \dots = x_r^* = 1,$$

$$x_{r+1}^* = \dots = x_m^* = -1, \quad |x_j^*| \neq 1,$$

$$j = m+1, \dots, n, \quad 0 \leq r \leq m \leq n,$$

则平衡点 x^* 是上述 3^n 个区域中 2^m 个的边界点. 特别地, 若 $m = 0$, 即所有分量的绝对值不等于 1, 则平衡点 x^* 是某区域的内点, 以下各条定理中所言的区域的边

界点都是这个意义上的,即包括 $m = 0$ 的情形.

令 $z_i = x_i - x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则 CNN(1) 写成

$$\dot{z}_i = -z_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(z_j + x_j^*) - f_j(x_j^*)]. \quad (3)$$

引进两个函数 $\varphi(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 如下:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & |x| < 1, \end{cases}$$

则对 $j = 1, \dots, r$,

$$\begin{aligned} f_j(z_j + x_j^*) - f_j(x_j^*) &= \\ f_j(z_j + 1) - 1 &= \varphi(-z_j)z_j, \quad z_j > 2; \end{aligned}$$

对 $j = r + 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} f_j(z_j + x_j^*) - f_j(x_j^*) &= \\ f_j(z_j - 1) + 1 &= \varphi(z_j)z_j, \quad z_j < -2; \end{aligned}$$

对 $j = m + 1, \dots, n$,

$$f_j(z_j + x_j^*) - f_j(x_j^*) = \sigma(x_j^*)z_j.$$

当 z_j 的取值使得 $z_j + x_j^*$ 与 x_j^* 同时落在三个区间之一内部.

从而 CNN(3) 化为如下形式

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = -z_i + \sum_{j=1}^r [a_{ij} \varphi(-z_j)] z_j + \sum_{j=r+1}^m [a_{ij} \varphi(z_j)] z_j + \\ \sum_{j=m+1}^n [a_{ij} \sigma(x_j^*)] z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

或写成向量形式

$$\dot{z} = (-I + AD)z. \quad (5)$$

其中 $D = D(z_1, z_2, \dots, z_m)$ 是下面的 n 阶对角矩阵:

$$D = \text{diag}(\varphi(-z_1), \dots, \varphi(-z_r), \varphi(z_{r+1}), \dots, \varphi(z_m), \sigma(x_{m+1}^*), \dots, \sigma(x_n^*)).$$

由于 x^* 是 2^m 个区域的边界点, 在每个这样的区域中 $z_i = x_i - x_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 有一组确定的符号, 对应着一个主对角线元素为 0 或 1 的矩阵 D , 故这样的矩阵共有 2^m 个.

定理 1 记 $G = \cup \{V_k \mid V_k \text{ 以 } x^* \text{ 为其边界点}\}$.

1) 若与区域 V_k 相对应的矩阵 D_k 使得矩阵 $-I + AD_k$ 为 Hurwitz 稳定矩阵, 则 CNN(5) 的平衡点 $z = 0$ (从而 CNN(2) 的平衡点 $x = x^*$) 在 V_k 上条件指数稳定, 即 $\exists \alpha_k > 0, \beta_k > 0$, 对 $z(0) \in V_k$, CNN(5) 的解 $\|z(t)\| \leq \beta_k \|z(0)\| \exp(-\alpha_k t)$ ($t \geq 0$);

2) 若 G 中每个区域 V_k 对应的矩阵 D_k 使矩阵 $-I + AD_k$ 均为 Hurwitz 稳定矩阵, 则 CNN(2) 的平衡点 $x = x^*$ 指数稳定, 衰减率 $\alpha = \min\{\alpha_k\}$;

3) 若至少有一矩阵 D_k 使得矩阵 $-I + AD_k$ 拟稳定, 则 CNN(2) 平衡点 $x = x^*$ 或稳定但非渐近稳定

或不稳定;

4) 若存在矩阵 D_k 使矩阵 $-I + AD_k$ 不稳定, 则 CNN(2) 平衡点 $x = x^*$ 不稳定.

