文章编号：1000-8152(2004)01-0089-05

基于两级算法的对偶控制

钱富才[1]，刘　丁[1]，李云霞[2]
（1.西安理工大学 自动化与信息工程学院，陕西 西安 710048；2.电子科技大学 自动化学院，四川 成都，610054）

摘要：考虑具有未知参数的随机系统的最优控制问题.采用包含新息方差指数项的损失函数优化系统的性能.新的损失函数由两部分组成：第一部分反映了对输出的调节作用；第二部分反映了辩识系统中未知参数应尽可能多地收集系统信息的需求.提出了一种两级优化算法.该算法首先把不可分问题转化为可分的两目标优化问题，再从两目标优化的非劣解集中挑出原问题的最优解.该控制律易于实施且具有对偶特点.仿真结果表明本文所得的控制律的有效性.

关键词：随机系统；最小方差控制；对偶控制
中图分类号：TP275　　**文献标识码**：A

Dual control based on two-level algorithm

QIAN Fu-cai[1], LIU Ding[1], LI Yun-xia[2]
(1.School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Shaanxi Xi'an 710048, China;
2.School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology, Sichuan Chengdu 610054, China)

Abstract: The control of a stochastic system with unknown parameter was considered. A novel cost function, which includes the exponent term of the variance of innovations, was used to optimize the performance of the system. The cost function consisted of two parts — one reflects the goal of regulating the output, and the other reflects the need to gather as much information as possible about the parameters of this system. A two-level optimization algorithm was proposed. The non-separable problem was first converted into separable two-objective optimization problem, then the optimal control of the original problem is selected from the set of non-inferior solutions of two-objective optimization problem. Such optimal control had an explicit solution that allowed for an easy implementation and dual properties. Finally, simulation results were given to show that the control law obtained in this paper is effectiveness.

Key words: stochastic system; minimum variance control; dual control

1　引言(Introduction)

40年前，对于参数未知的随机系统，前苏联学者Feldbaum提出了对偶控制[1](dual control).其本质就是控制器，一方面要控制系统使其输出趋向期望的目标；另一方面，还要对系统进行学习以减少系统中参数的不确定性，两者之间存在耦合，不能分开进行，这种耦合导致了最优控制的解析解无法获得.2000年IEEE Control Magazine把对偶控制列为上世纪对控制理论有重大影响的25个问题之一，至今没有解决.

2002年，李端教授等人对于参数的不确定性仅存在于测量方程，提出了方差最小化方法，获得了具有主动学习特点的对偶控制律[2]，同年，他们还用方差最小化和度量系统参数不确定性熵的方法给出了参数不确定性存在于状态方程与测量方程的对偶控制律[3]，然而，这些方法仅适用于被控系统的模型为状态空间描述，对于方差最小化问题无能为力.

对于系统参数未知的方差最小化问题，1974年，Alster等人将控制目标由极小化N步输出方差简化为极小化一步输出方差，获得了一个具有对偶特点的控制律[4]，通过在一步优化问题的基础上增加了一个关于参数估计误差方差矩阵的逆的迹约束以赋予控制器的学习性质，其突出优点在于能够避开用摄动控制器对系统进行控制时出现的断开现象，但控制指标不及摄动控制.Kalman滤波器的新息序列包含了参数真值与估计之间的误差信息.1982年，Milito等人[5]根据这一事实在控制指标的基础上，通过学习因子引入新息序列的方差，从而实现了控制作用和估计作用的良好折衷，这就是著名的IDC控制策略(IDC: innovations dual control).该对偶控制对应的性能指标优于已有的具有对偶特点的次优控制，但是，最优的学习因子没有解决且学习因子由设计者事先给出、在各控制阶段保持常数，仿真

收稿日期：2002-07-01；收修改稿日期：2003-06-30.

