第 20 卷第 1 期
2003 年 2 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.20 No.1
Feb. 2003

文章编号：1000-8152(2003)01-0136-03

有限字长数字控制器的实稳定半径最优实现

徐巍华，胡协和，王跃宣，吴　俊，褚　健
（浙江大学 先进控制研究所 工业控制技术国家重点实验室，浙江 杭州 310027）

摘要：主要讨论了有限字长（FWL）数字控制器的一种最优实现问题，考察了一个典型的采样反馈系统，将实有理稳定半径测度应用到有限字长数字控制器的实现问题中，对实稳定半径测度进行优化，并由此得到控制器的最优状态变换矩阵和最优结构及最小字长.数值算例验证了优化的结果是有效的，优化后较小字长的控制器就可以使系统取得较大的稳定半径.

关键词：有限字长（FWL）；稳定半径；最优化；数字控制器

中图分类号：TP13　　　**文献标识码**：A

Optimal realization of FWL controller with real stability radius considerations

XU Wei-hua, HU Xie-he, WANG Yue-xuan, WU Jun, CHU Jian
(National Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Zhejiang Hangzhou 310027, China)

Abstract: An optimal realization algorithm is discussed for a finite-word-length (FWL) digital controller in a typical sampled-data feedback system. The FWL controller optimization is realized through a real closed-loop stability radius measure. The optimization produced an optimal state transformation matrix as well as the optimal structure and minimum word-length of the controller, The numerical example proves that a larger stability radius can be obtained using an optimal controller with smaller word length.

Key words: finit word length (FWL); stability radius; optimization; digital controller

1　引言(Introduction)

随着数字控制器的广泛应用，人们越来越注意到某些工业控制设计中有限字长数字控制器的实现和设计问题.众所周知，定点计算与浮点运算相比，具有速度快、存储容量低等优点，短字长的数字控制器则意味着低成本，但精度不高，会使系统性能恶化.因此，在实时性要求较高的场合（如汽车、机器人、交流电机等），以及在数字音响、数字彩电等采用专用控制芯片的大批量生产行业，FWL 控制问题显得尤为突出.目前这方面的研究在国内外开展得都还很不够.

本文考虑一个典型的采样反馈系统（见图 1），其中 $P(s)$ 是一个连续时间的有限维线性系统，$K(z)$ 是离散时间的有限维线性控制器，H_h 和 S_h 分别表示保持器和采样器（采样周期为 h），W 是一个严格正定稳定滤波器.本文研究数字控制器的有限字长实现对反馈系统稳定性的影响.

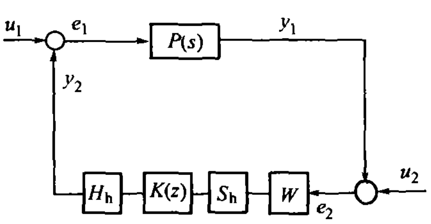

图 1　采样反馈系统方块图
Fig. 1　Block-diagram of a sampled-data feedback system

假设在控制器实现过程中由于有限字长算法造成的误差是随机的，可以从统计的观点来估算它们对稳定性的影响[1]. I.J.Fialho 等人在文献[1]中提出 FWL 数字控制器设计过程中系统的复稳定半径测度，进而在文献[2]中对该测度进行优化，得到最优状态变换矩阵 T_{opt}. 但实际上，控制器字长都是实数，所以本文将把 Qiu Li 等人在文献[3]中提出的实稳定半径应用到有限字长数字控制器的实现问题研究中来，对实稳定半径测度进行优化，得到最优变换矩阵 T_{opt}. 优化和算例验证了本文的工作.

收稿日期：2001-01-04；收修改稿日期：2001-12-07.
基金项目：国家自然科学基金(60174026)；浙江省自然科学基金(699085)；高等学院博士学科点专项科研基金(1999033571)资助项目.

2 实稳定半径(Real stability radius)

根据文献[4],假设 WP 没有不稳定的零极点对消,并且采样频率是非病态的,那么反馈系统$[P, H_hKS_hW]$ 是 L_2- 输入输出稳定当且仅当离散时间反馈系统$[S_hWPH_h, K]$稳定.$[S_hPWH_h, K]$稳定当且仅当其相应的状态矩阵是稳定的,即所有的特征值都在单位圆盘 $D:=\{z: |z|<1\}$ 内.

