文章编号: 1000 - 8152(2003)03 - 0351 - 10

弹性梁点控制、点测量与指数镇定

姚翠珍[1], 郭宝珠[2]

(1.北京理工大学 应用数学系,北京 100081; 2.中国科学院 数学与系统科学研究院,北京 100080)

摘要: 运用近年来发展的基理论对弹性梁点测量、点控制做一个系统的处理,得到了用速度线性反馈可实现系统的指数镇定的条件且指数镇定当且仅当系统精确可控.在指数镇定的情况下闭环系统的广义本征函数生成能量空间的 Riesz 基且谱确定增长条件成立.

关键词: 分布参数控制; Riesz 基; 谱确定增长条件; 稳定性

中图分类号: O175.13,TP273.02 **文献标识码**: A

Pointwise measure, control and stabilization of elastic beams

YAO Cui-zhen[1], GUO Bao-zhu[2]

(1.Department of Applied Mathematics, Beijing Institiute of Technology, Beijing 100081,China;

2.Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080,China)

Abstract: The pointwise measure, control and stabilization based on the Riesz basis approach developed recently is studied. The condition for the exponential stability under linear feedback of output of velocity is derived. The system is proved to be exponentially stable if and only if the open loop system is exactly controllable. Under the exponential stability condition, the system is further shown to be Riesz spectral system and the spectrum-determined growth condition is therefore verified.

Key words: distributed system; Riesz basis; spectrum-determined growth condition; stability

1 引言(Introduction)

细长空间飞行器的振动问题是空间技术中充分重视的问题,上世纪 70 年代末、80 年代初在我国出现大量运用分布参数系统理论处理弹性振动的工作[1~3].由于数学上的困难,这些方法基本上属于分布控制,即运用小区间上平均位移速度、角速度反馈镇定.然而工程上可易实行的是集中力和力矩的量测与控制.为了克服数学上的困难,文献[4]第一次将能量空间扩展为阴范空间,从而将阴范空间作为系统的状态空间,在阴范空间中分析系统的稳定性.本文更关心系统在能量空间的渐近性质,这是因为在能量空间中,状态变量的范数即为弹性振动的振动能量.20 世纪 80 年代以来发展起来的容许(admissible)控制理论[5,6]可以对这种无界控制的系统在能量空间中得到很好的解释.一般的线性无穷维系统可表示为 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$. 这里 A 生成 Hilbert 空间 H 上的 C_0-半群, B 是控制 Hilbert 空间 U 到 H 的线性算子, C 是 H 到输出 Hilbert 空间 Y 的线性算子. 当 B, C 无界时, 为了使系统在 H 中适定, 要求 B, C 为可容许的[5].

本文试图运用近年来发展的无界算子扰动的 Riesz 基理论对点测量、点控制的弹性系统镇定问题给出一个系统的分析,这些工作包括: a) 系统在能量空间中的适定性; b) 系统的可观与可控性; c) 闭环系统的稳定性,特别是指数稳定; d)闭环系统谱确定增长条件与 Riesz 基生成.特别应当指出的是 d),对一个无限维系统来说,谱确定增长条件并不总是成立的,文献[7]曾给出一个低阶微分算子扰动的反例.但对振动系统来说,谱确定增长条件是在工程上普遍接受的事实,然而长期以来却存在理论证明的困难.实际上从文献[8]开始,形如 $A + f(\cdot)b$ 的无条件基理论得到了广泛的研究[9,10],这里 A 是$[D]$-类算子, $f(\cdot)$ 为扰动, b 为固定元.以往的研究总假设 b 有界, f 无界如文献[11]或当 b 无界时f 为有界泛函如文献[10].然而对点测量、点控制的弹性系统来说, f 和 b 均为无界.理论上对这

收稿日期:2001 - 10 - 19; 收修改稿日期:2002 - 05 - 08.
基金项目:国家自然科学基金(60174008)资助项目.

类系统的适定性研究是近年来运用频域法发展的所谓正规系统理论(regular system)[12].本文则运用近年来发展的基理论[13]对弹性梁点测量、点控制做一个系统的处理.本文的方法不同于文献[14],在那里需要求出特征方程和特征函数的表达式因此涉及很长的计算,且在验证基生成前不能确定谱的渐近展开式.这里运用渐近分析方法[15],简单地得到谱的渐近展开式,极大的简化了文献[16]仅关于谱的估计,得到了用速度线性反馈可实现系统的指数镇定的条件且指数镇定当且仅当系统精确可控.在指数镇定的情况下闭环系统的广义本征函数生成能量空间的 Riesz 基且谱确定增长条件成立.

2 适定性、可控性及可观性(Well-posedness, controllability and observability)

点控制的细长空间飞行器的振动可用两端自由(以下的方法也可用于其它边界条件)的 Euler-Bernoulli 梁来近似描述[1]:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t)+y_{xxxx}(x,t)+\delta(x-d)u(t)=0,\ 0<x<1, \\ y_{xx}(0,t)=y_{xxx}(0,t)=y_{xx}(1,t)=y_{xxx}(1,t)=0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0<d<1$ 为传感器的位置, δ 为 Dirac 函数, $u(t)$ 为控制输入.

由于自由梁有刚体运动 $Y_1=(1,0), Y_2=(x,0)$, 取状态空间为能量空间

$$H=\{(f,g)\mid(f,g)\in H^2(0,1)\times L^2(0,1),\ \langle f,1\rangle_{L^2\times L^2}=0, \langle f,x\rangle_{L^2\times L^2}=0\}.$$

其中 H^2 表示 Sobolev 空间. H 由内积诱导的范数定义为

$$\|(f,g)\|^2=\int_0^1[\,|f''(x)|^2+|g(x)|^2]\mathrm{d}x.$$

于是方程(1)可写为 H 上的发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)=AY(t)+bu(t), \\ Y(t)=(y(\cdot,t),y_t(\cdot,t)),\ b=(0,-\delta(\cdot-d)). \end{cases} \tag{2}$$

其中算子 A 定义为

$$\begin{cases} A(f,g)=(g,-f^{(4)}), \\ D(A)=\{(f,g)\in(H^4\times H^2)\cap H\mid f''(i)= f'''(i)=0,\ i=0,1\}. \end{cases} \tag{3}$$

$Y(t)$ 在 H 中的范数即为系统的振动能量

$$E(t)=\frac{1}{2}\|Y(t)\|^2=\frac{1}{2}\int_0^1[\,|y_{xx}(x,t)|^2+|y_t(x,t)|^2]\mathrm{d}x.$$