注 1 拟稳定矩阵指矩阵的每一个特征根具有非正实部, 且零实部特征根对应的初等因子是一次的, 矩阵不稳定指矩阵非拟稳定.

证 1) 在 V_k 内 CNN(5) 是线性方程组, 且系数矩阵是 Hurwitz 稳定矩阵, 由线性方程组的性质和结论成立;

2) 由 1) 知, $\forall z(0) \in G$, 有

$$\|z(t)\| \leq \beta_k \|z(0)\| e^{-\alpha t} \leq \beta \|z(0)\| e^{-\alpha t}.$$

其中 $\beta = \max\{\beta_k, 1 \leq k \leq 2^m\}$, 上式说明 CNN(5) 的平衡点 $z = 0$ 是指数稳定的, 从而 CNN(2) 的平衡点 $x = x^*$ 指数稳定;

3) 若平衡点 $x = x^*$ 渐近稳定, 则在矩阵 D_k 对应的区域 V_k 中条件渐近稳定, 从而 $-I + AD_k$ 是 Hurwitz 稳定矩阵, 与条件矛盾, 故结论真;

4) 若平衡点 $x = x^*$ 稳定, 则在矩阵 D_k 对应区域中条件稳定, 在该区域中系统是线性系统, 平衡点稳定等价于矩阵 $-I + AD_k$ 所有特征值非正, 且零实部特征值对应的约当块是一阶的, 这与条件矛盾, 故结论真. 证毕.

推论 1 $\mu(\cdot)$ 为附录中定义的矩阵测度, 记

$$\beta = \max\{\mu(AD_k), 1 \leq k \leq 2^m\},$$

则当 $\beta < 1$ 时 CNN(2) 的平衡点 $x = x^*$ 指数稳定.

证 由附录中矩阵测度性质 2 得,

$$\mu(-I + AD_k) \leq \mu(-I) + \mu(AD_k) \leq -1 + \beta < 0.$$

再由性质 3 知, 矩阵 $-I + AD_k$ 稳定, 根据定理 1 的 2) 知推论 1 成立.

推论 2 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足下述条件之一, 则 CNN(2) 平衡点 $x = x^*$ 指数稳定.

1) 存在正数 $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, 使

$$\max_{1 \leq j \leq n} (a_{jj} + \sum_{i \neq j} \frac{p_i}{p_j} |a_{ij}|) < 1;$$

2) 存在正数 $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, 使

$$\max_{1 \leq j \leq m} (a_{jj} + \sum_{i \neq j} \frac{p_i}{p_j} |a_{ij}|) < 1,$$

$$\max_{|j_i|, |z_j^*| < 1} (a_{jj} + \sum_{i \neq j} \frac{p_i}{p_j} |a_{ij}|) < 1.$$

证 条件 1) 与条件 2) 都蕴含 $\max[\mu_p^1(AD_k)] < 1$, 由推论 1 知, 此时结论真. 见附录矩阵测度性质^[4].

注 2 在推论 2 中, 取所有 p_i 都相等便得到只与系统参数有关的充分性条件.

定理 2 若 CNN(2) 在区域 $V^{(1)}$ 中有平衡点 $x = x^*$ 在有限边界上, 则 $x = x^*$ 在区域 $V^{(1)}$ 中条件指数稳定.

证 由已知 $x^* \in V^{(1)}$ 知 $|x_i^*| \geq 1 - i = 1, \dots, n, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in V^{(1)}$ 均有 $|x_i| \geq 1$, 从而当 x 在 x^* 的某邻域中有

$$\begin{aligned} z_i &= x_i - x_i^* = x_i - 1 \geq 0, 1 \leq i \leq r, \\ z_i &= x_i - x_i^* = x_i + 1 \leq 0, r + 1 \leq i \leq m, \\ |x_i^*| &> 1, m + 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

故 $V^{(1)}$ 对应的矩阵 $D = \text{diag}(0, \dots, 0) = 0$, 从而 $-I + AD = -I$ 是 Hurwitz 矩阵, 由定理 1 的 1) 知, 平衡点 $x = x^*$ 在 $V^{(1)}$ 内条件指数稳定. 证毕.