表明:系统性能指标的优劣与学习因子的选取密切相关.本文提出了基于两级算法的对偶控制方法(DCTL:dual control based on two-level algorithm):将原来不可解的动态规划问题转化为优化一个新的目标函数,它包含了分别表达输出调节要求和参数学习要求的两部分,体现了对偶性质.为求解这个优化问题,本文采用了两级最优算法,该算法收敛快,从而使得求取控制信号的计算量小,同时,获得了各阶段的最优学习因子.仿真结果表明,这种方法具有较好的对偶性质且性能指标优于 Milito 等人提出的 IDC 控制[5].

2 问题的提出(Problem statement)

考虑下面具有未知参数的随机系统:

$$\begin{aligned}&y(k+1)=\\&b_1u(k)+b_2u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n+1)+\\&a_1y(k)+a_2y(k-1)+\cdots+a_my(k-m+1)+\\&e(k),\ k=0,1,\cdots,N-1.\end{aligned}\tag{1}$$

其中,$b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是系统的参数,它们是未知的,本文假定为常数.$\{u(k)\}$ 是控制序列,$\{y(k)\}$ 是输出序列,$\{e(k)\}$ 是均值为0,方差为 σ^2 的高斯白噪声.随机系统(1)中包含两种不确定性:一种是外部噪声 $e(k)$,这种不确定性不能减少,也无法控制;另外一种是系统中的未知参数,这种不确定性能够通过学习不断减少直至完全消除.

定义如下向量:

$$x(k)=[b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1,a_2,\cdots,a_m]^{\mathrm T},\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\Phi(k)=[&u(k),u(k-1),\cdots,u(k-n+1),\\&y(k),y(k-1),\cdots,y(k-m+1)]^{\mathrm T},\end{aligned}\tag{3}$$

这样,系统(1)可以表示为

$$y(k+1)=\Phi^{\mathrm T}(k)x(k)+e(k).\tag{4}$$

恒定的未知参数的动态行为可以表示为

$$x(k+1)=x(k).\tag{5}$$

假设初始条件

$$\begin{aligned}I(0)=\{&u(-1),u(-2),\cdots,u(-n+1),\\&y(0),y(-1),\cdots,y(-m+1)\}\end{aligned}$$

已知.控制随机系统(1)的目的就是让输出 $y(k)$ 跟踪期望目标 $y_r(k)$,因此,可以取如下目标函数:

$$J=\mathrm E\left\{\sum_{k=1}^{N}[y(k)-y_r(k)]^2\right\}.\tag{6}$$

其中算子 $\mathrm E\{\cdot\}$ 表示对随机变量取均值.设当前的实时信息为

$$I(k)=\{u(k-1),\cdots,u(0),y(k),\cdots,y(1)\}.$$

最优控制的目标就是通过求控制输入

$$u(k)=f_k(I(k)),\ k=0,1,\cdots,N-1$$

极小化目标函数(6).因此,控制问题的提法为

$$\begin{aligned}&\min J\\&\text{s.t. } x(k+1)=x(k),\\&\qquad y(k+1)=\Phi^{\mathrm T}(k)x(k)+e(k).\end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned}&\hat x(k)=\mathrm E\{x(k)\mid I(k)\},\\&\tilde x(k)=x(k)-\hat x(k),\\&P(k)=\mathrm E\{\tilde x^{\mathrm T}(k)\tilde x(k)\}.\end{aligned}$$

对于状态方程(5)、观测方程(4)的随机系统,用 Kalman 滤波公式,有

$$\begin{aligned}&\hat x(k+1)=\hat x(k)+K(k)v(k),\\&K(k)=P(k)\Phi(k)\{\Phi^{\mathrm T}(k)P(k)\Phi(k)+\sigma^2\}^{-1},\\&P(k+1)=P(k)-K(k)\Phi^{\mathrm T}(k)P(k).\end{aligned}$$

其中 $v(k)=y(k)-\Phi^{\mathrm T}(k)\hat x(k)$ 是新息序列.