A 为 H 上的反自伴离散算子(即 $A^*=-A$ 且 A 具紧预解式,实际上 A^{-1} 存在且紧).令 $H_+=[D(A)]$, $H_-=[D(A)]'$, 其中 $[D(A)]$ 为图像空间, $[D(A)]'$ 为其对偶空间,则

$$H_+\subset H\subset H_-. \tag{4}$$

H_- 是 H 中元在范数 $\|A^{-1}F\|$, $F\in H$ 下完备化的 Hilbert 空间[5].于是 $b\in H_-$ 且 b 的对偶为

$$b^*(f,g)=g(d),\ \forall(f,g)\in H_+. \tag{5}$$

引理 1 i) A 的任何本征值是几何单的因而是代数单的.对应于 $\lambda\in\sigma(A)$ 的任何本征函数形如 $(f,\lambda f)$, 其中 f 满足

$$\begin{cases} f^{(4)}(x)+\lambda^2 f(x)=0, \\ f''(i)=f'''(i)=0,\ i=0,1. \end{cases} \tag{6}$$

ii) A 的本征对有如下渐近展开:

$$\begin{cases} \lambda_n=\mathrm{i}\omega_n^2,\ \omega_n=(n+\frac{1}{2})\pi+\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-n}), \\ f_n(x)= \\ \mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})\pi x}+\cos(n+\frac{1}{2})\pi x-\sin(n+\frac{1}{2})\pi x- \\ (-1)^n\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})\pi(1-x)}+\mathcal{O}(n^{-1}), \\ \lambda_n^{-1}f''_n(x)= \\ -i[\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})\pi x}-(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})\pi(1-x)}- \\ \cos(n+\frac{1}{2})\pi x+\sin(n+\frac{1}{2})\pi x]+\mathcal{O}(n^{-1}). \end{cases} \tag{7}$$

证 令 $\lambda=\mathrm{i}\omega^2$, 则

$$\begin{cases} f^{(4)}(x)-\omega^4 f(x)=0, \\ f''(0)=f'''(0)=0 \end{cases}$$

有通解为

$$f(x)=c_1(\cosh\omega x+\cos\omega x)+c_2(\sinh\omega x+\sin\omega x).$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.代入 $f''(1)=f'''(1)=0$ 则知 c_1,c_2 不全为0当且仅当($\omega\neq0$)

$$1-\cosh\omega\cos\omega=0. \tag{8}$$

此时

$$f(x)=\sinh\omega(1-x)-\sin\omega(1-x)+\sinh\omega\cos\omega x-\sin\omega\cosh\omega x-\cosh\omega\sin\omega x+\cos\omega\sinh\omega x. \tag{9}$$

如果 $\lambda\in\sigma(A)$ 对应两个本征函数 $(f_i,\lambda f_i)$, $i=1,2$, 则令 $f=c_1f_1+c_2f_2$, c_1,c_2 不全为零且 $f(1)=0$. 由式(9), $f(1)=2\sinh\omega\cos\omega-2\sin\omega\cosh\omega\doteq0$. 所以, $\sinh^2\omega\cos^2\omega=\sin^2\omega\cosh^2\omega$. 由此及式(8)可得 $(\cosh\omega-1)^2=0$, 从而 $\omega=0$. 矛盾. i)得证. 下证 ii).

因为 A 为反自伴算子, ω 为实数. 又由于本征值共轭出现,故只考虑 $\omega > 0$.将式(8)渐近写为

$$\cos\omega = \mathcal{O}(e^{-\omega}),\ \omega \to \infty,$$

可求得解 $\omega = \omega_n$ 满足

$$\omega_n = (n+\frac{1}{2})\pi + \mathcal{O}(e^{-n}\pi) = (n+\frac{1}{2})\pi + \mathcal{O}(n^{-1}). \tag{10}$$

于是当 $\omega = \omega_n$ 时

$$\begin{aligned}&2e^{-\omega}f(x) = \\ &e^{-\omega x} + \cos\omega x - \sin\omega e^{-\omega(1-x)} - \\ &\sin\omega x + \cos\omega e^{-\omega(1-x)} + \mathcal{O}(e^{-n}) = \\ &e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x} + \cos(n+\frac{1}{2})\pi x - \sin(n+\frac{1}{2})\pi x - \\ &\sin(n+\frac{1}{2})\pi e^{-(n+\frac{1}{2})\pi(1-x)} + \mathcal{O}(n^{-1}).\end{aligned}$$

同理,由

$$\begin{aligned}&\omega^{-2}f''(x) = \\ &\sinh\omega(1-x) + \sin\omega(1-x) - \sinh\omega\cos\omega x - \\ &\sin\omega\cosh\omega x + \cosh\omega\sin\omega x + \cos\omega\sinh\omega x\end{aligned}$$

可得关于 f'' 的估计. 视 $2e^{-\omega}f(x)$ 为 $f_n(x)$ 即得式(7).

定理 1 方程(2)在 H 中存在唯一的 Mild 解

$$Y(t) = e^{At}Y(0) + B(t)u(t). \tag{11}$$

其中 e^{At} 为 A 生成的 C_0- 群, $B(t): L^2(0,1) \to H$ 为下式扩展的一族强连续有界算子

$$\langle B(t)u, F\rangle = \int_0^t \langle b, e^{A^*(t-s)}F\rangle_{H_-\times H_+} u(s)\mathrm{d}s,\ \forall F \in H_+. \tag{12}$$

证 由引理 1, A 的本征对可写为

$$\{(\lambda_n, \Phi_n)\}_{n\in},\ \lambda_n = i\omega_n^2,\ \Phi_n = (\lambda_n^{-1}f_n, f_n). \tag{13}$$

表示非零整数集. $\{\Phi_n)\}_{n\in}$ 生成 H 中的(直交) Riesz 基. 任给 $F \in H, F = \sum_{n\in} a_n\Phi_n$,

$$e^{At}F = \sum_{n\in} a_n e^{\lambda_n t}\Phi_n.$$

回顾文献[5,6], b 称为容许(admissible)的, 如果存在 $T>0$(因而对所有的 $T>0$) $\langle b, e^{A^*t}F\rangle_{H_-\times H_+}$ 可扩展为 H 到 $L^2(0,T)$ 的连续映射. 由于 $A^* = -A$,

$$\langle b, e^{A^*t}F\rangle_{H_-\times H_+} = \sum_{n\in} a_n e^{-\lambda_n t}f_n(d).$$

但由式(7), 对充分大的 n, $|f_n(d)| \leq 3$. 由 Ingham 定理[17],存在 $T>0$,使得

$$\int_0^T |\langle b, e^{A^*t}F\rangle_{H_-\times H_+}|^2\mathrm{d}t \leq C_{T1}\sum_{n\in}|a_nf_n(d)|^2 \leq C_{T2}\sum_{n\in}|a_n|^2 \leq C_T\|F\|_H^2.$$

其中 C_{T1}, C_{T2}, C_T 为常数. 从而 b 为容许(admissible)的. 由文献[6]即得结论.

至此,方程(2)在 H 中的适定性已完全清楚.

由于 A 生成 C_0 群,系统(2)的精确可控性等价于"零可控性". 即系统(2)(或 (A,b))称为在 $[0,T]$, $T>0$ 上精确可控,如果对任意的 $Y(0) \in H$, 存在 $u(t) \in L^2(0,T)$ 使得方程(2)的解满足 $Y(T) = 0$.