设$[A_p,B_p,C_p,0]=C_p(zI-A_p)^{-1}B_p$ 和$[A_c, B_c,C_c,D_c]=D_c+C_c(zI-A_c)^{-1}B_c$ 分别是离散化的连续时间对象 WP 和离散时间控制器 K 的最小实现.为了简化符号,这里假设它们都是单输入-单输出(SISO)系统.对于这个离散时间闭环系统的一个初始实现 $[A,B_{cl},C_{cl},D_{cl}]$,

$$A=\bar{A}_0+BMC. \tag{1}$$

其中

$$\bar{A}_0=\begin{bmatrix}A_p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}B_p & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}C_p & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}D_c & C_c\\ B_c & A_c\end{bmatrix}.$$

由于数字控制器的精度有限,用 $M+\Delta$ 来表示系统矩阵 M,矩阵 Δ 包含了控制器实现中所有的系数截断误差.相应地,A 摄动到 $A+B\Delta C$.定义 $\bar{\sigma}(\Delta)$ 为 Δ 的最大奇异值,可以定义并计算系统的实有理半径 r_R[3]:

· $r_R(A,B,C):=\inf\{\bar{\sigma}(\Delta):A+B\Delta C$ 不稳定$\}$. (2)

· $r_R(A,B,C)=(\sup_{z\in\partial D}\mu[C(zI-A)^{-1}B])^{-1}$. (3)

其中

$$\mu(X)=\inf_{\gamma\in(0,1]}\bar{\sigma}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}X & -\gamma\mathrm{Im}X\\ \gamma^{-1}\mathrm{Im}X & \mathrm{Re}X\end{pmatrix}.$$

本文中,Δ 是一个实矩阵.根据文献[5],W_s 位字长就可以保证系统的鲁棒稳定性,

$$W_s=\left[\log_2\frac{2\sqrt{\frac{N}{2}}+\sqrt{\frac{N}{45}}}{r_R}\right]. \tag{4}$$

N 是 Δ 中非零元素的个数.

显然 r_R 越大,W_s 越小,也就是说保证系统稳定所需的字长越少.

3 最优实现(Optimal structures)

设 $[A_0,B_0,C_0,D_0]$ 为数字控制器 $K(z)$ 的一个初始实现.对其作用一个非奇异变换 T,得 $A_c=T^{-1}A_0T$, $B_c=T^{-1}B_0$, $C_c=C_0T$, $D_c=D_0$.对应的 $A+B\Delta C$ 变换为

$$\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & T^{-1}\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}+B\Delta C=A_1(T)+B\Delta C. \tag{5}$$

把式(5)代入式(3),显然,T 将影响 r_R 的大小.作者希望找到一个最优变换矩阵 T_{opt},使得 r_R 最大:

$$\max_{\det T\neq 0} r_R(A_1(T),B,C). \tag{6}$$

这是一个凸优化问题,由于很难得到解析解,可用单纯形搜索法得到 T_{opt}.

4 数值算例(A numerical example)

本文用一个轧钢系统的 PID 控制器来说明上述方法,并得到相应的最优有限字长实现.系统的连续时间线性化惯性模型 $P(s)$ 为

$$A_p=\begin{bmatrix}0 & -9763.7203 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 13424.9859 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_p=\begin{bmatrix}249.03\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ C_p=[1\ \ 0\ \ 0].$$

取采样周期 $h=0.001$s,$P(s)$ 离散化得 $P(z)$

$$A_p=\begin{bmatrix}0.9951 & -9.7260 & 0.0049\\ 0.0010 & 0.9884 & -0.0010\\ 0.0067 & 13.3732 & 0.9933\end{bmatrix},$$

$$B_p=\begin{bmatrix}0.2486\\ 0.0001\\ 0.0006\end{bmatrix},\ C_p=[1\ \ 0\ \ 0].$$

数字 PID 控制器 $K(z)=-\dfrac{0.01426}{z-1}-\dfrac{1.1956}{z-0.3333}+1.3512$ 的初始实现 $K_0(z)$ 设为

$$A_c^0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.3333\end{bmatrix},\ B_c^0=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix},$$

$$C_c^0=[0.01426\ \ 1.1956],\ D_c^0=1.3512,$$

则根据式(1),可以计算得离散时间闭环系统的系统矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1.3311 & -9.7260 & 0.0049 & -0.4459 & -0.0035\\ 0.0012 & 0.9884 & -0.0010 & -0.0002 & -0.0000\\ 0.0075 & 13.3732 & 0.9933 & -0.0010 & -0.0000\\ 0.6666 & 0 & 0 & 0.3333 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

且

$$B=\begin{bmatrix}0.2486 & 0 & 0\\ 0.0001 & 0 & 0\\ 0.0006 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

由式(3)、式(4),得 $r_R = 0.00491$,控制器字长 $W_s = 9$.

