

具有一般故障模型的系统完整性的频域研究

姜 澄, 王诗宓

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘要: 针对一般的故障模型, 从频域角度提出了系统对传感器失效、执行器失效及传感器和执行器同时失效具有完整性的充分条件; 在此基础上, 通过与标准 H_∞ 控制问题建立等价关系, 给出了输出反馈可靠性控制器的设计方法.

关键词: 容错控制; 完整性; 频域; 一般故障模型; H_∞ 控制

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Frequency domain approach to integrity of control systems with general failure model

JIANG Cheng, WANG Shi-fu

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on the general failure model, sufficient integrity conditions in frequency domain are proposed for systems with failures on actuators, sensors or on both of them. Then, by setting the equivalence between the conditions and the H_∞ control problem, a design method for output feedback reliable controllers is given.

Key words: fault-tolerant control; integrity; frequency domain; general failure model; H_∞ control

1 引言 (Introduction)

以往关于完整性的讨论多采用时域分析方法^[1, 2], 且采用的都是较为简单的 $[0, 1]$ 故障模型. 虽然也有作者从频域角度对执行器或传感器分别失效情况进行过讨论^[3, 4], 但是, 完整性条件和控制器设计多数针对特定的单一故障, 控制器的设计也较为复杂, 从而限制了这些方法的应用. 本文针对更为一般的故障模型^[5], 从频域角度全面地讨论了系统在传感器失效、执行器失效以及传感器和执行器同时失效时的完整性条件, 并基于 H_∞ 控制理论, 给出了使系统具有完整性的一种简便的频域设计方法. 本文所得结果适用于多种故障情况, 因而具有较高的实际应用价值.

2 问题描述 (Problem statement)

图 1 为由受控对象 $P(s) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 和控制器 $K(s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 构成的闭环反馈系统 $\Phi(P, K)$.

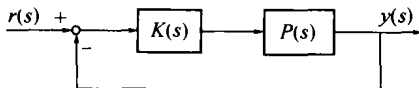


图 1 反馈系统 $\Phi(P, K)$

Fig. 1 Feedback system $\Phi(P, K)$

当发生传感器或执行器失效情况时, 需在闭环系统 $\Phi(P, K)$ 中引入传感器失效阵 F_s 和执行器失效阵 F_a , 此时闭环系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 的结构如图 2 所示. 图 2 中

$$F_s = \text{diag} \{f_{s1}, f_{s2}, \dots, f_{sn}\}, \quad f_{si} \in \mathbb{RH}_\infty, \quad (1)$$

$$F_a = \text{diag} \{f_{a1}, f_{a2}, \dots, f_{am}\}, \quad f_{ai} \in \mathbb{RH}_\infty. \quad (2)$$

显然, 当执行器正常无故障时 $F_a = I_m$, 传感器正常无故障时 $F_s = I_n$.

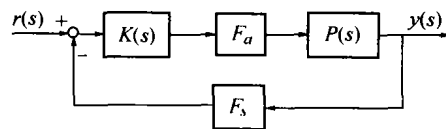


图 2 反馈系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$

Fig. 2 Feedback system $\Phi(F_s, P, F_a, K)$

本文的目标是设计反馈控制器 $K(s)$ 使得对任意的 F_s 和 F_a , 系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 都内稳定, 即具有完整性.

3 系统发生故障时的完整性条件 (Integrity conditions at system failures)

本节首先讨论执行器、传感器分别失效时反馈

系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 具有完整性的条件, 继而将结论推广到执行器和传感器同时失效的情况. 首先给出一个引理.

引理 1^[6] 设 $P(s)$ 和 $K(s)$ 为真有理函数阵, 则图 1 所示系统内稳定的充分必要条件是

$$f(s) = \det [I + P(s)K(s)] \quad (3)$$

的 Nyquist 曲线满足如下条件:

- 1) 不通过原点, 即 $f(j\omega) \neq 0, \omega \in [0, \infty)$;
- 2) 逆时针方向绕原点转 $N_{P_+} + N_{K_+}$ 周, 其中 N_{P_+} 表示 $P(s)$ 在 S 闭右半平面的极点数, N_{K_+} 表示在 $K(s)$ 在 S 闭右半平面的极点数.

