文章编号: 1000-8152(2003)03-0473-04

# 不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 控制

王 武, 杨富文
(福州大学 电气工程系, 福建 福州 350002)

**摘要**: 基于线性矩阵不等式(LMI)方法,研究了不确定时滞线性系统的鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 状态反馈控制器的设计问题,以一个 LMI 形式给出了控制器存在的充分条件,而且该 LMI 是与时滞相关的.同时,经过全等变换、变量变换和 Schur 补引理,该 LMI 的所有参数都是线性的,这样参数无需预取就可以利用 LMI Toolbox 获得解.实例表明了上述设计方法的有效性.

**关键词**: 非脆弱控制; 鲁棒 $H_\infty$ 状态反馈; 时滞; 不确定系统; LMI 方法
**中图分类号**: TP13　　**文献标识码**: A

# Delay-dependent robust and non-fragile $H_\infty$ control for linear time-delay systems with uncertainties

WANG Wu, YANG Fu-wen
(Department of Electrical Engineering, Fuzhou University, Fujian Fuzhou 350002, China)

**Abstract**: The problem of robust and non-fragile $H_\infty$ control is addressed via state feedback for linear time-delay systems with norm-bounded parameter uncertainties based on a method of linear matrix inequality (LMI). The sufficient condition for the solutions to the problem is presented in terms of one LMI, which depends on the size of delay. Also, through congruence transformations, change of variables and Schur complements, all parameters of the LMI are linear. The solutions can be readily obtained using existing LMI Toolbox without pre-selecting any parameter. A numerical example is provided to demonstrate the validity of the proposed design approach.

**Key words**: non-fragile control; robust $H_\infty$ state feedback; time-delay; uncertain systems; LMI approach

## 1 引言(Introduction)

对实际工程控制系统要求具备稳定性及满足一定的性能要求,影响稳定性的主要因素有时滞和不确定.近年来已提出许多理论用来分析不确定时滞系统的稳定性和性能, $H_\infty$ 控制理论是其中之一.这类系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制取得了很多有用的结论[1~3].但所设计的反馈控制器都要求是准确实现的,而实际上,控制器的实现由于硬件(如 A/D、D/A 转换等)、软件(如计算截断误差)等原因,使得控制器存在着一定的不确定性,从而造成闭环系统的性能下降或(和)稳定性破坏.因此,近年来非脆弱控制问题也成为人们感兴趣的课题[4~6].本文利用 LMI 方法,设计了不确定时滞线性系统的鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 状态反馈控制器,使得闭环系统稳定,且满足 $H_\infty$ 范数小于给定界 $\gamma$. 控制器存在的充分条件以 LMI 形式给出且该 LMI 是与时滞相关的.而且,经过全等变换、变量变换和 Schur 补引理,该 LMI 的所有参数都是线性的,这样参数无需预取就可以利用 LMI Toolbox 获得解.

## 2 鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 状态反馈控制(Robust and non-fragile $H_\infty$ control via state feedback)

考虑如下不确定时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_d + \\ \qquad \Delta A_d(t))x(t-h) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \\ z(t) = (C + \Delta C(t))x(t) + Du(t), \\ x(t) = 0,\ t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

式中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制向量, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ 为干扰输入且 $w(t) \in L_2[0,\infty]$, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ 为系统受控输出, $A, A_d, B_1, B_2, C, D$ 为

收稿日期: 2000-11-13; 收修改稿日期: 2002-06-26.
基金项目: 国家自然科学基金(69974010); 教育部高等学校骨干教师资助计划(DQ2000-14); 福建省自然科学基金(F97009)资助项目.

具有合适维数的常矩阵.时变不确定参数定义为

$$\begin{cases}\Delta A(t) = H_1F_1(t)E_1,\\ \Delta A_d(t) = H_2F_1(t)E_2,\\ \Delta C(t) = H_3F_1(t)E_3.\end{cases} \tag{2}$$

式中 $H_i,E_i(i=1,2,3)$ 为具有合适维数的已知实矩阵,且 $F_1(t)$ 为扰动矩阵,满足 $F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t)\leqslant\rho_1 I$. $h$ 为定常时滞,满足

$$0\leqslant h\leqslant\bar{h}. \tag{3}$$

采用非脆弱的状态反馈控制器

$$u(t) = (K+\Delta K(t))x(t). \tag{4}$$

式中, $K$ 为状态反馈增益矩阵,控制器实现的不确定 $\Delta K(t)$ 定义为

$$\Delta K(t) = H_4F_2(t)E_4. \tag{5}$$

其中 $H_4,E_4$ 为具有合适维数的已知实矩阵,且 $F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t)\leqslant\rho_2 I$.