3 对偶控制律(Dual control law)

对于目标函数(6),利用动态规划无法求得解析解,因此本文从随机次优角度出发,提出如下修改目标函数

$$J(k)=J_1(k)+\mathrm e^{-J_2(k)}.\tag{7}$$

式中

$$\begin{aligned}J_1(k)=&\mathrm E\{[y(k)-y_r(k)]^2\mid I(k)\}-\sigma^2=\\&[\Phi^{\mathrm T}(k)\hat x(k)-y_r(k)]^2+\Phi^{\mathrm T}(k)P(k)\Phi(k),\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}J_2(k)=&\mathrm E\{v^2(k)\mid I(k)\}-\sigma^2=\\&\Phi^{\mathrm T}(k)P(k)\Phi(k).\end{aligned}\tag{9}$$

$J_1(k)$ 为原问题的控制目标,表达了对输出的调节要求;$J_2(k)$ 为新息部分,表达了对参数的学习要求.因此,利用目标函数(7)求出的控制具有对偶性质.它不同于谨慎控制器[7]、IDC 控制器[5].谨慎控制只是被动地降低控制信号对参数不确定性的依赖,而不进行主动的参数学习,不具有对偶特点,其实质是优化 $J_1(k)$;IDC 控制器,其实质是优化 $J_1(k)-\lambda_{\mathrm{IDC}}(k+1)J_2(k)$,$0\leqslant\lambda_{\mathrm{IDC}}(k+1)\leqslant1$ 为学习因子,表征了在调节作用和学习作用之间的折衷,体现了对偶控制的思想.文献[5]指出,学习因子的取值影响到系统的性能,但是,关于如何求取最优的学习因子的问题没有解决,因此文献[5]只是将其固定为取值在[0,1]上的一个常数,无法实时调整.本文提出的目标函数,利用两级最优算法,可以转化为优化 $J_1(k)+\lambda J_2(k)$,λ 为 Lagrange 乘子,并且可以根据当前信息实时调整,比 IDC 更能充分利用对偶控制的优越性,以改善具有未知参数的随机系统

的性能.因此,从理论上,用本文提出的目标函数(7)所求出的控制器要优于谨慎控制器和IDC控制器,这一结论在仿真中也得到了证实.

用目标函数(7)代替原来的目标函数(6),即在每个时刻 k,求解如下新的优化问题(NOP):

$$\min_{u(k)} J(k) = J_1(k) + e^{-J_2(k)}.$$

下面建立求解问题(NOP)的两级算法的理论基础.

根据式(3)中 $\Phi(k)$,Kalman滤波中方差 $P(k)$ 及 $\hat{x}(k)$ 的定义,对它们进行如下分块:

$$\Phi(k) = [u(k) \mid \Psi(k)]^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{x}(k) = [\hat{b}_1(k) \mid \hat{\alpha}(k)]^{\mathrm{T}},$$

$$P(k) = \begin{bmatrix} P_{b_1}(k) & P_{ab_1}(k) \\ P_{ab_1}^{\mathrm{T}}(k) & P_a(k) \end{bmatrix},$$

则 $J_1(k)$ 和 $J_2(k)$ 能够重新表示为

$$J_1(k) = [\hat{b}_1^2(k) + P_{b_1}(k)]u^2(k) + 2[\Psi(k)P_{ab_1}(k) + \hat{\alpha}(k)\hat{b}_1(k)\Psi^{\mathrm{T}}(k) - \hat{b}_1(k)y_r(k)]u(k) + h_1, \tag{10}$$

$$J_2(k) = P_{b_1}(k)u^2(k) + 2\Psi(k)P_{ab_1}(k)u(k) + h_2. \tag{11}$$

其中,h_1, h_2 是与 $u(k)$ 无关的项.可以看出,$J_1(k)$ 和 $J_2(k)$ 都是关于 $u(k)$ 的二次函数.问题(NOP)直接求解是很困难的,为此构造如下多目标优化问题(MOP):

$$\min_{u(k)} [J_1(k), -J_2(k)]^{\mathrm{T}}.$$

定义1　设 $\hat{u}(k)$ 为问题(MOP)的可行解,如果不存在可行解 $u(k)$,使得

$$J_1(u(k)) \leqslant J_1(\hat{u}(k)),$$

$$J_2(u(k)) \geqslant J_2(\hat{u}(k)).$$

其中至少有一个不等式严格成立,则称 $\hat{u}(k)$ 为(MOP)的非劣解.