3.1 传感器失效时的完整性条件 (Integrity conditions at sensor failures)

当系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 中只存在传感器失效时, 图 2 中所示的 F_a 等于单位阵. 令

$$\hat{F}_s = F_s - I, \quad (4)$$

并假设:

- 1) $F_s P(s)$ 与 $P(s)$ 在 S 右半平面的极点个数相同;
- 2) $P(s)$ 为严格真有理函数阵;
- 3) 存在真有理函数 $r_s(s) \in \mathbb{RH}_\infty$, 使得 $\hat{F}_s(j\omega)$ 的最大奇异值 $\sigma_{\max}\{\hat{F}_s(j\omega)\}$ 满足

$$\sigma_{\max}\{\hat{F}_s(j\omega)\} \leq |r_s(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5)$$

假设 1) 保证 $F_s P(s)$ 能镇定; 由系统的物理可实现性可知, 假设条件 2) 一定能满足; 因为 $F_s \in \mathbb{RH}_\infty$, 所以假设 3) 也可满足. 传感器失效时系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 有如下完整性判定定理.

定理 1 在满足上述假设条件的情况下, 系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 在传感器失效时具有完整性的充分条件是 $K(s)$ 内稳定 $P(s)$, 且

$$\|r_s(s)P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}\|_\infty < 1. \quad (6)$$

证 令

$$Q(s) = F_s P(s), \quad (7)$$

$$f_s(s) = \det [I + Q(s)K(s)], \quad (8)$$

$$f(s) = \det [I + P(s)K(s)], \quad (9)$$

又因为 $P(s)$ 为严格真有理函数阵, 所以 $[I + P(s)K(s)]^{-1}$ 存在, 因此

$$\begin{aligned} f_s(s) &= \det \{I + [I + \hat{F}_s]P(s)K(s)\} = \\ &= \det [I + P(s)K(s)] \det \{I + \hat{F}_s P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}\} = \\ &= f(s) \det \{I + \hat{F}_s P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}\}. \end{aligned} \quad (10)$$

因为 $K(s)$ 使 $P(s)$ 内稳, 所以 $f(s)$ 的 Nyquist 曲线满足引理 1 的两个条件, 即 $f(j\omega) \neq 0 (\omega \in [0, \infty))$, 且逆时针方向绕原点转 $N_{P_+} + N_{K_+}$ 周. 又因为

$$\begin{aligned} \sup_\omega \sigma_{\max}\{\hat{F}_s P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}\} &\leq \\ \sup_\omega \sigma_{\max}\{\hat{F}_s\} \times \sup_\omega \sigma_{\max}\{P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}\} &\leq \\ r_s(j\omega) \sup_\omega \sigma_{\max}\{P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}\} &= \\ \|r_s(s)P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}\|_\infty &< 1, \end{aligned} \quad (11)$$

所以

$$\begin{cases} \det [I + \hat{F}_s(j\omega)P(j\omega)K(j\omega)[I + P(j\omega)K(j\omega)]^{-1}] \neq 0, \\ \forall \omega \in [0, \infty). \end{cases} \quad (12)$$

故

$$f_s(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in [0, \infty), \quad (13)$$

且 $f_s(s)$ 的 Nyquist 曲线绕原点的次数与 $f(s)$ 相同, 即为 $N_{P_+} + N_{K_+}$ 周. N_{Q_+} 表示 $Q(s)$ 在 S 闭右半平面的极点数, 则由假设条件 1) 可知 $N_{Q_+} = N_{P_+}$, 所以 $f_s(s)$ 的 Nyquist 曲线逆时针绕原点的次数为 $N_{Q_+} + N_{K_+}$ 周, 因此系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 内稳定. 证毕.