仿定理 2 的证明, 不难证明下面的定理 3.

定理 3 设 $x = x^*$ 是 CNN(2) 在区域 $V^{(2)}$ 的平衡点, 不妨设 $V^{(2)} = \{x: |x_i| \geq 1, 1 \leq i \leq n - 1, |x_n| < 1\}$, 则 $x = x^*$ 在 $V^{(2)}$ 内条件指数稳定的充要条件是 $a_{nn} < 1$.

注 3 除上述几种区域外的其它区域中边界平衡点的稳定性分析与定理 2 和定理 3 类似, 只需检验相应于包含平衡点为边界点 2^m 区域的 2^m 个矩阵 $-I + AD$ 的 Hurwitz 性;

注 4 若平衡点为某区域的内点, 由定理 2, 定理 3 和注 3 可知, 仅需检验一个与该区域相对应的矩阵 $-I + AD$ 的稳定性即可, 这是文献[4]中关于平衡点稳定性的结果.

3 例子(Example)

下面构造一个例子应用本文的结果.

例 考虑下面 CNN 系统平衡点的稳定性

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

首先分别在 3 类 $V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)}$ 共 9 个区域中求系统的平衡点, 见图 1 (只标出 P_3, P_5).

$$P_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in V_1^{(3)}, P_2\left(2, \frac{3}{2}\right) \in V_1^{(1)},$$

$$P_3\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in V_2^{(1)}, P_4\left(\frac{3}{2}, 0\right) \in V_4^{(2)},$$

$$P_5\left(1, -\frac{3}{2}\right) \in V_4^{(1)}.$$

其中 P_1, P_2, P_4 为相应区域的内点, 容易判定分别为不稳定、区域指数稳定、不稳定^[2].

对于 $P_3\left(-1, \frac{5}{2}\right)$, 它是区域 $V_2^{(1)}$ 与 $V_1^{(2)}$ 的边界点, 根据定理 2, 它在区域 $V_2^{(1)}$ 内条件指数稳定; 在区域 $V_1^{(2)}$ 内, 矩阵 $D = \text{diag}(\varphi(z_1), \sigma(5/2))$ 中对应的 $z_1 > 0$ (因为区域 $V_1^{(2)}$ 在平衡点 P_3 的右方), 即

$D = \text{diag}(1, 0)$, 从而

$$-I + AD = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

该矩阵是不稳定矩阵, 从而轨线在该区域内沿两个方向趋近平衡点 P_3 , 而沿别的方向远离它. 因此平衡点 P_3 是不稳定的;

平衡点 $P_5\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ 是 $V_3^{(2)}$ 与 $V_4^{(1)}$ 的边界点. 在 $V_3^{(2)}$ 与 $V_4^{(1)}$ 内, 对应的矩阵 D 分别为 $\text{diag}(1, 0)$ 和 $\text{diag}(0, 0)$, 从而对应的矩阵 $-I + AD$ 分别为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \text{ 与 } -I,$$

分别是不稳定和稳定的, 故平衡点 P_5 是不稳定的.

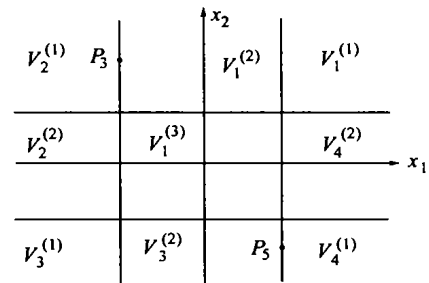


图 1 例的分区域

Fig. 1 The figure of the example

4 结论(Conclusions)

通过以上分析, 可以得到判定细胞神经网络 CNN 平衡点稳定性的方法如下:

- 1) 分区域求出所有平衡点;
- 2) 对平衡点是区域内点的情况, 由注 3 知只需判定一个矩阵 $-I + AD$ 的稳定性;

3) 对平衡点是几个区域的边界点的情况, 可以根据定理 2, 定理 3 和注 3 讨论各个相邻区域的条件稳定性, 然后综合各个区域的情况, 给出平衡点稳定与否判断; 或根据定理 1 及其推论直接判断平衡点稳定性.

