文章编号：1000-8152(2003)01-0133-03

离散时间代数 Riccati 方程解矩阵的特征值分析

李学俊，张凯院，张 骏，戴冠中
（西北工业大学 自动控制系，陕西 西安 710072）

摘要：针对离散时间代数 Riccati 方程 DTARE 的唯一对称正定解 X 的特征值，通过矩阵的恒等变形，给出了一种新的分析方法．最后获得解 X 的极值特征值的上界和下界，以及解 X 的特征值的和——迹的一个下界．

关键词：离散时间代数 Riccati 方程；对称正定解；极值特征值；迹
中图分类号：O241.8 **文献标识码**：A

Eigenvalue analysis of solutions to discrete time algebraic Riccati equation

LI Xue-jun, ZHANG Kai-yuan, ZHANG Jun, DAI Guan-zhong
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Shanxi Xi'an 710072, China)

Abstract: The problem of eigenvalue for the single symmetric positive definite solution X of discrete time algebra Riccati equation (DTARE) is studied. Through identical deformation of matrix, a new analytical method is given. Finally, the upper and the lower bound of the extreme eigenvalue for the solution X of DTARE and a lower bound of trace for the solution X of DTARE can be obtained.

Key words: discrete time algebra Riccati equation; symmetrical positive definite solution; extremal eigenvalue; trace

1 引言(Introduction)

离散时间代数 Riccati 方程 DTARE(discrete time algebra Riccati equation)

$$A^{\mathrm{T}}XA - X - (A^{\mathrm{T}}XB + L)(R + B^{\mathrm{T}}XB)^{-1}(B^{\mathrm{T}}XA + L^{\mathrm{T}}) + Q = 0. \tag{1}$$

其中 $A,Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, B,L \in \mathbb{R}^{n\times m}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}$，$R$ 和 $Q - LR^{-1}L^{\mathrm{T}}$ 都是对称正定矩阵，在控制理论中占有核心地位．从应用角度看，主要关心 DTARE 的对称正定解 X．

近二十年来，人们对 DTARE 的兴趣，从其对称正定解 X 本身的研究[1]，逐渐转移到对其解矩阵 X 特征值的存在范围及“大小”的研究估计上[2]，在许多控制应用中，都需要 DTARE 的解矩阵 X 的任意特征值的界、极值特征值的界以及特征值的和——迹的界．当然，所有这些量都可以由其解 X 本身的界推导而得，但人们更感兴趣的是直接计算这些量的公式．

文中约定，$\delta_i(X)$ 和 $\lambda_i(X)$ 分别表示 n 阶实方阵 X 的第 i 个奇异值和第 i 个特征值．特别称 $\lambda_1(X)$ 为 n 阶实方阵 X 的极大特征值，$\lambda_n(X)$ 为极小特征值，统称为极值特征值．用 $\Omega(X)$ 表示 n 阶实方阵 X 的所有特征值向量的集合．

2 预备工作(Preliminaries)

改写 DTARE(1)为

$$\begin{aligned}X =\ & A^{\mathrm{T}}XA-(A^{\mathrm{T}}XB + L)(R+B^{\mathrm{T}}XB)^{-1}(L^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}XA)+Q = \\ & A^{\mathrm{T}}XA - A^{\mathrm{T}}XB(R + B^{\mathrm{T}}XB)^{-1}B^{\mathrm{T}}XA - A^{\mathrm{T}}XB(R + B^{\mathrm{T}}XB)^{-1}L^{\mathrm{T}} - L(R + B^{\mathrm{T}}XB)^{-1}B^{\mathrm{T}}XA - \\ & L(R + B^{\mathrm{T}}XB)^{-1}L^{\mathrm{T}} + Q.\end{aligned}$$

利用矩阵恒等式

$$(U^{-1} + ST^{-1}S^{\mathrm{T}})^{-1} = U - US(T + S^{\mathrm{T}}US)^{-1}S^{\mathrm{T}}U,$$

对上式进行恒等变形，于是可得下面的定理．

定理 1 DTARE(1)等价于

$$X = (A - BR^{-1}L^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(X^{-1} + BR^{-1}B^{\mathrm{T}})^{-1}(A - BR^{-1}L^{\mathrm{T}}) + (Q - LR^{-1}L^{\mathrm{T}}). \tag{2}$$

引理 1[3] 设 n 阶实对称矩阵 Y,Z，则对于 $1 \leqslant i,j \leqslant n$，下列不等式成立

$$\lambda_{i+j-1}(Y + Z) \leqslant \lambda_j(Y) + \lambda_i(Z),\ i + j \leqslant n + 1,$$
$$\lambda_{i+j-n}(Y + Z) \geqslant \lambda_j(Y) + \lambda_i(Z),\ i + j \geqslant n + 1.$$

收稿日期：2000-12-06；收修改稿日期：2002-03-18．

引理 2[4] 对于 n 阶实对称矩阵 Y,Z，有 $\lambda_i(YZ)=\lambda_i(ZY)$.