应用定理 1 的结论, 就可以用有理函数阵 $r_s(s)P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}$ 的 H_∞ 范数来判别系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 在传感器失效时的完整性.

3.2 执行器失效时的完整性条件 (Integrity conditions at actuator failures)

当系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 中只有执行器失效时, 图 2 中所示的 F_s 等于单位阵. 令

$$\hat{F}_a = F_a - I, \quad (14)$$

并假设:

- 1) $P(s)F_a$ 与 $P(s)$ 在 S 右半平面的极点个数相同;
- 2) $P(s)$ 为严格真有理函数阵;
- 3) 存在真有理函数 $r_a(s) \in \mathbb{RH}_\infty$, 使得 $\sigma_{\max}\{\hat{F}_a(j\omega)\} \leq |r_a(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty)$.

$$(15)$$

假设 1) 保证 $P(s)F_a$ 能镇定; 由 $F_a \in \mathbb{RH}_\infty$ 可满足假设条件 3). 执行器失效时系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 有完整性判定定理如下:

定理 2 在满足上述假设条件的情况下, 系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 在执行器失效时具有完整性的充分条件是 $K(s)$ 内稳定 $P(s)$, 且

$$\|r_a(s)K(s)P(s)[I + K(s)P(s)]^{-1}\|_\infty < 1. \quad (16)$$

定理 2 与定理 1 的证明类似, 故从略.

3.3 传感器与执行器同时失效时的完整性条件
(Integrity conditions at both sensor and actuator failures)

当系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 中同时存在传感器、执行器失效时,令 $\hat{F}_s = F_s - I, \hat{F}_a = F_a - I$, 并假设:

- 1) $F_s P(s) F_a$ 与 $P(s)$ 在 S 右半平面的极点个数相同;
- 2) $P(s)$ 为严格真有理函数阵且 $P(s) \in L_\infty$;
- 3) 存在真有理函数 $r_a(s), r_s(s), r_p(s) \in \exists H_\infty$, 使得

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \{ \hat{F}_s(j\omega) \} \leq | r_s(j\omega) |, \forall \omega \in [0, \infty), \\ \sigma_{\max} \{ \hat{F}_a(j\omega) \} \leq | r_a(j\omega) |, \forall \omega \in [0, \infty), \\ \sigma_{\max} \{ P(j\omega) \} \leq | r_p(j\omega) |, \forall \omega \in [0, \infty). \end{cases} \quad (17)$$

传感器与执行器同时失效时系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 有如下完整性判定定理.

定理 3 在满足上述假设条件的情况下,传感器与执行器同时失效时,系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 具有完整性的充分条件是 $K(s)$ 内稳定 $P(s)$, 且

$$\| (r_a(s) + r_s(s) + r_a(s)r_s(s))r_p(s)K(s)(I + P(s)K(s))^{-1} \|_\infty < 1. \quad (18)$$

4 可靠性控制器的设计 (Design of reliable controllers)

本节研究如何根据上节的条件来为故障系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 设计可靠性反馈控制器. 由上节所给条件可知, 反馈控制器的设计问题可以转化为标准 H_∞ 控制问题, 即设计控制器 $K(s)$, 使得图 3 所示系统 $\Phi(G, K)$ 中的 $G(s)$ 内稳定且 $\| T_{zw}(s) \|_\infty < 1$. 在图 3 的系统中

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$u = K(s)y. \quad (20)$$

引理 2^[7] 系统 $\Phi(G, K)$ 中, 在 $G_{22}(s)$ 严格真的条件下, $K(s)$ 使 $G(s)$ 内稳定的充分必要条件是 $K(s)$ 使 $G_{22}(s)$ 内稳定.