。d 称为系统(1)的节点(nodal point). 如果对 A 的某一本征函数 $(f, \lambda f)$, $\lambda \in \sigma(A)$, d 满足 $f(d) = 0$. 显然,点镇定器不能置于节点.

定理 2 假设 d 不为系统(1)的节点,则系统(2)对某 $T>0$ 于 $[0,T]$ 精确可控当且仅当对某一 $c>0$,

$$1-\sin(2n+1)d\pi > c > 0,\ 对充分大的\ n\ 成立. \tag{14}$$

证 由对偶原理, (A,b) 精确可控当且仅当 $(A^*, b^*) = (-A, b^*)$ 精确可观:即存在[18] $T>0$, $C_T > 0$,

$$\int_0^T |b^*e^{A^*t}F|^2\mathrm{d}t \geq C_T\|F\|^2,\ \forall F \in H. \tag{15}$$

先证必要性. 因为 e^{A^*t} 为 C_0- 群, 由文献[18], 如果(A^*, b^*) 精确可观,则存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \leq |b^*\Phi_n(x)| = |f_n(d)| \leq C_2.$$

再由式(7),对充分大的 n, $|f_n(d)|^2 = 1 - \sin(2n+1)d + \mathcal{O}(n^{-1}) > C_1$. 所以式(14)成立.

再证充分性. 设 $F \in H, F = \sum_{n\in} a_n\Phi_n$, 则

$$b^*e^{A^*t}F = \sum_{n\in} a_n e^{-\lambda_n t}f_n(d).$$

由引理 1 及 Ingham 定理[17],存在 $T>0$,使得

$$\int_0^T |b^*e^{A^*t}F|^2\mathrm{d}t \geq C_{T1}\sum_{n\in}|a_nf_n(d)|^2,\ C_{T1} > 0.$$

因为对充分大的 n, $|f_n(d)|^2 = 1 - \sin(2n-1)d + \mathcal{O}(n^{-1}) \geq c/2 > 0$. 又由于 d 不为节点, $|f_n(d)| \neq 0$, 所以

$$\int_0^T |b^*e^{A^*t}F|^2\mathrm{d}t \geq C_{T0}\sum_{n\in}|a_n|^2 \geq C_T\|F\|^2.$$

定理得证.

由定理 2 的证明立刻得到

定理 3 假设 d 不为系统(1)的节点,则观测系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) = AY(t),\ Y(t) = (y(\cdot,t), y_t(\cdot,t)),\\ O(t) = b^*Y(t) = y_t(d),\ b = (0, -\delta(\cdot - d))\end{cases}$$

对某一 $T>0$ 在 $[0,T]$ 上精确可观测当且仅当式

(14)成立.

为了寻求刻化式(14)的条件,需要下面的引理.

引理 2[19] 如果 d 是无理数,则对任意正的 α, N 和 ε, 存在整数 n 和 p 使得 $n > N$ 且

$$|nd - p - \alpha| < \varepsilon.$$

命题 1 条件(14)成立当且仅当

$$d\ \text{为有理数且}\ d \neq \frac{4n+1}{4m+2}, \text{对一切}\ m,n\ \text{成立}. \tag{16}$$

特别当 $d = \dfrac{p}{q}$, p, q 互质且 q 为奇数时式(16)成立.

证 如果 d 为无理数,则由引理 2,对任意的 $0 < \varepsilon < \pi/2$ 和 $N > 0$(取 $\alpha = -d/2 + 1/2$),存在整数 $n, p, n > N$ 使得

$$|nd - p + (d - 1/2)/2| < \varepsilon/(2\pi).$$

于是

$$|(2n+1)d - 2p - 1/2| < \varepsilon/\pi,$$

所以

$$\sin(2n+1)d\pi = \\ \sin((2n+1)d - 2p - 1/2 + 2p + 1/2)\pi = \\ \cos((2n+1)d - 2p - 1/2)\pi.$$

因此,存在一列 $\{n\}$ 趋于无穷使得

$$\sin(2n+1)d\pi \to 1.$$

式(14)不成立.

如果 $d = p/q$, p, q 为互质整数,则对任意正整数 n,存在正整数 $n_q, k, 0 \leqslant k < q$ 使得 $n = n_k q + k$, 则

$$\sin(2n+1)d\pi = \sin(2k+1)d\pi.$$

于是

$$\sin(2n+1)d\pi \to 1$$

当且仅当 $\sin(2k+1)d\pi = 1$,或 $(2k+1)d\pi = (2m + 1/2)\pi$, m 为某一整数,所以 $d = (4m+1)/(4k+2)$. 命题得证.

推论 1 假设 d 不为式(1)的节点,则系统(2)对某 $T > 0$ 于 $[0, T]$ 精确可控或精确可观当且仅当式(16)成立.

最后来说明系统(1)实际上等同于两根衔接梁. 考虑如下的问题

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + y_{xxxx}(x,t) = 0,\ 0 < x < d,\ d < x < 1, \\ y_{xx}(0,t) = y_{xxx}(0,t) = 0,\ y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0, \\ y(d^+,t) = y(d^-,t), y_x(d^+,t) = y_x(d^-,t), \\ y_{xx}(d^+,t) = y_{xx}(d^-,t), \end{cases} \tag{17}$$

$$y_{xxx}(d^-,t) - y_{xxx}(d^+,t) = u(t). \tag{18}$$

定义算子 A 的扩张[20] $\hat{A}$:

$$\begin{cases} \hat{A}(f,g) = (g, -f^{(4)}),\ 0 < x < d,\ d < x < 1, \\ D(\hat{A}) = \\ \{(f,g) \in (H^3 \times H^2) \cap H \mid f \in H^4(0,d), \\ f \in H^4(d,1), f'''(i) = f'''(i) = 0,\ i = 0,1\} \end{cases}$$

则对任意 $(f,g) \in D(\hat{A})$, $(\phi,\psi) \in D(A^*) = D(A)$,

$$\langle \hat{A}(f,g), (\phi,\psi) \rangle = \\ \langle (f,g), A^*(\phi,\psi) \rangle + [f'''(d^+) - f'''(d^-)]\psi(d). \tag{19}$$

定义算子 A 的自然扩张[20] $\tilde{A}: H \to H_-$,

$$\langle \tilde{A}F, G \rangle = \langle F, A^* G \rangle,\ \forall G \in D(A^*),\ D(\tilde{A}) = H. \tag{20}$$

于是对一切 $F \in D(\hat{A})$, $F = (f,g)$,在 H_- 中成立

$$\hat{A}F = \tilde{A}F + [f'''(d^+) - f'''(d^-)]b. \tag{21}$$

如果 $Y(t) = (y(\cdot,t), y_t(\cdot,t))$ 满足方程(17),则 $\dot{Y}(t) = \hat{A}Y(t)$. 进一步,如果 $Y(t)$ 亦满足方程(18),则在 H_- 中 $\hat{A}Y(t) = \tilde{A}Y(t) + bu(t)$,即方程(17),(18) H_- 中可表示为

$$\dot{Y}(t) = \tilde{A}Y(t) + bu(t).$$

而这正是方程(2)在 H_- 中的扩张. 于是说明了式(1)等同于式(17),(18).

