文章编号：1000-8152(2003)05-0773-03

线性离散系统具有闭环极点约束的输出反馈H_∞控制

俞 立，杨海清
（浙江工业大学 自动化系，浙江 杭州 310032）

摘要：对一类线性离散系统，研究了具有闭环圆盘极点约束的输出反馈H_∞控制问题.基于线性矩阵不等式处理方法，导出了输出反馈控制器的存在条件和设计方法.和现有方法相比，本文的方法具有更小的保守性.

关键词：H_∞控制；极点配置；输出反馈；线性矩阵不等式

中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A

Output feedback H_∞ control for linear discrete-time systems with closed-loop disk pole constraints

YU Li, YANG Hai-qing
(Department of Automation, Zhejiang University of Technology, Zhejiang Hangzhou, 310032, China)

Abstract: The problem of output feedback H_∞ control with closed-loop disk pole constraints was considered for linear discrete-time systems. The existence condition and design procedure for the desired output feedback controllers were presented via the linear matrix inequality (LMI) approach. Compared with the existing results, the proposed one is of less conservatism.

Key words: H_∞ control; pole placement; output feedback; LMI

1 引言(Introduction)

近年来，H_∞控制研究一直是自动控制界的热点研究课题之一，受到了广泛、深入的研究，取得了一系列的研究成果.基于系统各种性能的要求，系统的多目标控制问题也受到了人们的重视，并提出了一些解决方法.其中，基于线性矩阵不等式的多目标控制处理方法被证明是一种有效的方法[1].特别地，文献[2]结合系统动态性能的考虑，通过引进一类可以用线性矩阵不等式刻画的区域(称为LMI区域)，给出了具有闭环区域极点约束的H_∞控制问题的解.文献[2]的主要处理方法是将H_∞性能要求所导出的线性矩阵不等式和闭环极点约束所导出的线性矩阵不等式联立，通过取一个公共的Lyapunov矩阵来求解相应的线性矩阵不等式系统.显然，这种将不同约束条件中的Lyapunov矩阵限制为一个单一公共变量的处理方法使得所导出的结论具有很大的保守性.事实上，文献[3,4]阐述了只要系统极点在一个适当的圆盘中，就可以保证系统具有满意的动态性能.最近，文献[5]利用圆盘的特征，导出了更小保守性的具有闭环圆盘极点约束的H_∞控制方法.但该文中只考虑了状态反馈问题，另外，设计过程中所涉及的矩阵不等式不是凸的，其求解仍然是困难的.

本文对一类线性离散系统，采用线性矩阵不等式处理方法，研究和提出了使得闭环极点在给定圆盘中，并具有给定H_∞性能的输出反馈控制器存在条件和设计方法.

2 问题描述和准备(Problem description and preparation)

考虑线性时不变离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ew(k), \\ z(k) = C_1x(k) + D_1u(k), \\ y(k) = C_2x(k). \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(k)\in\mathbb{R}^n$是系统的状态向量，$u(t)\in\mathbb{R}^m$是控制输入，$w(t)\in\mathbb{R}^l$是外部扰动输入，$z(t)\in\mathbb{R}^p$是被控输出，$y(t)\in\mathbb{R}^q$是测量输出，A,B,C_1,C_2,D_1和E是已知的具有适当维数的实常数矩阵.$D(\alpha,r)$表示复平面上单位圆内中心在$(\alpha,0)$，半径为r的圆盘，其中α和r满足$|\alpha|+r<1$.

收稿日期：2002-05-08；收修改稿日期：2003-03-03.
基金项目：国家自然科学基金(60274034)；教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目.

对给定的单位圆内的圆盘 $D(\alpha,r)$ 和正常数 γ, 考虑设计一个输出反馈控制器

$$\begin{aligned} x_K(k+1) &= A_K x_K(k) + B_K y(k), \\ u(k) &= C_K x_K(k) + D_K y(k), \end{aligned} \tag{2}$$

使得闭环系统

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_c \xi(k) + B_c w(k), \\ z(k) &= C_c \xi(k) \end{aligned} \tag{3}$$

具有以下性质:

i) 所有闭环极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$ 中;

ii) 从外部扰动 $w(k)$ 到被控输出 $z(k)$ 的传递函数 $H(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c$ 满足

$$\| H(z) \|_\infty < \gamma. \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} A_c = \begin{bmatrix} A + BD_KC_2 & BC_K \\ B_KC_2 & A_K \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_c = [C_1 + D_1D_KC_2 \quad D_1C_K] \end{cases} \tag{5}$$

使得闭环系统具有以上两条性质的控制器(2)称为是系统(1)的具有 D-稳定的 H_∞ 控制器.

本文的目的是要导出具有 D-稳定的 H_∞ 控制器存在条件和设计方法.