引理 3 设 n 阶实对称正定矩阵 Y, n 阶实对称半正定矩阵 Z, 则有

$$\lambda_1(YZ)\leqslant\lambda_1(Y)\lambda_1(Z),\ \lambda_n(YZ)\geqslant\lambda_n(Y)\lambda_n(Z).$$

证 考虑广义特征值问题 $Zx=\lambda Y^{-1}x$ 等价于常义特征值问题 $YZx=\lambda x$, 其中 $x\in\mathbb{R}^n$, 根据 Rayleigh 商的极性[5], 于是可证得.

引理 4 设 n 阶实对称半正定矩阵 Y, n 阶实对称正定矩阵 Z, 则有

$$\mathrm{tr}(YZ)\geqslant\mathrm{tr}(Y)\lambda_n(Z).$$

证 首先对 n 阶实对称半正定矩阵 Y 进行谱分解[6], 然后根据 Rayleigh 商的极值性质可证得.

3 解矩阵的特征值(Eigenvalue of solutions matrix)

这一节中, 将给出 DTARE (1)的对称正定解 X 的极值特征值的上、下界公式及其证明, 以及解 X 的迹的一个下界公式及其证明.

定理 2 设 n 阶方阵 X 是 DTARE(1)的对称正定解, $Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}$ 是对称正定矩阵, 则 X 的极值特征值的上、下界分别为

$$\lambda_1(X)\geqslant\frac{2\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})}{\beta_3+[\beta_3^2+4\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})]^{1/2}},\tag{3}$$

$$\lambda_n(X)\geqslant\frac{2\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})}{\beta_1+[\beta_1^2+4\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})]^{1/2}},\tag{4}$$

$$\lambda_n(X)\leqslant\frac{2\lambda_1(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})}{q_2},\ q_2\neq0,\tag{5}$$

$$\lambda_1(X)\leqslant\frac{2\lambda_1(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})}{q_4},\ q_4\neq0.\tag{6}$$

其中

$$q_i=\beta_i+[\beta_i^2+4\lambda_n(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_1(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})]^{1/2},\quad i=2,4,\tag{7}$$

$$\beta_1=1-\delta_n^2(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})-\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}),\tag{8}$$

$$\beta_2=1-\gamma_n^2-\lambda_n(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_1(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}),\tag{9}$$

$$\beta_3=1-\gamma_1^2-\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}),\tag{10}$$

$$\beta_4=1-\delta_1^2(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})-\lambda_n(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_1(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}),\tag{11}$$

$$\gamma_i=|\lambda_i(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})|,\tag{12}$$

$$\gamma_1=\max_i\gamma_i,\ \gamma_n=\min_i\gamma_i.\tag{13}$$

证 设 $\zeta\in\Omega(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})$, 对 DTARE(1)的等价方程(2)式两端同时左乘 ζ^H, 右乘 ζ, 其中 $\bar{\lambda}_i(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})$ 表示矩阵 $A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}}$ 的第 i 个特征值的共轭复数, 于是可得

$$\frac{\zeta^H[X-(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})]\zeta}{\zeta^H(X^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\zeta}=\bar{\lambda}_i(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})\lambda_i(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})=\gamma_i^2.$$

考虑广义特征值的性质以及特征值 Rayleigh 商的极性[5], 有

$$\lambda_n\{(I+X^{1/2}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}X^{1/2})[I-X^{-1/2}(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})X^{-1/2}]\}\leqslant\gamma_i^2\leqslant\lambda_1\{(I+X^{1/2}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}X^{1/2})[I-X^{-1/2}(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})X^{-1/2}]\}.$$

从而根据引理 1 及引理 3, 并整理得到 $1/\lambda_1(X)$ 的二次不等式

$$\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})\frac{1}{\lambda_1^2(X)}-\beta_3\frac{1}{\lambda_1(X)}-\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\leqslant0.$$

其中 β_3 如(10) 式定义. 解这个二次不等式, 由于 $BR^{-1}B^{\mathrm{T}}$ 是对称半正定矩阵, $Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}$ 是对称正定矩阵, 所以证得(3)式. 类似可证明(5)式.