在 $G_{22}(s)$ 严格真的条件下, 可以算得

$$\begin{aligned} z &= T_{zw}(s)w = \\ &\{ G_{11}(s) + G_{12}(s)K(s)[I - G_{22}(s)K(s)]^{-1}G_{21}(s) \} w. \end{aligned} \quad (21)$$

以下的关键问题则是针对不同的失效情形寻找相应的 $G(s)$, 使得“ $K(s)$ 内稳定 $G(s)$ ”等价于“ $K(s)$ 内

稳定 $P(s)$ ”, 且 $T_{zw}(s)$ 等于判定条件中的有理函数阵. 根据定理 1 ~ 定理 3, 分别将式 (6), (16) 和 (18) 中的函数矩阵与式 (21) 对比, 可得传感器失效时

$$G(s) = G_s(s) = \begin{bmatrix} 0 & r_s(s)P(s) \\ I & -P(s) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

此时 $G_{22}(s) = -P(s), T_{zw} = r_s(s)P(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}$. 执行器失效时

$$G(s) = G_a(s) = \begin{bmatrix} 0 & r_a(s)I \\ P(s) & -P(s) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

此时 $G_{22}(s) = -P(s), T_{zw}(s) = r_a(s)K(s)P(s)[I + K(s)P(s)]^{-1}$. 而传感器与执行器同时失效时

$$G(s) = G_{sa}(s) = \begin{bmatrix} 0 & [r_s(s) + r_a(s) + r_s(s)r_a(s)]r_p(s)I \\ I & -P(s) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

此时 $G_{22}(s) = -P(s), T_{zw}(s) = [r_a(s) + r_s(s) + r_a(s)r_s(s)]r_p(s)K(s)[I + P(s)K(s)]^{-1}$.

$G(s)$ 确定之后, 就可以将定理 1 ~ 定理 3 中的条件转化为图 3 所示的标准 H_∞ 控制问题, 从而可直接利用已有的标准 H_∞ 控制问题求解算法来求解系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$ 的完整性控制器.

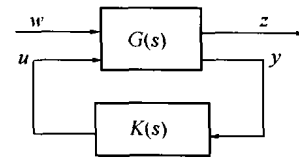


图 3 系统 $\Phi(G, K)$

Fig.3 System $\Phi(G, K)$

5 设计示例 (Illustrated example)

设被控对象为

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 5.5s + 7.5} \begin{bmatrix} 2.4s + 7.272 & 3.135s + 9.348 \\ 2.08s + 6.432 & 3.23s + 9.538 \\ 1.76s + 5.376 & 2.47s + 7.334 \end{bmatrix}.$$

当传感器与执行器同时失效时, 根据式 (24), 标准 H_∞ 控制问题中的 $G(s)$ 等于 $G_{sa}(s)$.

计算 $r_p(s) = \| P(s) \|_\infty = 2.5121$, 假设按照系统特性可取 $r_a(s) = 1, r_s(s) = 1.5$. 解标准 H_∞ 控制问题可以得到控制器

$$K(s) = \frac{1}{s^2 + 22.6308s + 100.7170} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0.0026s+0.036 & 0.0008s+0.024 & 0.0014s+0.024 \\ 0.0019s+0.0397 & 0.0036s+0.0485 & 0.002s+0.0338 \end{bmatrix}$$

为验证控制器的效果,任取满足 $\sigma_{\max}\{F_{s1}(j\omega) - I\} \leq 1.5, \sigma_{\max}\{F_{s2}(j\omega) - I\} \leq 1.5, \sigma_{\max}\{F_{a1}(j\omega) - I\} \leq 1$ 和 $\sigma_{\max}\{F_{a2}(j\omega) - I\} \leq 1$ 的传感器失效阵 F_{s1}, F_{s2} 和执行器失效阵 F_{a1}, F_{a2} 如下:

$$F_{s1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1.7}{s+1.3} \end{bmatrix}, F_{s2} = \begin{bmatrix} \frac{s-1.17}{s+3.48} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.2s+3.1}{s^2+2.35s+7.8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{a1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0.57 \end{bmatrix}, F_{a2} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+s+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将解得的控制器 $K(s)$ 及所取的传感器失效阵 F_{s1}, F_{s2} 和执行器失效阵 F_{a1}, F_{a2} 分别代入反馈系统 $\Phi(F_s, P, F_a, K)$, 可以计算出不同执行器和传感器失效情况下的闭环极点(见表1). 验证结果表明, 系统对执行器和传感器故障具有完整性.