下面转向方程(17),(18),因为其在能量空间中有更直观的意义.

3 本征值的渐近展开(The asymptotic expansion of eigenvalues)

设计线性输出反馈(参见定理 3 中的方程)

$$u(t) = ky_t(d,t),\ k > 0, \tag{22}$$

则方程(17),(18)可写为 H 中发展方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) = AY(t),\ Y(t) = (y(\cdot,t), y_t(\cdot,t)). \tag{23}$$

其中

$$\begin{cases} A(f,g) = (g, -f^{(4)}), \\ D(A) = \{(f,g) \in (H^3 \times H^2) \cap H \mid f \in H^4(0,d), \\ \qquad f \in H^4(d,1), f''(i) = f'''(i) = 0,\ i = 0,1, \\ \qquad f'''(d^-) - f'''(d^+) = kg(d)\}. \end{cases} \tag{24}$$

下面的引理是平凡的.

引理 3 i) A^{-1} 在 H 中存在且紧,所以其谱 $\sigma(A)$ 仅由孤立本征值组成.

ii) 对应于 $\lambda \in \sigma(A)$ 的任何本征函数形如 $(\phi, \lambda\phi)$, 其中 ϕ 满足

$$\begin{cases}\phi^{(4)}(x)+\lambda^2\phi(x)=0,\\ \phi''(i)=\phi'''(i)=0,\ i=0,1,\\ \phi(d^-)=\phi(d^+),\ \phi'(d^-)=\phi'(d^+),\\ \phi''(d^-)=\phi''(d^+),\ \phi'''(d^-)-\phi'''(d^+)=k\lambda\phi(d).\end{cases} \tag{25}$$

iii) $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0,\ \forall\lambda\in\sigma(A)$.

引理 3 中的 iii)是由方程(25)两边同乘 $\overline{\phi(x)}$ 并从 0 到 1 积分后比较实部虚部而得.由此及本征值共轭出现的事实,本文只需考虑 $\lambda\in\sigma(A)$, $\pi/2\leqslant\arg(\lambda)\leqslant\pi$. 令 $\lambda=\rho^2$, 则

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\arg(\rho)\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

设

$$\omega_1=e^{3/4\pi i},\ \omega_2=e^{\pi/4i},\ \omega_3=-\omega_2,\ \omega_4=-\omega_1, \tag{27a}$$

$$S=\{\rho\mid\frac{\pi}{4}\leqslant\arg\rho\leqslant\frac{\pi}{2}\}. \tag{27b}$$

下面总设 $\rho\in S$, 则

$$\begin{cases}\operatorname{Re}(\rho\omega_1)=-|\rho|\sin(\arg\rho+\frac{\pi}{4})\leqslant-\sqrt{2}/2|\rho|<0,\\ \operatorname{Re}(\rho\omega_2)=|\rho|\cos(\arg\rho+\frac{\pi}{4})\leqslant 0.\end{cases} \tag{28}$$

注意 $\phi^{(4)}(x)+\lambda^2\phi(x)=\phi^{(4)}(x)+\rho^4\phi(x)=0$ 有基本解 $e^{\omega_i x}$, $i=1,2,3,4$. 可写方程(25)的解为

$$\phi(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{4}c_i e^{\omega_i x},\ 0\leqslant x<d,\\ \sum_{i=1}^{4}d_i e^{\omega_i(1-x)},\ d<x<1.\end{cases} \tag{29}$$

其中常数 c_i,d_i 应使 f 满足边界条件.

$$M(c_1,c_2,c_3,c_4,d_1,d_2,d_3,d_4)^{\mathrm T}=0,$$

$$M=\begin{pmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_2^2 a & \omega_1^2\hat a & 0 & 0 & 0 & 0\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & -\omega_2^3 a & -\omega_1^3\hat a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_2^2 b & \omega_1^2\hat b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & -\omega_2^3 b & -\omega_1^3\hat b\\ \hat a & a & 1 & 1 & -\hat b & -b & -1 & -1\\ \omega_1\hat a & \omega_2 a & -\omega_2 & -\omega_1 & \omega_1\hat b & \omega_2 b & -\omega_2 & -\omega_1\\ \omega_1^2\hat a & \omega_2^2 a & \omega_2^2 & \omega_1^2 & -\omega_1^2\hat b & -\omega_2^2 b & -\omega_2^2 & -\omega_1^2\\ \omega_1^3\hat a-k\rho^{-1}\hat a & \omega_2^3 a-k\rho^{-1}a & -\omega_2^3-k\rho^{-1} & -\omega_1^3-k\rho^{-1} & \omega_1^3\hat b & \omega_2^3 b & -\omega_2^3 & -\omega_1^3\end{pmatrix}. \tag{30}$$

其中 $a=e^{\omega_2\rho d}$, $\hat a=e^{\omega_1\rho d}$, $b=e^{\omega_2\rho(1-d)}$, $\hat b=e^{\omega_1\rho(1-d)}$, 且由式(28),存在 $c>0$,

$$\hat a=\mathcal{O}(e^{-c|\rho|}),\ \hat b=\mathcal{O}(e^{-c|\rho|}). \tag{31}$$

c_i,d_i 不全为零当且仅当 $\det(M)=0$.由式(31)

$$\det(M)=\det\begin{pmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_2^2 a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & -\omega_2^3 a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_2^2 b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & -\omega_2^3 b & 0\\ 0 & a & 1 & 1 & 0 & -b & -1 & -1\\ 0 & \omega_2 a & -\omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_2 b & -\omega_2 & -\omega_1\\ 0 & \omega_2^2 a & \omega_2^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^2 b & -\omega_2^2 & -\omega_1^2\\ 0 & \omega_2^3 a-k\rho^{-1}a & -\omega_2^3-k\rho^{-1} & -\omega_1^3-k\rho^{-1} & 0 & \omega_2^3 b & -\omega_2^3 & -\omega_1^3\end{pmatrix}+\mathcal{O}(e^{-c|\rho|}). \tag{32}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}0=\det(M)={}&-4\omega_1^5\omega_2^5(\omega_1^2-\omega_2^2)^2[(\omega_2-\omega_1)^2-(\omega_1+\omega_2)^2a^2b^2]+k\rho^{-1}2\omega_1^4\omega_2^4\{(\omega_1^2-\omega_2^2)(\omega_1+\omega_2)[\omega_1(\omega_2-\omega_1)a^2+(\omega_1+\omega_2)^2a^2b^2]-(\omega_1-\omega_2)(\omega_1^2-\omega_2^2)[-(\omega_2-\omega_1)^2+\omega_1(\omega_1+\omega_2)b^2]\}={}\\&-32(1+a^2b^2)+k\rho^{-1}4\sqrt{2}(i-1)(a^2+b^2-2i)+\mathcal{O}(\rho^{-2}).\end{aligned} \tag{33}$$

这里用到从第二个等式得到的

$$a^2b^2=\frac{(\omega_2-\omega_1)^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}+\mathcal{O}(\rho^{-1})=-1+\mathcal{O}(\rho^{-1}). \tag{34}$$