将控制器(4)运用于系统(1),得闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A_K(t)x(t)+A_{dK}(t)x(t-h)+B_1w(t),\\ z(t) = C_K(t)x(t).\end{cases} \tag{6}$$

式中

$A_K(t) = A_K+\tilde{H}_1\tilde{F}_1(t)\tilde{E}_1,$

$A_{dK}(t) = A_d+\tilde{H}_2\tilde{F}_2(t)\tilde{E}_2,\ C_K(t) = C_K+\tilde{H}_3\tilde{F}_1(t)\tilde{E}_3,$

$A_K = A+B_2K,\ C_K = C+DK,$

$\tilde{H}_1 = [H_1\quad B_2H_4],\ \tilde{H}_2 = H_2,\ \tilde{E}_1 = [E_1^{\mathrm{T}}\quad E_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\tilde{E}_2 = E_2,\ \tilde{H}_3 = [H_3\quad DH_4],\ \tilde{E}_3 = [E_3^{\mathrm{T}}\quad E_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\tilde{F}_1(t) = \mathrm{diag}\,\{F_1(t),F_2(t)\},\ \tilde{F}_2(t) = F_1(t).$

显然

$$\tilde{F}_1^{\mathrm{T}}(t)\tilde{F}_1(t)\leqslant\beta_1,\ \beta_1 = \mathrm{diag}\,\{\rho_1 I,\rho_2 I\},$$

$$\tilde{F}_2^{\mathrm{T}}(t)\tilde{F}_2(t)\leqslant\beta_2,\ \beta_2 = \rho_1 I.$$

在给出主要结果前,首先引入下面两个引理[2,3].

**引理 1** 对于任意向量 $z,y$ 和矩阵 $X>0$, 有

$$-2z^{\mathrm{T}}y\leqslant z^{\mathrm{T}}X^{-1}z+y^{\mathrm{T}}Xy.$$

**引理 2** 对于任意适当维数矩阵 $M,H,E$ 和 $F(t)$ 满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$, 那么下述结论成立:

a) 任意常数 $\varepsilon>0$, 有

$$HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}\leqslant\varepsilon^{-1}HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon E^{\mathrm{T}}E.$$

b) 任意常数 $\varepsilon>0$,矩阵 $X>0$,且 $\varepsilon I-EXE^{\mathrm{T}}>0$, 有

$$(M+HF(t)E)X(M+HF(t)E)^{\mathrm{T}}\leqslant$$
$$MXM^{\mathrm{T}}+MXE^{\mathrm{T}}(\varepsilon I-EXE^{\mathrm{T}})^{-1}EXM^{\mathrm{T}}+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}.$$

c) 任意常数 $\varepsilon>0$,矩阵 $X>0$,且 $X-\varepsilon HH^{\mathrm{T}}>0$, 有

$$(M+HF(t)E)^{\mathrm{T}}X^{-1}(M+HF(t)E)\leqslant$$
$$M^{\mathrm{T}}(X-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}M+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E.$$

**定理 1** 对于闭环系统(6),给定的常数 $\gamma>0$, 若存在正定对称阵 $P,X_i(i=1,2,3)$ 使得

$$\begin{bmatrix}Q(t) & Y(t)\\ Y^{\mathrm{T}}(t) & -Z\end{bmatrix}<0, \tag{7}$$

其中

$Q(t) = (A_K(t)+A_{dK}(t))^{\mathrm{T}}P+P(A_K(t)+A_{dK}(t)),$

$Y(t) = [PA_{dK}(t)\quad A_K^{\mathrm{T}}(t)\quad A_{dK}^{\mathrm{T}}(t+h)\quad PB_1\quad C_K^{\mathrm{T}}(t)],$

$Z = \mathrm{diag}\,\{\bar{h}^{-1}(X_1+X_2+X_3^{-1})^{-1},\bar{h}^{-1}X_1,\bar{h}^{-1}X_2,$
$\gamma^2 I-\bar{h}B_1^{\mathrm{T}}X_3B_1,I\},$

则闭环系统(6)是渐近稳定的, 且满足 $\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2$.