定理1　问题(NOP)的最优解一定在问题(MOP)的非劣解集中.

证　用反证法.设 $\{u^*(k)\}$ 是问题(NOP)的最优解,但不是问题(MOP)的非劣解.那么,存在一个可行解 $\{\hat{u}(k)\}$.使得

$$J_1(k)\mid_{\{\hat{u}(k)\}} \leqslant J_1(k)\mid_{\{u^*(k)\}},$$

$$J_2(k)\mid_{\{\hat{u}(k)\}} \geqslant J_2(k)\mid_{\{u^*(k)\}},$$

且至少有一个不等式严格成立.显然,$J(k)$ 关于 $J_1(k)$ 单调递增、关于 $J_2(k)$ 单调递减,再根据上式,可得

$$J(k)\mid_{\{\hat{u}(k)\}} < J(k)\mid_{\{u^*(k)\}}.$$

这与 $\{u^*(k)\}$ 的最优性矛盾.因此,问题(NOP)的最优解 $\{u^*(k)\}$ 在问题(MOP)的非劣解集中.

该定理表明:要求问题(NOP)的最优解,只需把注意力放在求问题(MOP)的非劣解集中.问题(MOP)的每个非劣解可以用下面的Lagrange问题(LOP)产生: $\min\limits_{u(k)} [J_1(k) + \lambda J_2(k)]$.

定义2　$J_\lambda(k) = J_1(k) + \lambda J_2(k)$,根据式(10)与式(11),则问题(LOP)的目标函数可以写成如下形式:

$$J_\lambda(k) = [\hat{b}_1^2(k) + (1+\lambda)P_{b_1}(k)]u^2(k) + 2\{[\hat{b}_1(k)\hat{\alpha}(k)\Psi^{\mathrm{T}}(k) - \hat{b}_1(k)y_r(k) + (1+\lambda)P_{ab_1}^{\mathrm{T}}(k)\Psi^{\mathrm{T}}(k)\}u(k) + h. \tag{12}$$

式中 h 是与 $u(k)$ 无关的项.

关于 $u(k)$ 最小化 $J_\lambda(k)$,即令

$$\mathrm{d}J_\lambda(k)/\mathrm{d}u(k) = 0,$$

得到

$$u(k) = -\delta_1/\delta_2. \tag{13}$$

式中

$$\delta_1 = [(1+\lambda)P_{ab_1}^{\mathrm{T}}(k) + \hat{\alpha}(k)\hat{b}_1(k)]\Psi^{\mathrm{T}}(k) - \hat{b}_1(k)y_r(k),$$

$$\delta_2 = [1+\lambda]P_{b_1}(k) + \hat{b}_1^2(k).$$

由于 $J_1(k) + \lambda J_2(k)$ 的最优解 $\{u^*(k)\}$ 中含有 λ,把它代入问题(NOP)的目标函数中,导致目标函数也是 λ 的函数.

定理2　设 λ^* 对应的非劣解为问题(NOP)的最优解,则

$$\lambda^*(k) = -e^{-J_2(k)}\mid_{u^*(k)}. \tag{14}$$

证　把问题(LOP)的最优解 $\{\hat{u}(k,\lambda)\}$ 代回问题(NOP)的目标函数中,λ^* 达到最优,则

$$\frac{\mathrm{d}J_1(k)}{\mathrm{d}\lambda}\mid_{\lambda^*} - e^{-J_2(k)}\frac{\mathrm{d}J_2(k)}{\mathrm{d}\lambda}\mid_{\lambda^*} = 0,$$

对于问题(LOP)在 λ^* 对应的最优解处,根据文献[6]有

$$\frac{\mathrm{d}J_1(k)}{\mathrm{d}\lambda}\mid_{\lambda^*} + \lambda^*\frac{\mathrm{d}J_1(k)}{\mathrm{d}\lambda}\mid_{\lambda^*} = 0.$$

联合以上两式,可得 $\lambda^*(k) = -e^{-J_2(k)}\mid_{u^*(k)}$.定理得证.