计算得最优变换矩阵

$$T_{opt}=\begin{bmatrix}-0.5385 & -0.0483\\ 0.0219 & 8.2466\end{bmatrix}.$$

控制器的最优实现 $K_{opt}(z)$ 为

$$A_c^{opt}=\begin{bmatrix}0.3332 & -0.0599\\ 0.0018 & 1.0001\end{bmatrix},\ B_c^{opt}=\begin{bmatrix}-1.2492\\ 0.1258\end{bmatrix},$$

$$C_c^{opt}=[0.9654\quad -0.0309],\ D_c^{opt}=1.3512.$$

稳定半径为 $r_R^{opt} = 0.0263$,控制器字长 $W_s^{opt} = 7$.

显然,最优实现 $K_{opt}(z)$ 使得系统能使用较小字长的控制器就可以取得更大的稳定半径.

5 结论(Conclusions)

本文考察了有限字长数字控制器的一类实现问题,将实稳定半径问题应用到 FWL 实现问题中,并对该实稳定半径测度进行优化,得到最优变换矩阵 T_{opt} 和控制器的最优结构以及最小字长.数值算例证明了本文的工作是有效的,优化后较小字长的控制器就可以使系统取得较大的稳定半径.

参考文献(References):

[1] FIALHO I J, GEORGIOU T T. On stability and performance of sampled-data systems subject to word-length constraint [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2476 - 2481.

[2] FIALHO I J, GEORGIOU T T. Optimal finite word-length digital controller realization [A]. *Proceedings of the American Control Conference* [C]. New Jersey, USA: American Automatic Control Council, 1999. 4326 - 4327.

[3] QIU Li, BEMHARDSSON B, RANTZER A, et al. On the real structured stability radius [A]. *Proceedings of the 12th World IFAC Congress* [C]. Oxford, UK: Elsevier Science Ltd, 1993, 71 - 78.

[4] CHEN Tongwen, FRANCIS B A. H_2-optimal sampled-data control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(4): 387 - 397.

[5] MORONEY P, WILLSKY A S, HOUPT P K. The digital implementation of control compensators: the coefficient wordlength issue [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1980, 25(4): 621 - 630.

作者简介:

徐巍华 (1976 —),女,现为浙江大学先进控制研究所博士研究生.研究方向为先进控制中数字控制器的有限字长问题,线性控制器设计理论及应用. Email: whxu@iipc.zju.edu.cn;

胡协和 (1958 —),男,1978 年 10 月至 1982 年 7 月在浙江大学化工自动化专业学习,获学士学位,1983 年 9 月至 1986 年 7 月在浙江大学电机系攻读硕士学位,1986 年 8 月至今在浙江大学电机系、控制系任教,1992 年晋升为副教授.主要从事控制理论,计算机原理及应用等方面的教学和科研工作.发表相关论文数十篇;

王跃宣 (1975 —),女,现为浙江大学先进控制研究所博士研究生.研究方向:先进控制策略与软件实现,软测量与建模、优化问题;

吴 俊 (1967 —),男,分别于 1989 年和 1994 年在华中理工大学工业自动化专业获学士和博士学位,1994 年至 1996 年在浙江大学工业控制技术研究所做博士后研究工作,现为浙江大学先进控制研究所副研究员.主要研究兴趣是鲁棒控制和计算机控制;

褚 健 (1963 —),男,1982 年毕业于浙江大学,1986 年 ~ 1989 年留学日本京都大学,1989 年获工学博士学位,现为浙江大学教授、博士生导师、"长江学者奖励计划"特聘教授.主要研究方向为时滞系统控制,非线性控制,鲁棒控制等理论与应用.