**证** 证明方法类似于文献[2]中定理的证明,在此略去.

在定理 1 中,充分条件式(7)还含有扰动 $\tilde{F}_i(t)$,还无法获得解.下面利用引理2消除式(7)中的 $\tilde{F}_i(t)$, 可得到以下定理.

**定理 2** 对于闭环系统(6),给定的常数 $\gamma>0$, 若存在正定对称阵 $P,X_i(i=1,2,3)$ 和常数 $\varepsilon_i>0(i=1,2,3,4,5,6,7)$ 使得

$$\begin{bmatrix}Q_K & Y\\ Y^{\mathrm{T}} & -R\end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

式中

$Q_K = (A_K+A_d)^{\mathrm{T}}P+P(A_K+A_d)+$
$\bar{h}PA_d(X_1+X_2)A_d^{\mathrm{T}}P+\varepsilon_1P\tilde{H}_1\tilde{H}_1^{\mathrm{T}}P+$
$(\varepsilon_2+\bar{h}\varepsilon_3)P\tilde{H}_2\tilde{H}_2^{\mathrm{T}}P,$

$Y = [E^{\mathrm{T}}\quad PA_d(X_1+X_2)\tilde{E}_2^{\mathrm{T}}\quad N_{K1}^{\mathrm{T}}\quad PN_{K2}\quad N_{K3}^{\mathrm{T}}\quad PB_1],$

$R = \mathrm{diag}\,\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6\},$

其中

$E^{\mathrm{T}} = [\tilde{E}_1^{\mathrm{T}}\quad \tilde{E}_2^{\mathrm{T}}],\ N_{K1}^{\mathrm{T}} = [A_K^{\mathrm{T}}\quad \tilde{E}_1^{\mathrm{T}}\quad A_d^{\mathrm{T}}\quad \tilde{E}_2^{\mathrm{T}}],$

$N_{K2} = [A_d\quad \tilde{H}_2],\ N_{K3}^{\mathrm{T}} = [C_K^{\mathrm{T}}\quad \tilde{E}_3^{\mathrm{T}}],$

$R_1 = \mathrm{diag}\,\{\varepsilon_1/\beta_1,\varepsilon_2/\beta_2\},$

$R_2 = \bar{h}^{-1}(\varepsilon_3/\beta_2-\tilde{E}_2(X_1+X_2)\tilde{E}_2^{\mathrm{T}})),$

$R_3 = \bar{h}^{-1}\mathrm{diag}\,\{X_1-\varepsilon_4\tilde{H}_1\tilde{H}_1^{\mathrm{T}},\varepsilon_4/\beta_1,$
$X_2-\varepsilon_5\tilde{H}_2\tilde{H}_2^{\mathrm{T}},\varepsilon_5/\beta_2\},$

$R_4 = \mathrm{diag}\,\{X_3-\varepsilon_6\beta_2\tilde{E}_2^{\mathrm{T}}\tilde{E}_2,\varepsilon_6 I\},$

$R_5 = \mathrm{diag}\,\{I-\varepsilon_7\tilde{H}_3\tilde{H}_3^{\mathrm{T}},\varepsilon_7/\beta_1\},$

$R_6 = \gamma^2 I-\bar{h}B_1^{\mathrm{T}}X_3B_1,$

则闭环系统(6)是渐近稳定的, 且满足 $\|z(t)\|_2<$

$\gamma \| w(t) \|_2$.

**证**　由定理 1 和引理 2,经过简单变换即可得证.

## 3 鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 状态反馈控制器设计(Robust and non-fragile $H_\infty$ state feedback controller design)

根据定理 2,下面给出不确定时滞系统(1)存在鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 状态反馈控制器(4)的充分条件.