参考文献(References):

[1] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: theory [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1988, 35(10):1257 - 1272.
 [2] LIAO Xiaoxin. Mathematical theory of cellular neural networks (2) [J]. *Science in China (A)*, 1994, 24(10):1037 - 1046.
 [3] CAO Jinde, ZHOU Dongming. Stability analysis of delayed cellular neural networks [J]. *Neural Networks*, 1998, 11(9):1601 - 1605.

- [4] XU Bingzheng, ZHANG Bailing, WEI Gang. *Theory and Applications of Neural Networks* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1994 (in Chinese).
- [5] FANG Yuguang, KINCAID T G. Stability analysis of dynamical neural networks [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1996, 7(4): 996 - 1006.

附录 A (Appendix A)

定义 A n 阶实方阵 A 在某种诱导范数 $\|\cdot\|$ 下矩阵测度定义为

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \theta A\| - I}{\theta}$$

其中 I 为单位矩阵.

引理 A 关于矩阵测度有以下性质:

- 1) $\mu(0) = 0, \mu(I) = 1, \mu(cA) = c\mu(A), c > 0$;
- 2) $\mu(A) \leq \|A\|, \mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B)$;

3) 矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的充分条件是存在某矩阵测度 $\mu(\cdot)$, 使 $\mu(A) < 0$;

4) $\mu_p^1(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \{ \operatorname{Re}(a_{jj}) + \sum_{i \neq j} \frac{p_i}{p_j} |a_{ij}| \}$ 是对应向量范数 $\|x\| = \|Px\|_1$ 的矩阵测度, 其中矩阵 $P = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 为正定矩阵.

引理 A 的证明见文献[5].

作者简介:

廖伍代 (1963 —), 男, 1993 年于华中师范大学运筹学与控制理论专业获硕士学位. 现为华中科技大学自动控制系博士研究生. 研究方向: 随机系统稳定性和人工神经网络渐近行为分析. Email: wdliao@163.com;

廖晓昕 (1938 —), 男, 华中科技大学自动控制系教授, 博士生导师. 研究领域: 智能控制系统稳定性, 非线性与复杂系统及神经网络理论. Email: liaoxx@21cn.com

(上接第 88 页)

- [5] VIJAYKUMAR G, ANDREW G B, RODERIC A G. Learning admittance mapping for force-guided assembly [A]. *Proc of the IEEE Int Conference on Robotics and Automation* [C]. San Diego: IEEE Computer Society Press, 1994, 2633 - 2638.
- [6] SERAJI H, COLBAUGH R. Force tracking in impedance control [J]. *Int J of Robotics Research*, 1997, 16(1): 97 - 117.
- [7] FIELD G, STEPANENKO Y. Model reference impedance control of robotic manipulators [A]. *Proc of the IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing* [C]. Victoria: IEEE Computer Society Press, 1993, 614 - 617.

作者简介:

芦俊 (1974 —), 男, 1999 年于甘肃工业大学机电工程学院获硕士学位, 现为东南大学机械工程系博士生. 主要研究方向为机器人控制, 机电一体化. Email: luju3205@sina.com;

颜景平 (1934 —), 男, 1953 年毕业于南京工学院机械工程系, 现为东南大学机械工程系教授, 博士生导师. 主要研究方向为机器人运动与控制, 机电一体化;

陈俊杰 (1958 —), 男, 1982 年毕业于南京工学院自动控制工程系, 1996 年 ~ 1997 年东南大学访问学者. 现为东南大学仪器科学与工程系博士生. 主要研究方向为测控技术及智能系统, 机器人控制.