解式(34)得

$$\rho = (n + \frac{1}{2})\omega_2\pi + \mathcal{O}(n^{-1}). \tag{35}$$

其中 n 为充分大的正整数.再由式(33)的第三个等式得到

$$a^2b^2 = -1+\frac{\sqrt{2}k}{8}(i-1)\rho^{-1}(a^2-b^2-1)+\mathcal{O}(\rho^{-2}). \tag{36}$$

注意

$$\begin{cases} a^2 = e^{2\omega_2\rho d} = e^{i(2n+1)d\pi} + \mathcal{O}(n^{-1}), \\ b^2 = e^{2\omega_2\rho(1-d)} = e^{i(2n+1)(1-d)\pi} + \mathcal{O}(n^{-1}) = \\ \quad - e^{-i(2n+1)d\pi} + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{cases} \tag{37}$$

将式(35),(37)代入式(36)并比较两边的阶可得式(35)中的 $\mathcal{O}(n^{-1})$ 满足

$$-2\omega_2\mathcal{O}(n^{-1}) = \frac{k}{2}\omega_2\rho^{-1}[1-\sin(2n+1)d\pi]+\mathcal{O}(n^{-2}),$$

于是

$$\mathcal{O}(n^{-1}) = -\frac{k}{4}\rho^{-1}[1-\sin(2n+1)d\pi] + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

从而

$$\lambda = \rho^2 = -\frac{k}{2}[1-\sin(2n+1)d\pi] + [(n+\frac{1}{2})\pi]^2 i + \mathcal{O}(n^{-1}). \tag{38}$$

于是证明了

定理 4 算子 A 的本征值 $\{\lambda_n,\overline{\lambda_n}\}$ 满足如下的渐近展开

$$\rho_n = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(n+\frac{1}{2})\pi + \mathcal{O}(n^{-1}),$$

$$\lambda = \rho^2 = -\frac{k}{2}[1-\sin(2n+1)d\pi] + [(n+\frac{1}{2})\pi]^2 i + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

其中 n 为充分大的正整数.

需要指出的是本节使用的方法[15],可如此简单的得到比文献[16]和文献[21]更好的结果.这个方法的优越性主要的还在于可用来处理变系数的问题[22],因为本文并不需要像文献[11,14]那样求出特征方程和特征函数的表达式,且在验证基生成前不能确定全部谱的渐近展开式.

推论 2 假设 d 不是节点,则系统(17),(18)渐近稳定.且当 d 为无理数或 $d=(4n+1)/(4m+2)$,m,n 为正整数时,系统(17),(18)渐近稳定但不指数稳定.

4 本征函数的渐近式及 Riesz 基生成(The asymptotic expansion of eigenfunctions and Riesz basis property)

从上一节的推论 2 可知,指数稳定的可能情况只能是:a) d 不是节点;b) d 为有理数且对所有的正整数 m,n,$d \neq (4n+1)/(4m+2)$.虽然在这种情况下,定理 2 表明存在 $\omega > 0$,

$$\mathrm{Re}\,\lambda < -\omega < 0,\ \forall\lambda\in\sigma(A),$$

但不能因此断定指数稳定性因为无穷维系统的谱确定增长条件并不总是成立的.本节就致力于这种情况的研究.本文将证明在这种情况下,A 的广义本征函数构成 H 的 Riesz 基.

回顾 Hilbert 空间 H 中的序列 $\{x_n\}_1^\infty$ 称为空间 H 的 Riesz 基,如果存在 H 上的有界可逆算子 T 及 H 的规范直交基 $\{e_n\}_1^\infty$ 使得

$$Tx_n = e_n,\ 对所有的\ n \geq 1.$$

H 中的算子 A 称为离散算子如果存在 $\lambda\in\rho(A)$ 使得 $R(\lambda,A)=(\lambda-A)^{-1}$ 为 H 中的紧算子.对离散算子而言,任何 $\lambda\in\sigma(A)$ 都是 A 的孤立本征值.$x\in H$ 称为 A 的广义本征向量如果存在正整数 n 使得 $(\lambda-A)^n x=0$.如果 A 是(反)自伴离散算子,则对 A 的任意本征值,其几何重数等于代数重数,且有特征函数集构成 H 的规范直交基.

最近文献[13]证明了如下的定理.

定理 5 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的稠定离散算子,$\{\phi_n\}_1^\infty$ 为 H 的 Riesz 基.如果存在整数 $N\geq 0$ 及 A 的广义本征向量列 $\{\psi_n\}_{N+1}^\infty$ 使得

$$\sum_{N+1}^{\infty}\|\phi_n-\psi_n\|^2 < \infty,$$

则下面结论成立:

i) 存在常数 $M > N$ 及 A 的广义本征向量列 $\{\psi_{n0}\}_1^M$ 使得 $\{\psi_{n0}\}_1^M \cup \{\psi_n\}_{M+1}^\infty$ 构成 H 的 Riesz 基.

ii) 设 $\{\psi_{n0}\}_1^M \cup \{\psi_n\}_{M+1}^\infty$ 对应于本征值 $\{\sigma_n\}_1^\infty$,则 $\sigma(A)=\{\sigma_n\}_1^\infty$,其中 σ_n 以其代数重数重复出现.

iii) 如果存在 $M_0>0$ 使得 $\sigma_n\neq\sigma_m$ 对所有的 m,$n > M_0$ 成立,则存在一个 $N_0 > M_0$ 使得当 $n > N_0$ 时,σ_n 为代数单的.

为应用定理 5,本文需要对特征函数进行估计.

引理 4 假设式(16)成立,$\rho=\rho_n$ 如定理 4 所确定,则相应于 $\lambda_n={\rho_n}^2$ 的 A 的本征函数 $(\phi_n,\lambda_n\phi_n)$ 有如下的渐近展开式

$$\begin{cases} \phi_n(x) = \begin{cases} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x} + \cos(n+\frac{1}{2})\pi x - \sin(n+\frac{1}{2})\pi x + \mathcal{O}(n^{-1}), & 0 \le x < d, \\ -(-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi(1-x)x} + \cos(n+\frac{1}{2})\pi x - \sin(n+\frac{1}{2})\pi x + \mathcal{O}(n^{-1}), & d < x \le 1, \end{cases} \\ \lambda_n^{-1}\phi''_n(x) = \begin{cases} -i[e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x} - \cos(n+\frac{1}{2})\pi x + \sin(n+\frac{1}{2})\pi x] + \mathcal{O}(n^{-1}), & 0 \le x < d, \\ i(-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi(1-x)} + \cos(n+\frac{1}{2})\pi x - \sin(n+\frac{1}{2})\pi x] + \mathcal{O}(n^{-1}), & d < x \le 1. \end{cases} \end{cases} \tag{39}$$