**定理 3**　对于不确定时滞系统(1),其不确定满足式(2)和时滞满足式(3). 若存在正定对称阵 $X$, $F$, $Y_i (i = 1,2,3)$ 和常数 $\alpha_i > 0 (i = 1,2,3,4,5,6,7)$, 使得

$$\begin{bmatrix} Q & \bar{Y} \\ \bar{Y}^{\mathrm{T}} & -L \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

式中

$$\begin{aligned} Q = {} & X(A + A_d)^{\mathrm{T}} + (A + A_d)X + \\ & F^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + B_2F + A_d(Y_1 + Y_2)A_d^{\mathrm{T}} + \\ & \alpha_1 \tilde{H}_1 \tilde{H}_1^{\mathrm{T}} + (\alpha_2 + \alpha_3)\tilde{H}_2\tilde{H}_2^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

$$\bar{Y} = [XE^{\mathrm{T}} \quad A_d(Y_1+Y_2)\tilde{E}_2^{\mathrm{T}} \quad \bar{h}N_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{h}N_2 \quad N_3^{\mathrm{T}} \quad B_1],$$

$$L = \mathrm{diag}\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\},$$

其中

$$E^{\mathrm{T}} = [\tilde{E}_1^{\mathrm{T}} \quad \tilde{E}_2^{\mathrm{T}}],\ N_2 = [A_d \quad \tilde{H}_2],$$

$$N_1^{\mathrm{T}} = [(AX + B_2F)^{\mathrm{T}} \quad X\tilde{E}_1^{\mathrm{T}} \quad XA_d^{\mathrm{T}} \quad X\tilde{E}_2^{\mathrm{T}}],$$

$$N_3^{\mathrm{T}} = [(CX + DF)^{\mathrm{T}} \quad X\tilde{E}_3^{\mathrm{T}}],$$

$$L_1 = \mathrm{diag}\{\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2\},$$

$$L_2 = \alpha_3/\beta_2 - \tilde{E}_2(Y_1 + Y_2)\tilde{E}_2^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{aligned} L_3 = \mathrm{diag}\{ & Y_1 - \alpha_4\tilde{H}_1\tilde{H}_1^{\mathrm{T}}, \alpha_4/\beta_1, \\ & Y_2 - \alpha_5\tilde{H}_2\tilde{H}_2^{\mathrm{T}}, \alpha_5/\beta_2\}, \end{aligned}$$

$$L_4 = \mathrm{diag}\{Y_3 - \alpha_6\beta_2\tilde{E}_2^{\mathrm{T}}\tilde{E}_2, \alpha_6 I\},$$

$$L_5 = \mathrm{diag}\{I - \alpha_7\tilde{H}_3\tilde{H}_3^{\mathrm{T}}, \alpha_7/\beta_1\},$$

$$L_6 = \gamma^2 I - B_1^{\mathrm{T}}Y_3B_1,$$

则存在非脆弱反馈控制器(4), 其不确定满足式(5),使得闭环系统(6)渐近稳定, 且满足 $\| z(t) \|_2 < \gamma \| w(t) \|_2$, 而且控制器由 $u(t) = (K + \Delta K(t))x(t)$, $K = FX^{-1}$ 给出.

**证**　由定理 2 可得闭环系统(6) 渐近稳定,且满足 $\| z(t) \|_2 < \gamma \| w(t) \|_2$ 的充分条件为式(8). 取变换阵 $U = \mathrm{diag}\{P^{-1}, I, \bar{h}I, \bar{h}I, \bar{h}I, I, I\}$,对式(8)左乘 $U^{\mathrm{T}}$ 和右乘 $U$,并令 $X = P^{-1}$, $F = KP^{-1}$, $Y_i = \bar{h}X_i (i = 1,2,3)$, $\alpha_i = \varepsilon_i (i = 1,2,7)$, $\alpha_i = \bar{h}\varepsilon_i (i = 3,4,5,6)$ 就可得到式(9).

## 4 设计实例(Example)

设系统(1) 的参数及控制器(4)的已知参数为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0.3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.7 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \mathrm{diag}\{0.1, 0.2, 0.3\},$$

$$H_2 = \mathrm{diag}\{0.1, 0.1, 0.2\},\ H_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},\ E_1 = \mathrm{diag}\{1,1,1\},$$

$$E_2 = \mathrm{diag}\{0.5, 0.3, 0.4\},\ E_3 = \mathrm{diag}\{1,1,1\},$$

$$E_4 = \mathrm{diag}\{3,5,1\},\ \rho_1 = 0.9,\ \rho_2 = 0.9,$$

定常时滞为 $h \leqslant \bar{h} = 0.6$. 利用 MATLAB LMI Toolbox, LMI (9)的解为

$$X = \begin{bmatrix} 0.3200 & -0.1230 & -0.7861 \\ -0.1230 & 0.5476 & 0.4607 \\ -0.7861 & 0.4607 & 5.6560 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} -0.9845 & -0.4456 & -3.1094 \\ 0.6569 & -0.5361 & -5.3781 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = 0.5914.$$