该定理给出了每个阶段的最优学习因子.

下面推导搜索最优 λ 的修正公式,以便从问题(MOP)的非劣解中挑出问题(NOP)的最优解.

根据问题(NOP),$J(k)$ 的梯度为

$$\nabla J(k)=\left[\frac{\partial J(k)}{\partial J_1(k)},\frac{\partial J(k)}{\partial J_2(k)}\right]^{\mathrm{T}}=[1,-\mathrm{e}^{-J_2(k)}]^{\mathrm{T}},$$

设 $w=[1,\lambda]^{\mathrm{T}}$, 构造以下方向向量

$$V(w)=[V_1(w),V_2(w)]^{\mathrm{T}}=-\nabla J(k)+\frac{w^{\mathrm{T}}\nabla J(k)}{w^{\mathrm{T}}w}w.$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式,有

$$\nabla J^{\mathrm{T}}(k)V(w)=-\|\nabla J(k)\|^2+\frac{(w^{\mathrm{T}}\nabla J(k))^2}{w^{\mathrm{T}}w}\leqslant 0.$$

这说明 $V(w)$ 是 $J(k)$ 的一个下降方向.显然,$V(w)=0$,表明最优性条件成立,即 $\lambda=-\mathrm{e}^{-J_2(k)}$,设第 s 次迭代所用的λ记为λ^s,如果最优的 λ 采用梯度法搜索,则

$$\lambda^{s+1}=\lambda^s-\mu V_2(w). \qquad (15)$$

式中:μ 为搜索步长,λ 校正结束的条件为 $V_2(w)=0$. 这样便有如下的两级算法:

Step 1 给定 λ,求解问题(LOP),获得式(13)中的控制 $u(k)$.

Step 2 如果 $|\lambda+\mathrm{e}^{-J_2(k)}|\leqslant\varepsilon$,求到所需要的$\lambda$,结束;否则用公式(15)修改 λ,回 Step 1.

从式(13)可以看出,k 时刻的控制输入$u(k)$除了与系统参数的估计值 $\hat{x}(k)$ 有关外,还与参数的估计误差的方差阵 $P(k)$ 有关:

1) 若系统中不存在参数的不确定性,即 $P(k)=0$, 从而得到控制律:

$$u(k)=-\frac{\hat{\alpha}^{\mathrm{T}}(k+1)\Psi(k+1)-y_r(k+1)}{\hat{b}_1(k+1)}.$$

这与熟知最小方差控制是完全一致的,对这种情况表明:所得的控制是合理的.

2) 假设参数估计较差,从式(13)看出, $P_{b_1}(k)$ 出现在分母中,减少了 $u(k)$ 对 $\hat{b}_1(k)$ 中不确定性的依赖程度,此即控制器的谨慎作用.因此,控制 $u(k)$ 既能较好地满足系统的控制目标,又能考虑到系统未知参数的不确定性对控制作用的影响,从而具有对偶特性.

3) 从式(9)可以看出,$J_2(k)$ 的大小实际上反映了参数估计的效果,且有 $J_2(k)>0$,目标函数(7)中第二项的加入用来保证控制的学习特性.考虑极限状态:如果参数估计非常好,那么,由式(14),易知此时 $\lambda^*(k)\to-1$,再结合式(13),很明显,这时的控制器与确定性控制器更接近;反之,若参数估计很差,此时 $\lambda^*(k)\to 0$,此时的控制器与谨慎控制器更接近,这符合对偶控制的思想.