引理 1[5] 对给定单位圆内的圆盘 $D(\alpha,r)$ 和正常数 γ, 如果存在一个对称正定矩阵 P, 使得

$$\begin{cases} \gamma^2 I - B_c^{\mathrm T}PB_c > 0, \\ A_{cr}^{\mathrm T}PA_{cr} - P + \beta C_c^{\mathrm T}C_c + \beta A_c^{\mathrm T}PB_c(\gamma^2 I - \\ B_c^{\mathrm T}PB_c)^{-1}B_c^{\mathrm T}PA_c < 0. \end{cases} \tag{6}$$

其中 $A_{cr} = (A_c - \alpha I)/r$, $\beta = (1 - |\alpha|)/r^2$, 则系统(3)具有性质 i)和 ii).

3 主要结论(Main results)

利用矩阵 Schur 补性质, 首先将矩阵不等式组(6)转化成一个等价的线性矩阵不等式.

引理 2 存在对称正定矩阵 P, 使得矩阵不等式组(6) 成立, 当且仅当矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} -\alpha PA_c - \alpha A_c^{\mathrm T}P + (\alpha^2 - r^2)P & 0 & A_c^{\mathrm T}P & C_c^{\mathrm T} & 0 \\ * & -\beta_1^{-1}\gamma^2 I & B_c^{\mathrm T}P & 0 & B_c^{\mathrm T}P \\ * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_1^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_2 P \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

其中 $\beta_1 = 1 - |\alpha|$, $\beta_2 = (\beta_1^{-1} - 1)^{-1}$, 矩阵中的 $*$ 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块.

证 在式(6)的第二个矩阵不等式中代入 A_{cr} 的表达式, 经整理可得

$$A_c^{\mathrm T}PA_c - \alpha PA_c - \alpha A_c^{\mathrm T}P + (\alpha^2 - r^2)P + \beta_1 C_c^{\mathrm T}C_c + \beta_1 A_c^{\mathrm T}PB_c(\gamma^2 I - B_c^{\mathrm T}PB_c)^{-1}B_c^{\mathrm T}PA_c < 0. \tag{8}$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 不等式 $\gamma^2 I - B_c^{\mathrm T}PB_c > 0$ 和式(8)等价于

$$\begin{bmatrix} A_c^{\mathrm T}PA_c - \alpha PA_c - \alpha A_c^{\mathrm T}P + (\alpha^2 - r^2)P + \beta_1 C_c^{\mathrm T}C_c & A_c^{\mathrm T}PB_c \\ B_c^{\mathrm T}PA_c & -\beta_1^{-1}(\gamma^2 I - B_c^{\mathrm T}PB_c) \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

上式可进一步写成

$$\begin{bmatrix} A_c^{\mathrm T} \\ B_c^{\mathrm T} \end{bmatrix} P [A_c \quad B_c] + \begin{bmatrix} -\alpha PA_c - \alpha A_c^{\mathrm T}P + (\alpha^2 - r^2)P + \beta_1 C_c^{\mathrm T}C_c & 0 \\ 0 & -\beta_1^{-1}\gamma^2 I + (\beta_1^{-1} - 1)B_c^{\mathrm T}PB_c \end{bmatrix} < 0,$$

再次利用矩阵的 Schur 补性质, 从上式可得矩阵不等式(7).

由引理 1 和 2, 如果存在矩阵 A_K, B_K, C_K, D_K 和 $P > 0$, 使得矩阵不等式(7) 成立, 则利用这组矩阵 A_K, B_K, C_K, D_K 构造的控制器(2)是系统(1)具有 D-稳定的 H_∞ 控制器. 然而, 由于在矩阵不等式(7)中, 未知变量 A_K, B_K, C_K, D_K 和 P 是以非线性的方式耦合在一起, 难以直接求解该矩阵不等式. 以下, 采用线性矩阵不等式的变量替换方法[1], 通过一个适当的变量替换, 将不等式(7)转化成一个等价的新变量下的线性矩阵不等式, 从而可以应用现有求解线性矩阵不等式的方法来求解.

将矩阵 P 和它的逆 P^{-1} 进行分块:

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\mathrm T} & W \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^{\mathrm T} & Z \end{bmatrix}.$$

其中 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称矩阵. 由关系式 $P^{-1}P = I$ 可得

$$MN^{\mathrm T} = I - XY. \tag{10}$$

定义

$$F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^{\mathrm T} & 0 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^{\mathrm T} \end{bmatrix},$$

则

$$PF_1 = F_2,\ F_1^{\mathrm T}PF_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}. \tag{11}$$

定义一组新的变量:

$$\begin{cases} \hat A = YAX + YB\hat C + NB_KC_2X + NA_KM^{\mathrm T}, \\ \hat B = YBD_K + NB_K, \\ \hat C = D_KC_2X + C_KM^{\mathrm T}, \\ \hat D = D_K, \end{cases} \tag{12}$$

则利用矩阵运算,可得

$$\begin{cases} F_1^{\mathrm{T}}PA_cF_1 = \begin{bmatrix} AX + B\hat{C} & A + B\hat{D}C_2 \\ \hat{A} & YA + \hat{B}C_2 \end{bmatrix}, \\ C_cF_1 = [\,C_1X + D_1\hat{C} \quad C_1 + D_1\hat{D}C_2\,], \\ B_c^{\mathrm{T}}PF_1 = [\,E^{\mathrm{T}} \quad E^{\mathrm{T}}Y\,]. \end{cases} \tag{13}$$

以下定理用一个线性矩阵不等式的可行性和可行解给出了具有 D-稳定的输出反馈 H_∞ 控制器存在条件和设计方法.