证　只要处理 $\phi(x), 0 \le x < d$ 的估计，因为其他的情形是类似的．设 $\phi(x)$ 由式(29)定义．由 $\phi''(i) = \phi'''(i) = 0, i = 1,2$ 可得

$$\phi(x) = \begin{cases} [e^{\omega_1\rho x} + (1+i)e^{\omega_2\rho x} + ie^{-\omega_1\rho x}]a_1 + [ie^{\omega_1\rho x} + (1+i)e^{-\omega_2\rho x} + e^{-\omega_1\rho x}]a_2, & 0 \le x < d, \\ [e^{\omega_1\rho(1-x)} + (1+i)e^{\omega_2\rho(1-x)} + ie^{-\omega_1\rho(1-x)}]b_1 + [ie^{\omega_1\rho(1-x)} + (1+i)e^{-\omega_2\rho(1-x)} + e^{-\omega_1\rho(1-x)}]b_2, & d < x \le 1, \end{cases} \tag{40}$$

其中 $a_i, b_i,\ i = 1,2$ 应选取使得 ϕ 满足其余的 4 个边界条件．代入这些边界条件可得

$$B(a_1, a_2, b_1, b_2)^{\mathrm{T}} = 0.$$

为了 $a_i, b_i, i = 1,2$ 不全为零当且仅当 $\det(B) = 0$. 由矩阵理论，a_1, a_2 分别可取 B 的第三行的代数余子式

$$a_1 = \det\begin{pmatrix} i\theta_1 + (1+i)\theta_2^{-1} + \theta_1^{-1} & -\theta_3 - (1+i)\theta_4 - i\theta_3^{-1} & -i\theta_3 - (1+i)\theta_4^{-1} - \theta_3^{-1} \\ \omega_1 i\theta_1 - \omega_2(1+i)\theta_2^{-1} - \omega_1\theta_1^{-1} & \omega_1\theta_3 + \omega_2(1+i)\theta_4 - \omega_1 i\theta_3^{-1} & \omega_1 i\theta_3 - \omega_2(1+i)\theta_4^{-1} - \omega_1\theta_3^{-1} \\ \omega_1^2 i\theta_1 + \omega_2^2(1+i)\theta_2^{-1} + \omega_1^2\theta_1^{-1} & -\omega_1^2\theta_3 - \omega_2^2(1+i)\theta_4 - \omega_1^2 i\theta_3^{-1} & -\omega_1^2 i\theta_3 - \omega_2^2(1+i)\theta_4^{-1} - \omega_1^2\theta_3^{-1} \end{pmatrix},$$

$$a_2 = -\det\begin{pmatrix} \theta_1 + (1+i)\theta_2 + i\theta_1^{-1} & -\theta_3 - (1+i)\theta_4 - i\theta_3^{-1} & -i\theta_3 - (1+i)\theta_4^{-1} - \theta_3^{-1} \\ \omega_1\theta_1 + \omega_2(1+i)\theta_2 - \omega_1 i\theta_1^{-1} & \omega_1\theta_3 + \omega_2(1+i)\theta_4 - \omega_1 i\theta_3^{-1} & \omega_1 i\theta_2 - \omega_2(1+i)\theta_2^{-1} - \omega_1\theta_2^{-1} \\ \omega_1^2\theta_1 + \omega_2^2(1+i)\theta_2 + \omega_1^2 i\theta_1^{-1} & -\omega_1^2\theta_3 - \omega_2^2(1+i)\theta_4 - \omega_1^2 i\theta_3^{-1} & -\omega_1^2 i\theta_3 - \omega_2^2(1+i)\theta_4^{-1} - \omega_1^2\theta_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

其中 $\theta_1 = e^{\omega_1\rho d}, \theta_2 = e^{\omega_2\rho d}, \theta_3 = e^{\omega_1\rho(1-d)}, \theta_4 = e^{\omega_2\rho(1-d)}$. 由定理 4，当 $\rho = \rho_n$ 时，$\theta_i, \theta_i^{-1}, i = 2,4$ 一致有界，且存在 $c > 0$ 使 $|\theta_1| + |\theta_3| = \mathcal{O}(e^{-c|\rho|})$，有

$$\begin{cases} \theta_1\theta_3\, a_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & -(1+i)\theta_4 + (i-1)\theta_4^{-1} & -1 \\ -\omega_1 & \omega_2(1+i)\theta_4 + \omega_2(i-1)\theta_4^{-1} & -\omega_1 \\ \omega_1^2 & -\omega_2^2(1+i)\theta_4 + \omega_2^2(i-1)\theta_4^{-1} & -\omega_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) = \\ \qquad 2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)(1+i)(\theta_4 - i\theta_4^{-1}) + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}), \\ \theta_1\theta_3\, a_2 = \det\begin{pmatrix} -i & -(1+i)\theta_4 + (i-1)\theta_4^{-1} & -1 \\ \omega_1 i & \omega_2(1+i)\theta_4 + \omega_2(i-1)\theta_4^{-1} & -\omega_1 \\ -\omega_1^2 i & -\omega_2^2(1+i)\theta_4 + \omega_2^2(i-1)\theta_4^{-1} & -\omega_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}) = \\ \qquad -i2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)(1+i)(\theta_4 - i\theta_4^{-1}) + \mathcal{O}(e^{-c|\rho|}), \\ \theta_1\theta_3(ia_1 + a_2) = \theta_1 \det\begin{pmatrix} (i-1)\theta_2^{-1} - (1+i)\theta_2 & -(1+i)\theta_4 + (i-1)\theta_4^{-1} & -1 \\ -\omega_2(i-1)\theta_2^{-1} - \omega_2(1+i)\theta_2 & \omega_2(1+i)\theta_4 + \omega_2(i-1)\theta_4^{-1} & -\omega_1 \\ \omega_2^2(i-1)\theta_2^{-1} - \omega_2^2(1+i)\theta_2 & -\omega_2^2(1+i)\theta_4 + \omega_2^2(i-1)\theta_4^{-1} & -\omega_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta_1^2) = \\ \qquad 4\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)i(\theta_2\theta_4 + \theta_2^{-1}\theta_4^{-1})\theta_1 + \mathcal{O}(\theta_1^2) = \theta_1\mathcal{O}(\rho^{-1}). \end{cases} \tag{41}$$

注意

$$|\theta_4 - i\theta_4^{-1}|^2 = 1 - \sin(2n+1)d\pi > c > 0. \tag{42}$$

令

$$\hat{a}_i = \theta_1\theta_3[2\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)(1+i)(\theta_4-i\theta_4{}^{-1})]^{-1}a_i,\quad i = 1,2,$$

则由式(41),(42)有

$$\begin{aligned}\phi(x) = \\ &[e^{\omega_1\rho x} + (1+i)e^{\omega_2\rho x} + ie^{-\omega_1\rho x}]\hat{a}_1 + \\ &[ie^{\omega_1\rho x} + (1+i)e^{-\omega_2\rho x} + e^{-\omega_1\rho x}]\hat{a}_2 = \\ &2e^{\omega_1\rho x} + (1+i)e^{\omega_2\rho x}(1-i)e^{-\omega_2\rho x} + \mathcal{O}(\rho^{-1}) = \\ &2e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x} + 2\cos(n+\frac{1}{2})\pi x - \\ &2\sin(n+\frac{1}{2})\pi x + \mathcal{O}(n^{-1}),\ 0 \leqslant x < d.\end{aligned} \tag{43}$$

证毕.