综上所述,求解控制信号 $u(k)(k=0,1,\cdots N-1)$ 的步骤为:

Step 1 用 Kalman 滤波公式计算 $\hat{x}(k)$,估计方差 $P(k)$.

Step 2 用两级算法搜索最优的 λ,得对偶控制(13),如果 $k=N-1$,结束;否则令 $k=k+1$,转至 Step 1.

4 仿真分析(Simulation analysis)

考虑式(1)所描述的系统,其中,

$$n=2,\ m=1,\ b_1=1.2,\ b_2=0.9,$$
$$a=-1,\ e(k)\sim N(0,2).$$

初始条件设为

$$I(0)=[u(-1),y(0)]=[-0.5,-0.5],$$
$$\hat{x}(0)=[0.1,0.1,0.1]^{\mathrm{T}},$$
$$P(0)=\mathrm{E}\{x^{\mathrm{T}}(0)x(0)\}=10I_3.$$

仿真中,IDC 的学习因子 λ_{IDC} 取为 0.9,以最优控制器(OC: optimal control),即参数已知条件下的控制器为基准,比较本文提出的算法 DCTL 和 IDC 的学习性能和控制性能.损失函数均定义为

$$J=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[y(k)-y_r(k)]^2,$$

运算步数 N 为 100,Monte Carlo 运行次数 M 为 200.

图 1 为参数学习曲线.该图显示了参数学习结果,可以看出,经过大约 20 步运算后,DCTL 参数的估计值逐渐逼近真实值,3 个未知参数均得到了较好的辨识结果;而 IDC 参数的估计值逐渐逼近真实值是在大约 40 步运算后.表明了 DCTL 比 IDC 学习性能要好;进一步,又对两种对偶控制器的控制性能进行了比较,见图 2.可以看出,大约 18 步以前,在参数估计值有很不确定的情况下,对偶控制器运用了谨慎控制,控制信号幅值比较小,大约 20 步后,参数估计的不确定性减小了,对偶控制器与最优控制的控制曲线基本吻合.从损失函数的 Monte Carlo 曲线(图 3)反映出,DCTL 与最优控制器的损失函数曲线更接近,表明在统计意义下,DCTL 的控制性能较 IDC 的好.

为比较对于不同学习因子的 IDC 和基于两级最优算法的对偶控制的性能,将 OC,IDC,DCTL 的损失函数值分别记作 V_{OC},V_{IDC}及 V_{DCTL},对 λ_{IDC}取不同的值,得到相应的代价函数值参见表 1.

仿真结果表明,对任何一个 λ_{IDC}, DCTL 的代价函数值都较 IDC 的小,显示出了 DCTL 的良好的控制性能.