定理 1　对给定单位圆内的圆盘 $D(\alpha,r)$ 和正常数 γ, 如果以下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} M_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ M_3 & M_2 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\beta_1^{-1}\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ AX + B\hat{C} & A + B\hat{D}C_2 & E & -X & * & * & * & * \\ \hat{A} & YA + \hat{B}C_2 & YE & -I & -Y & * & * & * \\ C_1X + D_1\hat{C} & C_1 + D_1\hat{D}C_2 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1^{-1}I & * & * \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & -\beta_2X & * \\ 0 & 0 & YE & 0 & 0 & 0 & -\beta_2I & -\beta_2Y \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

是可行的,则系统(1)存在具有 D -稳定的输出反馈 H_∞ 控制器(2).其中

$$M_1 = -\alpha(AX + XA^{\mathrm{T}} + B\hat{C} + \hat{C}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) + (\alpha^2 - r^2)X,$$

$$M_2 = -\alpha(YA + A^{\mathrm{T}}Y + \hat{B}C_2 + C_2^{\mathrm{T}}\hat{B}) + (\alpha^2 - r^2)Y,$$

$$M_3 = -\alpha(A^{\mathrm{T}} + C_2^{\mathrm{T}}\hat{D}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \hat{A}) + (\alpha^2 - r^2)I.$$

证　事实上,对不等式(7)左边的矩阵分别右乘矩阵 diag $\{F_1, I, F_1, I, F_1\}$ 和左乘该矩阵的转置,并利用关系式(11)和(13),即可得不等式(7)等价于不等式(14).由引理 1 和 2 得证定理的结论.

容易看到矩阵不等式(14)是矩阵变量 $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D},X,Y$ 的一个线性矩阵不等式,因此,可以应用 MATLAB 软件中 LMI 工具箱提供的相关求解器来求解该线性矩阵不等式.如果 $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D},X,Y$ 是线性矩阵不等式(14)的一个可行解,则可以按以下步骤求得系统(1)具有 D-稳定的输出反馈 H_∞ 控制器(2):

Step 1　通过奇异值分解方法,从关系式(10)可以得到可逆矩阵 M 和 N;

Step 2　利用上一步得到的可逆矩阵 M 和 N 及可行解 $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D},X,Y$,从式(12) 可唯一确定所求控制器的系数矩阵 A_K, B_K, C_K, D_K.

4　结论(Conclusion)

本文采用线性矩阵不等式处理方法,给出了使得闭环系统同时满足圆盘极点约束和 H_∞ 性能要求的输出反馈控制器设计方法.本文所考虑的系统不含参数不确定性,但应用现有不确定系统鲁棒控制的处理方法,通过考虑在顶点处的矩阵不等式(14),可直接将定理 1 的结果推广到具有多胞型参数不确定性的系统.另外,类似于文献[6]的处理方法,也可以处理具有范数不确定性的系统.

参考文献(References):

[1]　SCHERER C, GAHINET P, CHILALI M. Multiobjective output feedback control via LMI optimization [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997,42(7):896 - 911.

[2]　CHILALI M, GAHINET P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996,41(3):358 - 366.

[3]　HADDAD W M, BERNSTEIN D S. Controller design with regional pole constraints [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(1): 54 - 69.

[4]　俞立,陈国定,杨马英.不确定系统具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制[J].自动化学报,2000,26(1):116 - 120.
(YU Li, CHEN Guoding, YANG Maying. Robust control of uncertain linear systems with disk pole constraints [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(1): 116 - 120.)

[5]　XU S, YANG C, ZHOU S. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with circular pole constraints [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(1):13 - 18

[6]　俞立,陈国定,杨马英.不确定系统的鲁棒输出反馈区域极点配置[J].控制理论与应用,2002,19(2):244 - 246.
(YU Li, CHEN Guoding, YANG Maying. Robust regional pole assignment of uncertain systems via output feedback controllers [J]. *Control Theory & Applications*, 2002,19(2): 244 - 246.)

作者简介:

俞　立　(1961 —),男,1982 年毕业于南开大学控制理论专业,后在浙江大学获硕士和博士学位,1993 年至 1995 年获瑞士联邦政府奖学金留学瑞士联邦理工学院,2000 年在香港科技大学做访问研究,现为浙江工业大学信息工程学院教授,主要研究领域包括鲁棒控制,时滞系统的分析和控制等,E-mail:lyu@mail.hz.zj.cn;

杨海清　(1971 —),男,浙江工业大学信息工程学院信息与控制研究所讲师. 主要研究方向为先进控制策略的研究开发与应用.