定理 6 假设式(16)成立,则

i) 存在 A 的广义本征函数列构成空间 H 的 Riesz 基.

ii) A 的充分大模的本征值为代数单的.

从而 A 生成的 C_0-半群的谱确定增长条件成立.

证 设 ϕ_n 由引理4确定. 令

$$\Psi_n = (\lambda_n^{-1}\phi_n, \phi_n), \tag{44}$$

设 Φ_n 由式(13)所定义,则由式(7)及式(39),存在 $N > 0$ 使当 $n > N$ 时

$$\sum_{n>N} \|\Psi_n - \Phi_n\|^2 = \sum_{n>N}\mathcal{O}(n^{-2}) < \infty.$$

其共轭也有同样的性质. 因 $\{\Phi_n\}$ 构成空间 H 的 Riesz 基,直接应用定理5可知结论成立.

推论 3 假设 d 不是节点,则系统(17),(18)指数稳定当且仅当 d 为有理数且对所有的正整数 m, n, $d \neq (4n+1)/(4m+2)$.

对定理6来说,假设式(14)应是多余的,期望有读者能对这个问题给出一个直接的证明.最近抽象的讨论可见文献[23].此外,基于观测性不等式的指数稳定性证明,可参考文献[24,25],更一般的可见文献[26].

最后本文要说明满足推论3的 d 一定存在.为此,设 $F(\omega) = 1 - \cosh\omega\cos\omega$, $\omega_{n0} = (n+1/2)\pi$, $n \geqslant 1$, $f(x)$ 如式(9)所定义,则 $F(\omega_{n0}) = 1 > 0$. 设 $\varepsilon \in (0,\pi/2)$. 当 n 是偶数时, $f(\omega_{n0}-\varepsilon) = 1 - \cosh(\omega_{n0} - \varepsilon)\sin\varepsilon < 0$, 只要 $\varepsilon - \varepsilon^3/6 > \dfrac{1}{\cosh(\omega_{n0}-\varepsilon)}$, 这是因为 $\sin\varepsilon > \varepsilon - \varepsilon^3/6$. 由于 $\dfrac{1}{\cosh(\omega_{n0}-\varepsilon)} \leqslant 2e^{-\omega_{n0}+\varepsilon} < 2e^{-n\pi}$, 为使 $f(\omega_{n0}-\varepsilon) < 0$, 只需

$$\varepsilon - \varepsilon^3/6 > 2e^{-n\pi}.$$

上式对 $\varepsilon = 3e^{-n\pi}$ 显然成立,所以

$$\omega_n \in ((n+1/2)\pi - 3e^{-n\pi}, (n+1/2)\pi).$$

ω_n 如引理1定义.同理,当 n 为奇数时, $f(\omega_{n0} + 3e^{-n\pi}) < 0$, 因此

$$\begin{cases}\omega_n \in [(n+1/2)\pi - 3e^{-n\pi}, (n+1/2)\pi) + 3e^{-n\pi}], \\ \forall n \geqslant 1.\end{cases} \tag{45}$$

注意 $2e^{-\omega}f(x) = \cos\omega x - \sin\omega x + c(x)$,

$$\begin{aligned}c(x) = &[e^{-\omega x} - e^{-\omega-\omega(1-x)}] - \sin\omega(1-x)e^{-\omega} + \\ &[1-e^{-2\omega}]\cos\omega x - \sin\omega[e^{\omega(x-1)} + e^{-\omega-\omega x}] - \\ &[1+e^{-2\omega}]\sin\omega x + \cos\omega[e^{\omega(x-1)} - e^{-\omega-\omega x}].\end{aligned}$$

容易证明

$$-5e^{-\omega} \leqslant c(x) \leqslant e^{-\omega x} + 4e^{-\omega/2},\ 对\ x \in (0,1/2). \tag{46}$$

特别地

$$-5e^{-\omega} \leqslant c(x) \leqslant e^{-\omega/5} + 4e^{-\omega/2},\ 对\ x \in [1/5,1/2). \tag{47}$$

这里只考虑 $d \in (0,1/2)$ 是因为结点关于 $d = 1/2$ 对称.置 $\omega = (n+1/2)\pi + \varepsilon$, $|\varepsilon| \leqslant 3e^{-n\pi}$, 则

$$\begin{aligned}&\sin 2\omega x = \sin((2n+1)\pi x + 2\varepsilon x) = \\ &\sin(2n+1)\pi x\cos 2\varepsilon x + \cos(2n+1)\pi)x\sin 2\varepsilon x < \\ &|\sin(2n+1)\pi x| + 6e^{-n\pi}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&4e^{-2\omega}f^2(x) = \\ &1 - \sin 2\omega x + c^2(x) - 2\sqrt{2}\sin(\omega x - \pi/4)c(x) > \\ &1 - |\sin(2n+1)\pi x| - 2\sqrt{2}[e^{-\omega/5} + \\ &4e^{-\omega/2}] - 6e^{-n\pi},\ 如果\ x \in [1/5,1/2).\end{aligned} \tag{48}$$

令

$$E_n = 2\sqrt{2}[e^{-\omega/5} + 4e^{-\omega/2}] + 6e^{-n\pi}, \tag{49}$$

则

$$f_n^2(d) > 1 - |\sin(2n+1)\pi d| - E_n,\ 对\ d \in [1/5,1/2). \tag{50}$$

f_n 为式(7)所定义.

定理 7 系统(17),(18)当 $d = 1/3$ 时是指数稳定的.

证　首先注意当 $d = p/q \in (0,1)$，p,q 为互质正整数时，对任意的正整数 n，分解 $n = mq + k$，$0 \leqslant k < q$，其中 m,k 为非负整数，则

$$\sin(2n+1)\pi d = \sin(2k+1)\pi d,\ 0 \leqslant k < q, \tag{51}$$

所以 $\sin(2n+1)\pi d$ 最多取 q 个不同值. 特别地

$$1 - \left|\sin(2n+1)\frac{\pi}{3}\right| \geqslant 1 - \sin\frac{\pi}{3} = 0.1340,\ \forall n \geqslant 1. \tag{52}$$

计算可得 $E_5 = 0.1266 < 0.1340$. 由于 E_n 单调减小，有

$$f_n^2\left(\frac{1}{3}\right) > 1 - \left|\sin(2n+1)\frac{\pi}{3}\right| - E_n \geqslant 0.074 > 0 \text{ 当 } n \geqslant 5. \tag{53}$$

用 MATLAB 计算 f_n，$1 \leqslant n \leqslant 4$ 在 $(0,0.5)$ 中所有零点（nodal points），可得

$n = 1$, nodal points $= 0.2242$,

$n = 2$, nodal points $= 0.1321$,

$n = 3$, nodal points $= 0.0944,\ 0.3558$,

$n = 4$, nodal points $= 0.0735,\ 0.2768$.