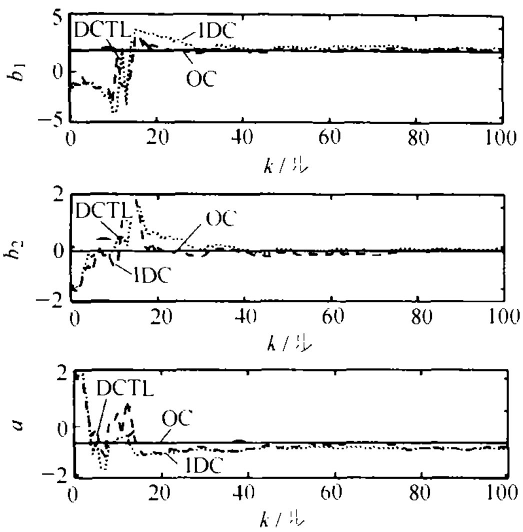

图 1　参数估计曲线

Fig. 1　Parameters estimation

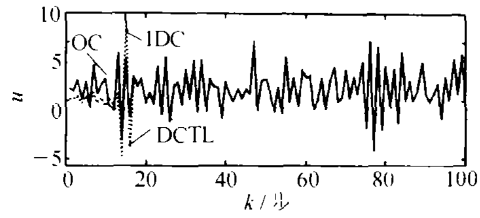

图 2　控制信号曲线

Fig. 2　Control signal

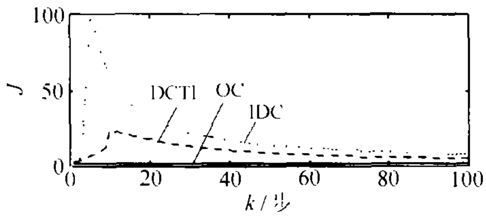

图 3　损失函数曲线

Fig. 3　Cost function

表 1　不同 λ_{IDC} 值时的 IDC 与 DCTL 的代价函数值比较

Table 1　Cost function values of IDC and DCTL comparison for different λ_{IDC}

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
V_{OC}	2.0295	1.9672	2.0417	1.9604	2.0239	2.0125	1.9408	2.0124	1.9826	1.9802	1.9536
V_{IDC}	10.1333	8.7200	9.2178	6.6923	7.4921	7.2598	6.9282	11.7019	10.0587	28.4163	11.2733
V_{DCTL}	7.4506	7.9458	8.6771	6.1263	7.2368	7.2480	7.8056	6.5465	7.0044	6.4804	6.9826

5　结论(Conclusion)

本文对具有未知恒定参数的随机系统的学习与控制问题进行了研究,提出了基于两级最优算法的对偶控制方法.原问题采用目标函数式(6)是不可解的,但若用目标函数式(7)代替原目标函数,再利用两级最优算法求解控制信号,问题就变得非常容易.尽管所得的解是次优的,然而它具有对偶特性,对未知参数的学习能力和对输出的调节作用较强.与 IDC 的比较结果表明,所得的控制策略可以得到更好的参数辨识结果与控制性能.本文提出的对偶控制方法只适用于未知参数恒定的情况,对于未知参数变化的随机控制问题是一个值得继续研究的方向.

参考文献(References):

[1] FELDBAUM A A. Dual control theory I-IV [J]. *Automatic Remote Control*, 1960,21(4):1033 - 1039.

[2] LI Duan, QIAN Fucai, FU Peilin. Variance minimization approach for a class of dual control problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002,47(12):2010 - 2020.

[3] FU Peilin, LI Duan, QIAN Fucai. Active dual control for linear-quadratic Gaussian system with unkown parameters [C] *Proc of the 15th IFAC World Congress*. Barcelona: [s.n.],2002.

[4] ALSTER J, BELANGER P R. A technical for the dual adaptive control [J]. *Automatica*, 1974,10(3):627 - 634.

[5] MILITO R, PADILLA C S, PADILLA R A. An innovation approach to dual control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1982,27(1):132 - 137.

[6] REID R W, CITRON S J. On noninferior performance index vectors [J]. *J of Optimization and Applications*, 1971,7(1):11 - 28.

[7] WITTENMARK B. Stochastic adaptive control methods: A survey [J]. *Int J Control*, 1975,21(5):705 - 730.

作者简介:

钱富才 (1963 —),男.1998 年获西安交通大学系统工程研究所博士学位,1999 年在香港中文大学系统工程与工程管理系从事博士后研究工作,现为西安理工大学自动化与信息工程学院教授.已在 IEEE Trans on Automatic Control 等刊物上发表论文 40 多篇.研究领域:大系统理论,非线性系统,最优控制,随机系统的辨识与控制,自适应控制.E-mail: fcqian@xaut.edu.cn;

刘　丁 (1957 —),男.1997 年获西安交通大学系统工程研究所博士学位,现为西安理工大学副校长、教授,博士生导师.长期从事工业自动化,系统优化,智能控制理论与应用等方面的研究,目前承担多项国家重点科研任务,发表论文 100 余篇,获国家及省部级科技进步奖 4 项.E-mail: liud@xaut.edu.cn;

李云霞 (1977 —),女.2003 年获西安理工大学硕士学位,现为电子科技大学自动化学院在读博士研究生.研究方向为随机系统与自适应控制.E-mail: diwana@163.com