下面证明式(4). 由 DTARE(1)的等价形式(2)及引理 2 可得

$$\lambda_n(X)\geqslant\lambda_n[(X^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}})^{-1}(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})]+\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}).$$

其中 $(X^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}})^{-1}$ 是对称正定矩阵, $(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})$ 是对称半正定矩阵, 根据引理 1 及引理 3, 并整理可得关于 $1/\lambda_n(X)$ 的二次不等式, 解这个不等式得式(4). 类似可证明式(6).

定理 3 设 n 阶方阵 X 是 DTARE(1)的对称正定解, 则有

$$\mathrm{tr}(X)\geqslant\mathrm{tr}(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})+\frac{\mathrm{tr}\,|(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})|\,\alpha}{1+\alpha\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})},\tag{14}$$

$$\alpha=\frac{2\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})}{\beta_1+[\beta_1^2+4\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})]^{1/2}},\tag{15}$$

$$\beta=1-\delta_n^2(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})-\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})\lambda_n(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}}).\tag{16}$$

证 DTARE (1)的等价方程(2)式两端同时求迹, 并根据引理 1 及引理 4, 有

$$\operatorname{tr}(X)-\operatorname{tr}(Q-LR^{-1}L^{\mathrm{T}})\geqslant \frac{\operatorname{tr}\mid(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A-BR^{-1}L^{\mathrm{T}})\mid}{1/\lambda_n(X)+\lambda_1(BR^{-1}B^{\mathrm{T}})}.\tag{17}$$

将式(4)代入上式,可以证得.

例如在 DTARE (1)中取矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ -0.6 & 0.0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1.0 & 0.3\\ 0.0 & 1.4\end{bmatrix},$$

$$L=\begin{bmatrix}2.0 & 0.5\\ 1.0 & 1.3\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}9.0 & 1.0\\ 1.0 & 3.0\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix}3.0 & 1.0\\ 1.0 & 2.0\end{bmatrix},$$

其极值特征值为 2.448 和 7.891,通过定理 2 给的公式,可以获得

$$2.082\leqslant\lambda_n(X)\ 和\ \lambda_1(X)\leqslant 9.685.$$

4 结论(Conclusion)

到目前为止,有关代数 Riccati 方程的研究及其可能的应用,大多数是对连续时间代数 Riccati 方程进行的,而对离散时间代数 Riccati 方程的研究结果还比较少.即使是针对离散时间代数 Riccati 方程的讨论,也多集中在某一特殊形式,比如使得 DTARE (1)中 $B=0,R=I$ 或者 $L=0$. 本文讨论的是具有普遍性的 DTARE(1),研究了 DTARE(1)的唯一对称正定解 X 的特征值的“范围”,得到了解 X 的极值特征值的上界和下界,以及解 X 的特征值之和——迹的下界.

参考文献(References):

[1] IONESECN V, WEISS M. General matrix pencil techniques for the solution of algebraic Riccati equation: a unified approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1085 - 1097.

[2] KIN S W, PARK P G, KWON W H. Lower bounds for the trace of the solution of the discrete algebraic Riccati equation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(2): 312 - 314.

[3] AMIR-MOEZ A R. Extreme properties of eigenvalues of a Hermitian transfermation and singular values of the sum and product of linear transformation [J]. *Duke Mathematical Journal*, 1956, 23(2): 463 - 476.

[4] MACFARLANE A W, OLKIN I. *Inequlities: Theory of Majorization and Its Application* [M]. New York: Academic, 1979.

[5] WIKINSON J H. *The Problem of Algebraic Eigenvalue* [M]. Beijing: Science Press, 1987 (in Chinese).

[6] CHENG Yunpeng. *Matrix Theory* [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1997 (in Chinese).

作者简介:

李学俊　(1969 —),女,1999 年 4 月年获得西北工业大学应用数学硕士学位,现为西北工业大学自动控制系博士生.主要研究方向:控制与网络安全.　Email: lixuejun@mail.nwpu.edu.cn;

张凯院　(1954 —),男,1985 年获西北工业大学应用数学硕士学位,1991 年至 1993 年在德国 Goettingen 大学作访问学者.现工作于西北工业大学应用数学系,发表学术论文 10 余篇.主要研究方向:计算数学方面;

张　骏　(1964 —),男,博士,现为西北工业大学自动控制系副教授.主要研究方向:模糊神经网络,模糊控制与信息安全;

戴冠中　(1937 —),男,西北工业大学自动控制系教授,博士生导师.主要研究领域为:大系统理论,智能控制,非线性控制,网络安全等.