于是

$$f_n^2\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \text{ 对所有的 } n \geqslant 1, \tag{54}$$

即 $d = 1/3$ 不是结点. 由推论 3 即得所要结论.

实际上，用同样的方法可求得许多满足推论 3 的点. 例如当 $d = 1/4$ 时，$E_4 = 0.2503$，

$$1 - \left|\sin(2n+1)\frac{\pi}{4}\right| \geqslant 0.2929 > E_4,\ \forall n \geqslant 1, \tag{55}$$

所以 $d = 1/4$ 也满足推论 3. 当然本文更希望一般的刻划结点和条件（16）关系的条件，也期望有读者能对这个问题给出一个答案. 自然如果同时用速度和角速度的线性反馈，则任何点都应指数稳定. 然而最少的控制应是所追求的.

参考文献（References）：

[1] 王康宁，关肇直. 弹性振动的镇定问题（Ⅰ）[J]. 中国科学（A 辑），1974，(2)：335 - 350.
(WANG Kangning, GUAN Zhaozhi. The stabilization of elastic vibration (Ⅰ) [J]. *Science in China* (*Series A*), 1974, (2): 335 - 350.)

[2] 王康宁，关肇直. 弹性振动的镇定问题（Ⅲ）[J]. 中国科学（A 辑），1976，(2)：133 - 148.
(WANG Kangning, GUAN Zhaozhi. Stabilization of elastic vibration (Ⅲ) [J]. *Science in China* (*Series A*), 1976, (2): 113 - 148.)

[3] 冯德兴，朱广田. 弹性振动系统的镇定和极点配置问题[J]. 中国科学（A 辑），1982，(4)：375 - 384.
(FENG Dexing, ZHU Guangtian. Stabilization and pole assignment of elastic vibration systems [J]. *Science in China* (*Series A*), 1982, (4): 375 - 384.)

[4] 宋健，于景元. 点测量、点控制的分布参数系统[J]. 中国科学（A 辑），1979，(2)：131 - 141.
(SONG Jian, YU Jingyuan. Pointwise measure and control of distributed parameter system [J]. *Science in China* (*Series A*), 1979, (2): 131 - 141.)

[5] WEISS G. Admissibility of unbounded control operators [J]. *SIAM J of Control & Optimization*, 1989, 27(3): 527 - 545.

[6] HO L F, RUSSELL D L. Admissible input elements for systems in Hilbert and a Carleson measure criterion [J]. *SIAM J of Control & Optimization*, 1983, 21(4): 615 - 640.

[7] RENARDY M. On the linear stability of hyperbolic PDES and viscoelastic flows [J]. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik* (*ZAMP*), 1994, 45(6): 855 - 865.

[8] 孙顺华. 完全可控系统的谱分布[J]. 数学学报，1978，21(3)：193 - 205.
(SUN Shunhua. Spectral distribution of exactly controllable system [J]. *Acta Mathematica Sinica*, 1978, 21(3): 193 - 205.)

[9] 刘佳荃. 一类线性算子的一秩扰动与极点配置问题[J]. 系统科学与数学，1982，2(2)：81 - 93.
(LIU Jiaquan. One-rank perturbation and pole assignment of a class of linear operators [J]. *Systems Science and Mathematics Science*, 1982, 2(2): 81 - 93.)

[10] XU Chengzhong, SALLET G. On spectrum and Riesz assignment of infinite dimensional linear systems by bounded linear feedbacks [J]. *SIAM J of Control & Optimization*, 1996, 34(2): 521 - 541.

[11] 姚翠珍. 一个复合系统边界反馈的 Riesz 基性质[J]. 数学物理学报，2000，20(4)：568 - 576.
(YAO Cuizhen. On the Riesz basis property of a hybrid system with boundary feedback control [J]. *Acta Mathematica Scientia* (*Series A*), 2000, 20(4): 568 - 576.)

[12] WEISS G. Regular linear systems with feedback [J]. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1994, 7(1): 23 - 57.

[13] GUO Baozhu, YU Runyi. On Riesz basis property of discrete operators with application to a Euler-Bernoulli beam equation with boundary linear feedback control [J]. *IMA J of Mathematical Control and Information*, 2000, 18(2): 241 - 251.

[14] GUO Baozhu, CHAN K Y. Riesz basis generation, eigenvalues distribution, and exponential stability for a Euler-Bernoulli beam with joint feedback control [J]. *Revista Matemática Complutense*, 2001, 14(1): 205 - 229.

[15] NAIMARK M A. 线性微分算子[M]. 北京：科学出版社，1964.
(NAIMARK M A. *Linear Differential Operators* [M]. Beijing: Sci-

ence Press, 1964.)

[16] CHEN G, KRANTZ S G, RUSSELL D L, et al. Analysis, design, and behavior of dissipative joints for coupled beams [J]. *SIAM J of Applied Mathematics*, 1989, 49(6): 1665 - 1693.

[17] INGHAM A E. Some trigonometrical inequaltities with applications to the theory of series [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1936, 41: 367 - 379.

[18] RUSSELL D, WEISS G. A general necessary condition for exact observability [J]. *SIAM J of Control & Optimization*, 1994, 32(1): 1 - 23.

[19] HARDY G H, WRIGHT E M. *Introduction to the Theory of Numbers* [M]. 5th ed. New York: The Clarendon Press, 1979.

[20] REBARBER R. Exponential stability of coupled beams with dissipative joints: a frequency domain approach [J]. *SIAM J of Control & Optimization*, 1985, 33(1): 1 - 28.

[21] CHEN G, ZHOU Jianxin. The wave propagation method for the analysis of boundary stabilization in vibrating structures [J]. *SIAM J of Applied Mathematics*, 1990, 50(5): 1254 - 1283.

[22] GUO Baozhu. Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients [J]. *SIAM J of Control & Optimization*, 2002, 40(6): 1905 - 1923.

[23] GUO Baozhu, LUO Yuehu. Riesz basis property of a second order hyperbolic system with collocated scalar input/output [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(4): 693 - 698.

[24] AMMARI A, TUCSNAK M. Stabilization of Euler-Bernoulli beams by means of a pointwise feedback force [J]. *SIAM J of Control & Optimization*, 2000, 39(4): 1160 - 1181.

[25] KAIS A, LIU Zhuangyi, MARIUS T. Decay rates for a beam with pointwise force and moment feedback [J]. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2002, 15(2): 229 - 255.

[26] GUO Baozhu, LUO Yuehu. Controllability and stability of a second order hyperbolic system with collocated sensor/actuator [J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 46(1): 45 - 65.

作者简介:

姚翠珍 (1964 —),女,北京理工大学应用数学系副教授.从事人口系统分析,最优化等方面的研究工作;

郭宝珠 (1962 —),男,中国科学院数学与系统科学研究院研究员,中科院"百人计划"人选者,从事分布参数系统控制理论和应用方面的研究,已发表专业论文70多篇,其中50多篇发表在国外杂志上.专著2本. E-mail: bzguo@mail.iss.ac.cn.