表1 故障情况下的闭环极点

Table 1 Closed-loop poles under failures

闭环系统 极点	$F_s = F_{s1}$	$F_s = F_{s2}$
$F_a = F_{a1}$	-16.5423, -6.0861,	-16.5423, -6.0806,
	-1.3005, -2.5012,	-1.1749 ±j2.5340,
	-2.0007, -3.0000	-3.5025, -2.4790,
$F_a = F_{a2}$		-2.0055, -3.0011
	-16.5423, -6.0886,	-16.5423, -6.0890,
	-0.5004 ±j0.8662,	-1.1750 ±j2.5336,
	-1.2993, -2.4998,	-0.0500 ±j0.8659,
	-3.0000	-3.4769, -2.5029,
	-2.9996	

6 结论(Conclusions)

综上所述,可以得到如下结论:

1) 本文针对一般故障模型,从频域理论出发,全面讨论了系统在传感器失效、执行器失效及传感器和执行器同时失效三种不同情形下的完整性,且所给出的条件只需预知故障的偏离边界 $r_a(s)$ 和 $r_s(s)$, 因而所得结果更加实用.

2) 应用本文所给出的条件,只需要利用有理函数阵的 H_∞ 范数来判定系统的完整性,判别方法比较简单.

3) 本文将可靠性控制器的设计转化成标准 H_∞ 控制问题的求解,因而可以利用已有的标准 H_∞ 控制问题的解法来设计控制器,使得控制器的设计简便易行.

最后需要说明的是,本文所给的控制器设计示例是针对执行器和传感器同时发生故障情况的,对于执行器、传感器分别发生故障的情况,只要正确选择 $G(s)$ 即可按同样的步骤进行设计.

参考文献(References):

[1] JAWORSKA I, TZAFESTAS S. Improvement of systems reliability using robust control theory [J]. *Int J of Systems Science*, 1991, 22(3): 587 - 593.

[2] VEILLETTE R J. Reliable linear-quadratic state-feedback control [J]. *Automatica*, 1995, 31(1): 137 - 143.

[3] FERREIRA P M G. Partial integrity [J]. *Int J Control*, 1990, 52(2): 509 - 515.

[4] 陈祥杰,王诗宓.具有完整性的反馈控制器的设计[J].控制理论与应用,1995,12(3):321 - 326. (CHEN Xiangjie, WANG Shifu. Design of feedback controllers with integrity [J]. *Control Theory & Applications*, 1995, 12(3): 312 - 326.)

[5] GÜNDES A N. Stability of feedback systems with sensor or actuator failures: analysis [J]. *Int J Control*, 1992, 56(4): 735 - 753.

[6] MACIEJOWSKI J M. *Multivariable Feedback Design* [M]. Workingham, England: Addison Wesley, 1989.

[7] 解学书,钟宜生. H_∞ 控制理论[M].北京:清华大学出版社,1994. (XIE Xueshu, ZHONG Yisheng. *H-infinity Control Theory* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994.)

作者简介:

姜 澄 (1975 —),女,1998年获清华大学工学学士学位,2001年获清华大学工学硕士学位.研究方向为容错控. E-mail: chj3952@yahoo.com;

王诗宓 (1944 —),男,清华大学自动化系教授,1967年毕业于清华大学动力机械系,1981年和1983年获英国曼彻斯特大学理工学院硕士和博士学位.目前主要研究预测控制,容错控制及其在过程控制中的应用. E-mail: wsf_dau@mail.tsinghua.edu.cn