那么,状态反馈控制器为

$$u(t) = (K + \Delta K(t))x(t).$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} -7.0555 & -1.1931 & -1.4333 \\ -0.5001 & -0.2501 & -1.0000 \end{bmatrix}.$$

在实际的状态反馈控制中,本文采用的控制规律为

$$u(t) = \begin{bmatrix} -7.0555 & -1.1931 & -1.4333 \\ -0.5001 & -0.2501 & -1.0000 \end{bmatrix} x(t).$$

如果控制器参数的实现误差满足式(5),那么所设计的控制器能够保证闭环系统是渐近稳定的,且有 $\gamma = 0.5914$ 的干扰抑制水平.

## 5 结论(Conclusion)

本文利用 LMI 方法,采用状态反馈控制,设计了不确定时滞系统的鲁棒非脆弱 $H_\infty$ 控制器. 该控制器存在的充分条件以一个 LMI 形式给出,而且该 LMI 是与时滞相关的. 该 LMI 的所有参数都是线性的,其优点是参数无需预取就可以利用 LMI Toolbox 获得解.

## 参考文献(References):


[1] KOKAME H, KOBAYASHI H, MORI T. Robust $H_\infty$ performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(2): 223 - 226.

[2] de SOUZA C E, LI Xi. Delay-dependent robust $H_\infty$ control of uncertain linear state-delayed systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(9): 1313 - 1321.

[3] CAO Yongyan, SUN Youxian, LAM J. Delay-dependent robust $H_\infty$ control for uncertain systems with time-varying delays [J]. *IEE Proc-Control Theory and Applications*, 1998, 145(3): 338 - 344.

[4] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust, fragile, or optimal [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 - 1105.

[5] FAMULARO D, DORATO P, ABDALLAH C T, et al. Robust non-fragile LQ controller: the static state feedback case [J]. *Int J Control*, 2000, 73(2): 159 - 165.

[6] YANG Guanghong, WANG Jianliang, LIN Chong. $H_\infty$ control for linear systems with additive controller gain variation [J]. *Int J Control*, 2000, 73(16): 1500 - 1506.


## 作者简介:


**王 武** (1973 —),男,1999年在福建农业大学机电工程系获硕士学位,现为福州大学电气工程系博士研究生.研究方向为时滞系统和不确定系统的非脆弱 $H_\infty$ 控制以及LMI方法应用研究等. E-mail: ofwyang@fzu.edu.cn 或 wangwu263@163.net;

**杨富文** (1963 —),男,1990年在华中理工大学自动控制系获博士学位,现为福州大学电气工程系教授,博士生导师.主要研究方向为 $H_\infty$ 控制与滤波,迭代学习控制以及自动化工程应用研究.


(上接第472页)


the model of nelson & winter [EB/OL]. [2001 - 05]. Http://yildizoglu.nontesquieu.u - bordeaux.fr

[5] 易继锴.智能控制技术[M].北京:北京工业大学出版社,1999: 75 - 80.

(YI Jikai. *Inteligent Control Technology* [M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 1999: 75 - 80.)

[6] KIM D. The link between individual and organizational learning [J]. *Sloan Management Review*, 1993, 35(1): 37 - 50.


## 作者简介:


**冯彦杰** (1971 —),女,上海交通大学管理学院管理科学与工程博士研究生,从事复杂系统,企业管理等方面的研究. E-mail: fengyanjie@263.net;

**王浣尘** (1933 —),男,上海交通大学管理学院教授,博士生导师,21世纪发展研究院执行副院长,管理科学与工程博士后流动站站长,IEEE资深会员,中国系统工程学会副理事长,曾发表专著3部,论文300余篇.研究领域涉及自动控制,系统科学与系统工程,管理科学与工程,经济控制论,社会经济与企业发展战略,可持续发展,信息化与网络化等.